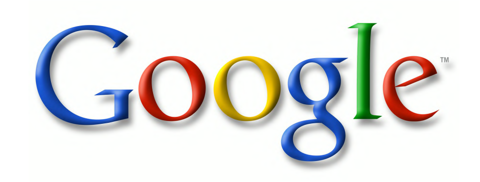
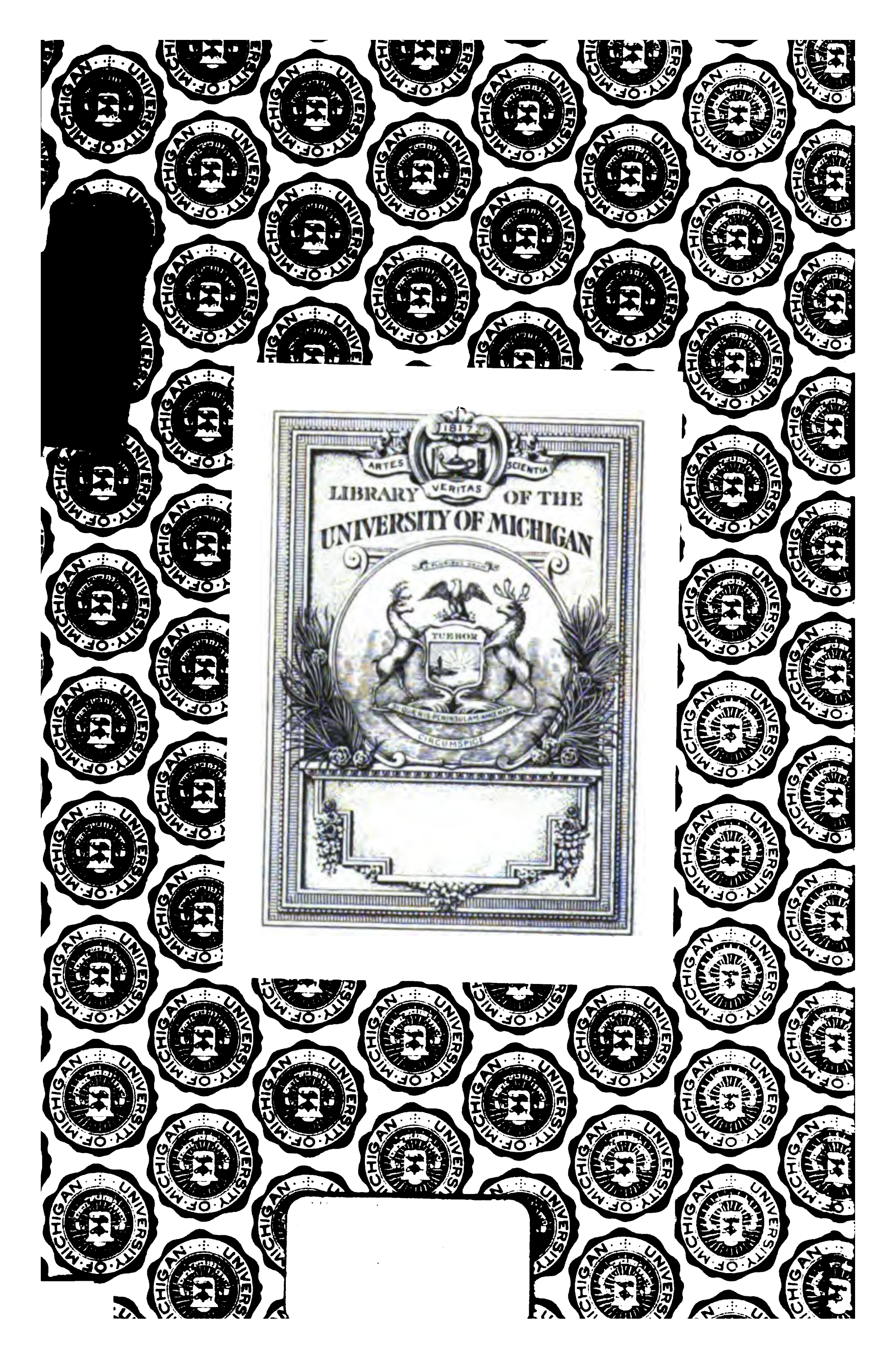




UNIVERSITY OF MICHIGAN
1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE


UNIVERSITY · OF · MICHIGAN

COURS
DE
MATHÉMATIQUES.

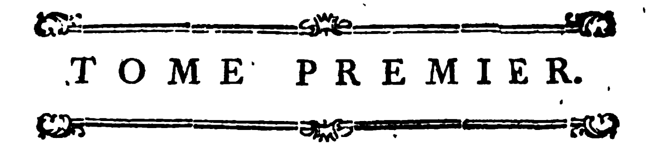
TOME I.

Hæc qui spernit, id est, has semitas sapientiæ, ei denuncio non rectè philosophandum. BOETIUS. ARIT. Lib. I. Cap. I.

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES,

PAR M. L'ABBÉ SAURI,

ANCIEN PROFESSEUR DE PHILOSOPHIE EN L'UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER.



TOME PREMIER.



A PARIS,

Chez JEAN-FRANÇOIS BASTIEN, Libraire, rue du Petit-Lion, Fauxbourg Saint-Germain.

M. DCC. LXXVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

A MONSEIGNEUR LE COMTE DE NOAILLES,

Duc de Mouchy, Grand d'Espagne de la premiere classe, Lieutenant-Général des Armées du Roi, Chevalier de ses Ordres, de la Toison d'or & Grand-Croix de l'Ordre de Malthe, Gouverneur des Villes & Châteaux de Versailles & de Marly, Lieutenant-Général de la Province de Guyenne, &c. &c. &c.

MONSEIGNEUR,

L'OUVRAGE que j'ai l'honneur de vous présenter a un rapport essentiel avec cette science sublime qui apprend à conduire les armées & à repousser les ennemis de l'Etat. Si la Tactique a, pour ainsi dire, changé de face depuis environ un siecle, si elle a fait de nos jours des progrès étonnans, c'est aux Mathématiques dont le goût est si généralement répandu,

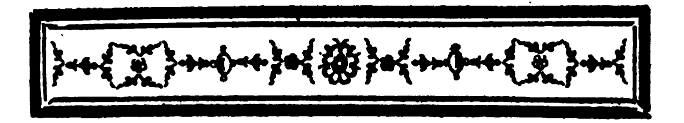
que nous devons cette révolution. Un Ouvrage qui renferme les découvertes les plus intéressantes des Géomètres anciens & modernes, n'avoit-il pas droit, MONSEIGNEUR, de paroître sous vos heureux auspices? Héritier des vertus & des talens militaires des Héros de votre illustre famille, vous avez prouvé à Ettinghen, & dans toutes les occasions, que vous étiez digne d'une si noble origine. Pendant la paix, au milieu de l'éclat que donnent la naissance & les dignités, au milieu du tumulte de la Cour, vous pensez, vous vivez en sage, protégeant les Arts & cultivant les Sciences. Mais, MONSEIGNEUR, je dois me souvenir que vous aimez à mériter des éloges, non à les entendre, & qu'on s'expose à vous déplaire, quand on entreprend de vous louer. Aussi ne me suis-je proposé, en vous faisant l'hommage public de mon Livre, que de vous donner une foible marque de la vive reconnoissance dont je suis pénétré pour les bontés dont vous daignez m'honorer.

Je suis avec un profond respect,

MONSEIGNEUR,

Votre très-humble & très-obéissant Serviteur

SAURI.



DISCOURS PRÉLIMINAIRE.

QUOIQUE les Grecs aient enrichi la Géométrie de très-belles découvertes, & qu'ils aient beaucoup travaillé sur quelques Courbes, principalement sur les Sections Coniques, je ne puis me persuader que leurs Géometres aient fait usage de ce genre d'Analyse que nous appellons *Algebre*. En effet, avec quelque soin qu'on parcourre les Écrits des anciens Grecs, & sur-tout ceux de Pappus qui a fait la collection de leurs admirables découvertes, on n'y trouve aucun vestige de notre Analyse.

Le seul Diophante a fait un Ouvrage d'Algebre en Langue Grecque, mais quoiqu'on ignore le temps auquel il a vêcu, tout le monde convient néanmoins qu'il a écrit après la naissance de Jésus-Christ. On prétend qu'il avoit composé treize Livres sur l'Analyse algébrique. Guillaume Xilandre a donné une traduction Latine des six premiers, imprimée à Basle en 1576 : les

autres paroissent perdus. Bacchet de Mazierac en donna une édition Grecque-Latine en 1621. Enfin le célebre Fermat en fit paroître une autre en 1670, accompagnée de plusieurs Notes très-intéressantes.

Diophante ne traite nullement de ce genre de Problêmes, que nous appellons *déterminés*, il parle seulement de cette espece de Problêmes sémi-déterminés qui regardent les quarrés ou les cubes des nombres, pour la solution desquels il faut éviter les quantités radicales, ce qui demande souvent beaucoup d'industrie.

Avant qu'on connût en Europe les Ouvrages de Diophante, l'Algebre des Arabes étoit déja assez répandue. F. Lucas Paccioli fit imprimer le premier un Livre sur l'Algebre, qui a pour titre : *Summa Arithmeticæ & Geometriæ, proportionumque & proportionalitatum.* Si nous en croyons Wallis, l'édition en parut à Venise en 1494. L'Auteur de cet Ouvrage avoue qu'il a pris beaucoup de choses de plusieurs Savans qu'il nomme, tels que Léonard de Pise, Jordan, &c.

F. Lucas parle fort au long de l'Arithmétique & de l'Algebre ; mais il ne va pas au-delà des Équations du second degré. C'est là

auſſi que les Arabes s'étoient arrêtés. De ſorte que F. Lucas & les autres Analyſtes Européens qui l'ont précédé n'ont fait autre choſe que ſimplifier ce que les Arabes leur avoient tranſmis. Cardan, s'appuyant ſur le témoignage de Léonard de Piſe, aſſure que nous devons l'invention de l'Algebre à Mahomet, fils de Moſis. A celui-là l'on peut joindre un autre Mahomet de Bagdad, Geber, & d'autres dont les noms ſont à peine connus ; & il eſt douteux s'ils ſe ſont occupés de l'Algebre, ou ſeulement de l'étude de l'Aſtronomie.

Les Auteurs qui ont écrit avant Cardan; tels que Michel Stifeli ; bien plus, pluſieurs de ceux qui ont travaillé depuis Cardan, comme Pierre Nonnius, Profeſſeur de Conimbre, n'ont rien ajouté à cette Science.

En 1545 parut *le grand Art* de Jérôme Cardan de Milan, Ouvrage dans lequel, outre la réſolution des Équations Quadratiques, on trouve encore celle des Équations Cubiques. Ce Géometre avoue ingénument que la méthode de réſoudre les Équations du troiſiéme degré appartient à Scipion Ferreo de Boulogne. Celui-ci cacha pendant long-temps ſa découverte, ne l'ayant communi-

quée qu'au seul Antoine Florido, Vénitien, son Auditeur. Ce dernier ayant proposé dans un combat littéraire, à Nicolas Tartalea quelques Problêmes qui supposoient la résolution des Équations du troisieme degré, son adversaire travailla avec tant de succès qu'il trouva enfin la solution desirée. Tartalea découvrit la regle à Cardan, mais ne lui communiqua point la démonstration. Celui-ci à force de méditations & de travaux trouva & perfectionna cette démonstration; & comme il fut le premier qui la rendit publique, on a appellé *formule de Cardan* celle dans laquelle se résout une Équation du troisiéme degré.

Dans le même Ouvrage de Cardan on trouve une autre découverte plus admirable encore, je veux parler de la résolution des Équations du quatriéme degré, que nous devons, au témoignage même de ce Géometre, à Louis de Ferrariis, son Auditeur. Raphaël Bombelli la publia dans son Algebre en 1574. Depuis ce temps-là on a fait très-peu de découvertes rélativement à la résolution des Équations, & il nous manque encore & il nous manquera sans doute encore longtemps une méthode générale pour résoudre celles qui passent le quatriéme degré;

cependant Vincent Ricati a trouvé la maniere de résoudre les Équations de tous les degrés lorsqu'elles ont certaines conditions qui les rendent susceptibles d'une formule semblable à celle de Cardan.

Dans ce temps-là les Algébristes ne faisoient usage des lettres alphabétiques ou des autres signes, que pour indiquer les quantités inconnues, employant les nombres pour désigner les quantités connues. Cet usage rendoit les solutions moins universelles, & lorsque les données étoient changées dans un Problême de la même espece, on étoit obligé de recommencer le calcul.

Le célebre Viete, François, un peu avant 1600 introduisit l'usage de donner des noms aux quantités connues & inconnues par le moyen des symboles algébriques; il appella cela l'*Arithmétique Spécieuse*. On ne sauroit douter que cette méthode n'ait fait changer de face à l'Algebre & rendu les solutions des Problêmes plus faciles, plus simples & plus universelles.

Après Viete, Guillaume Oughtred, Anglois, publia un Livre intitulé *Clavis Mathematica*, en 1631. La même année parut l'Algebre de Thomas Hariot aussi Anglois,

ouvrage poſthume, dont l'Auteur étoit mort en 1621. En 1637 le grand Deſcartes donna ſa ſavante Géométrie, qu'on doit plutôt regarder comme un Traité d'Algebre. Ces Auteurs firent connoître la formation des Équations compoſées, & diviſerent les Racines en négatives & poſitives, en rationnelles & radicales, en réelles & imaginaires. On a enſuite découvert pluſieurs autres vérités & pluſieurs uſages qui ont enrichi l'Algebre.

On ne doit pas paſſer ſous ſilence l'Ouvrage poſthume d'un certain Marin Getald de Raguſe, qui a pour titre : *de Compoſitione, & Reſolutione Mathematicâ*, imprimé à Rome en 1630. On y trouve une méthode très-claire pour conſtruire géométriquement, & pour déterminer les Racines réelles des Équations du premier & du ſecond degré, après qu'elles ont été réſolues.

Mais le célebre Deſcartes a rendu le plus grand ſervice aux Mathématiques en appliquant l'Analyſe aux Courbes : car il a démontré leurs propriétés & conſtruit par leur moyen les Équations ſupérieures au ſecond degré. Pluſieurs Géometres travaillant après ſes idées ont répandu une nouvelle lumiere ſur ces matieres, parmi leſquels on doit

compter le célebre Rabuel, qui nous a donné un Commentaire très-ſavant ſur la Géométrie de Deſcartes.

Il ſeroit trop long de faire mention ici de tous les Analyſtes qui ont écrit après Deſcartes; je me contenterai de parler de ce qui me paroîtra le plus digne d'attention. Premiérement, quoiqu'une Équation ait des Racines réelles, il eſt ſouvent très-pénible de les trouver. Les Analyſtes ont donné pluſieurs méthodes pour y parvenir; mais le ſavant Clairaut paroît avoir épuiſé la matiere. Bien plus, il a enſeigné la maniere de trouver les Facteurs Rationels du ſecond degré qui peuvent diviſer une Formule donnée.

Le ſubtil Taylor ayant propoſé un certain Problême à tous les Mathématiciens non Anglois, Jean Bernoulli, Jacob Herman, Gabriel Manfredi & Julien de Fagnan découvrirent la méthode de réſoudre pluſieurs Binomes & Trinomes en Facteurs réels du ſecond degré. Les Ouvrages poſthumes de M. Cotes prouvent aſſez que cette méthode ne lui étoit pas inconnue: puiſqu'on y trouve un Théorême très-élégant ſur la diviſion de la circonférence d'un Cercle en parties égales, qui eſt le fondement de

cette invention. Il ne ſera pas inutile de lire ce que le célebre Euler a écrit ſur cette matiere dans ſon Introduction à l'Analyſe des infiniment-petits. Le célebre M. d'Alembert a démontré que toutes les quantités imaginaires de quelle forme qu'elles ſoient, peuvent toujours ſe réduire à la forme $A + B \cdot \sqrt{(-1)}$, A & B, étant des quantités réelles.

Euler a ajouté à l'Analyſe le nouveau Calcul des Sinus & des Co-ſinus, qui eſt de la plus grande utilité. Vincent Ricati ne s'eſt pas contenté d'augmenter ce Calcul, il a inventé celui des ſinus & des co-ſinus hyperboliques, qui ont une très-grande analogie avec les circulaires.

Pluſieurs Savans ont fait uſage des Séries; ceux ſur-tout qui ont traité de probabilités dans les haſards, comme Montmort, Jacques Bernoulli & Moivre ; mais Vincent Ricati a parlé fort au long de cette matiere dans un Ouvrage intitulé : *de Seriebus recipientibus ſummam algebraicam, aut exponentialem Commentarius.*

L'uſage de l'Algebre dans la Géométrie a été perfectionné & augmenté depuis Deſcartes. Newton nous a donné l'énumération des

lignes du troisiéme ordre, mais sans démonstration & sans parler des regles qu'il avoit suivies ; de sorte qu'on l'a accusé d'avoir écrit plutôt pour se faire admirer que pour instruire. Cependant on s'est apperçu que sa méthode étoit fondée sur le parallélogramme analytique que le savant de Gua a changé en triangle. Le célebre Stirling non-seulement a développé les principes de Newton, il a même corrigé avec soin les erreurs qui étoient échappées à ce grand homme. Après lui M. Nicole nous a donné dans les Mémoires de l'Académie des Sciences l'énumération des Lignes du troisiéme ordre, en développant tous les principes que Newton avoit pu suivre. M. de Bragelogne a aussi entrepris l'énumération des lignes du quatriéme ordre ; mais son travail est imparfait. Il a parlé fort au long des points multiples, mais il n'a presque rien dit des branches infinies. Le célebre de Gua a développé dans un savant Ouvrage les usages de l'Analyse Carthésienne pour la recherche des propriétés des Lignes géométriques d'un ordre quelconque. Ce Mathématicien auroit, pour ainsi dire, épuisé cette théorie, s'il n'étoit tombé dans une espece de paralogisme, en voulant juger des Séries par leur seul premier terme. Cette recherche a été enfin finie par Cramer

dans ſon Livre intitulé : *Introduction à l'Analyſe des Lignes courbes algébriques.* Cet Ouvrage in-4°. de 680 pages a été imprimé à Genêve en 1750. L'Auteur y fait uſage du Triangle algébrique, ce qui rend ſes opérations longues & pénibles; il ne parle d'ailleurs ni des courbes qu'on appelle *tranſcendantes*, ni des courbes à *double courbure.*

Peu de temps auparavant avoit paru *l'Introduction à l'Analyſe des infiniment-petits* de M. Euler, Ouvrage latin, en deux volumes in-4°. Cet Auteur traite, comme Cramer, des branches infinies des courbes & de leurs genres, des points de contact, des rayons oſculateurs, des points ſinguliers, des points conjugués ou ſolitaires, des points multiples, &c. Ces Savans ſont d'accord dans les conſéquences, quoique leurs méthodes ſoient différentes : mais celle d'Euler eſt plus facile à entendre & à retenir.

Outre les Ouvrages dont nous venons de parler, il y en a pluſieurs autres dont nous croyons devoir faire mention, telle eſt l'Algebre de Jean Wallis, Anglois, qu'on trouve dans le ſecond Tome de ſes Ouvrages; le Chevalier Newton dans ſon Arithmétique univerſelle, Ouvrage très-

digne d'un ſi grand Géométre ; le Marquis de Lhôpital, qui dans ſon Traité des Sections Coniques parle des équations ſupérieures au ſecond degré ; le célebre Boſcovich, Clairaut, dont l'Algebre a fait tant de bruit ; Maclaurin, Saunderſon, Emerſon ; l'Algebre de M. Bezout, celle de M. l'Abbé Marie, celle de M. l'Abbé Boſſut qui a paru en 1773 ; la traduction françoiſe de celle de M. Euler, en deux vol. in-8°. qui a paru la même année. Nous avons renfermé dans notre Ouvrage les découvertes & les méthodes les plus dignes d'attention qu'on trouve dans les Livres dont nous venons de parler, & nous avons tâché de les mettre à la portée des eſprits médiocres.

Le Pere Reineau de l'Oratoire nous á donné en 1708 un Cours complet intitulé l'*Analyſe demontrée*. Il faut convenir que cet Ouvrage a formé pluſieurs Mathématiciens ; mais parce que dans ce temps-là les découvertes des grands hommes, ſur-tout dans le calcul intégral, étoient très-fréquentes, cet Ouvrage eſt aujourd'hui très-imparfait. Je ne dois pas paſſer ſous ſilence le Cours de M. Wolf; mais cet Auteur n'a donné que les premiers élémens de l'Algebre. La célebre Marie Agneſi a publié en 1748 de ſavantes Inſtitutions analytiques en deux vo-

lumes in-4°. Cet Ouvrage Italien, qui a été reçu avec applaudiſſement, a eu le plus grand ſuccès, & il n'eſt plus poſſible aujourd'hui de ſe le procurer à quelque prix que ce ſoit. Enfin Vincent Ricati & Jérôme Saladini ont compoſé de concert des Inſtitutions analytiques en deux volumes in-fol. Dans le premier Tome, en 390 pages, on trouve l'Algebre & ſon application à la Géométrie avec le Calcul des ſinus & des co-ſinus, & un Traité de lignes courbes algébriques; mais il n'y eſt pas queſtion de courbes tranſcendantes, ni à double courbure. Le ſecond Tome, en 769 pages, traite du Calcul Différentiel & du Calcul Intégral, j'en rendrai compte dans le Diſcours Préliminaire qui précédra la ſeconde Partie de ce Cours de Mathématiques : mais cet Ouvrage latin eſt peu connu en France.

Il nous reſte maintenant à donner une idée tant de la méthode que nous avons ſuivie, que des matieres que nous avons traitées. Nous avons diviſé notre Ouvrage en deux parties; la premiere, dont nous allons rendre compte, renferme le Calcul, la Géométrie, les Courbes algébriques, les Courbes tranſcendantes & à double courbure. Dans le premier Volume je traite d'abord

d'abord des regles ordinaires de l'Arithmétique, des Fractions ordinaires & décimales, de l'évaluation des fractions, de la multiplication & division des Nombres complexes. Je passe tout de suite à l'Algebre, dont j'ai développé les regles le plus clairement qu'il m'a été possible; je n'ai pas oublié de donner la méthode de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, méthode utile dans la résolution des équations; je viens ensuite à la formation des puissances des Monomes & Polynômes, à l'extraction des Racines, au calcul des Radicaux & des Exposans, & je démontre la fameuse Formule du Binome de Newton : suivent les raisons & les proportions. Je parle bientôt après des progressions arithmétiques & géométriques; je développe ensuite la la théorie des Logarithmes & leurs usages *. Je viens après cela aux Equations; je donne d'abord quelques principes, mais j'en fais tout de suite l'application à plusieurs questions très-intéressantes. Après avoir parlé des Problêmes déterminés, je passe à ceux que les Géometres appellent *indéterminés*, *sémi-*

* L'invention en est due au célebre Neper, Ecossois, & on la regarde, avec raison, comme une des plus belles découvertes, dont les Mathématiques aient été enrichies dans ces derniers siecles.

déterminés & *plus que déterminés*. Je résous douze Problêmes sémi-déterminés du premier degré, & cinquante-deux des degrés supérieurs : car ce n'est que par le grand nombre d'exemples qu'on peut se flatter de former les jeunes Géometres ; mais j'ai eu l'attention de rendre les solutions faciles, & de choisir des questions capables de piquer la curiosité des Commençans.

De-là passant aux Equations du second degré à plusieurs inconnues, je donne la méthode de résoudre ces sortes d'équations, & j'en fais l'application à plusieurs Problêmes intéressans. Je n'oublie pas de parler des Equations à deux termes, de celles qui, quoique plus élevées que le second degré, peuvent néanmoins se résoudre par la méthode du second ; & à cette occasion je donne une formule générale, pour avoir la racine m d'une quantité de cette forme $a^m + b$, b étant une quantité fort petite en comparaison de a^m.

Je passe tout de suite aux équations de tous les degrés, dont je développe la formation ; j'apprends à délivrer une équation des radicaux, de son second terme, des fractions qu'elle peut contenir, du coefficient de son premier terme ; à changer les

racines positives en négatives, & réciproquement; à changer les racines d'une équation sans les connoître, soit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, ou en faisant qu'elles soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné; à trouver les limites des racines d'une équation; à trouver les racines commensurables & les diviseurs rationels tant du premier que du second degré. Je traite après cela de la résolution des équations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque. J'apprends ensuite à trouver les racines approchées, lorsqu'on ne peut pas en avoir d'exactes; à trouver les racines égales d'une équation quand il y en a. Je donne la méthode de trouver les racines de tous les degrés d'une quantité de cette forme $A + \sqrt{B}$, ce qu'on ne savoit faire dans tous les cas que pour quelques degrés. Les Equations du troisiéme & du quatriéme degré sont trop célébres pour les passer sous silence; c'est pourquoi j'en ai parlé assez au long. J'ai cru même faire plaisir à mes Lecteurs en leur expliquant une méthode très-élégante de résoudre les équations du quatriéme degré, que nous devons au savant Euler.

Quoi qu'il n'y ait aucune méthode, du moins pratiquable, pour résoudre les équa-

tions supérieures dans tous les cas, cependant lorsqu'une des racines peut s'exprimer par une formule semblable à celle de Cardan, on peut trouver cette racine, ainsi que je l'ai fait voir par plusieurs exemples; j'ai donc cru devoir donner la méthode générale pour connoître les Equations qui se trouvent dans ce cas. Je parle ensuite de l'Infini, des Séries ou Suites des Nombres figurés & Polygones; de la méthode de trouver le terme général & le terme sommatoire des suites, soit algébriques, soit récurrentes, soit algébrico-géométriques. Outre les Séries récurrentes ordinaires & qu'on peut appeller *Séries récurrentes simples*, j'ai encore parlé d'une autre espece de Séries récurrentes que j'appelle *composées* : elles se forment d'un certain nombre de termes antécédens, multipliés par des quantités constantes, en ajoutant à leur somme une même quantité positive ou négative.

Parce que les Séries récurrentes peuvent être d'un grand secours dans la recherche des racines des équations, j'ai cru devoir développer les principes sur lesquels cette méthode est fondée, en faisant voir par plusieurs exemples la maniere dont on doit s'en servir : enfin je termine mon Traité d'Algebre par la théorie des Fractions continues,

dont on peut faire uſage dans la réſolution de pluſieurs Problêmes. M. de la Grange en a traité fort au long dans les Additions qu'on trouve à la fin de l'Edition françoiſe des Elémens d'Algebre de M. Euler. Mais la théorie de ce grand Géometre paroît trop ſavante pour être miſe à la ſuite d'un Ouvrage auſſi élémentaire que celui de M. Euler ; ce n'eſt pas que nous ſoyons de l'avis de ceux qui aſſurent (voyez l'Avertiſſement des Editeurs de l'original) qu'un jeune homme qui avoit appris le Métier de Tailleur, & qui ne pouvoit être mis, quant à ſa capacité, qu'au rang des eſprits ordinaires, avoit non-ſeulement très-bien ſaiſi tout ce que ſon Maître lui enſeignoit & lui dictoit, mais qu'il s'étoit encore trouvé en peu de tems en état d'achever tout ſeul les Calculs algébriques les plus difficiles, & de réſoudre promptement toutes les queſtions analytiques qu'on lui propoſoit. Ce ſont-là de pures fables qu'on voudra bien nous diſpenſer de croire. Nous ne révoquons pas cependant le fait en doute : nous prétendons ſeulement que le jeune homme en queſtion avoit des diſpoſitions plus que communes ; parce que, quoique l'Ouvrage de M. Euler ſoit écrit avec beaucoup de méthode & de netteté, un eſprit ordinaire ne peut ſe flatter de l'apprendre qu'avec beaucoup de peine &

de travail *. Au reste nous avons parcouru cette Algebre avec beaucoup d'attention, & quoiqu'elle ne soit pas complette, la lecture peut cependant en être très-utile aux Commençans. Mais on trouvera dans la nôtre tout ce qu'il y a d'intéressant dans celle du savant Auteur dont nous venons de parler, & sur-tout les méthodes qui regardent l'Analyse de Diophante, avec plusieurs Problêmes dont ce Savant n'a point parlé.

Il seroit difficile de fixer l'époque de l'origine de la Géométrie; mais on ne peut douter qu'elle ne soit de la plus grande antiquité : dès les premiers temps on eut besoin de mesurer les terreins, & bientôt après la curiosité porta les hommes à chercher des méthodes pour connoître la largeur d'une riviere qu'on ne pouvoit passer, la hauteur d'une montagne, la solidité d'une muraille, &c. on tatona sans doute long-temps, & ce ne fut qu'après bien des efforts qu'on trouva des moyens faciles de réussir. Euclide fut le premier, il y a environ deux mille ans, qui fit la collection des Principes Géométriques connus de son temps : & son Ouvrage con-

* Cet Ouvrage en deux volumes in-8°. a été imprimé à Lyon en 1773.

ſacré par l'eſtime générale des ſiécles éclairés, eſt un de ces monumens précieux qui ont échappé aux injures des temps.

La Géométrie, comme tout le monde le ſait, n'eſt autre choſe que la Science de l'Eſpace ou de l'Étendue en *longueur*, *largeur* & *profondeur*; c'eſt-à-dire, la Science des *Lignes*, des *Surfaces* & des *Solides*. Après avoir parlé de l'Algebre, je viens à la Géométrie; je traite d'abord des Lignes & de leurs propriétés, des Angles & de leurs meſures. Les Géometres enſeignent communément que les Angles qui ont les côtés paralleles ſont égaux: je démontre qu'ils ſont égaux, ou ſupplémens l'un de l'autre. Je parle des l'égalité & de la ſimilitude des triangles, des Lignes proportionnelles, &c. Je paſſe à la meſure & au rapport des Surfaces, aux propriétés des Plans, aux Angles ſolides, &c. Je traite enſuite des Solides, de la meſure & du rapport de leur ſurface & de leur ſolidité. Enfin venant à la Trigonométrie, je développe les méthodes connues de réſoudre les Triangles, ſoit rectangles ſoit obliquangles. J'apprends à meſurer la largeur d'une Riviere, la hauteur d'une Tour, celle d'une Montagne, la diſtance de deux Lieux inacceſſibles; à lever

une Carte Géographique ; à trouver le rapport approché du Diametre à la circonférence d'un Cercle ; &c.

Reprenant ensuite la théorie des Sinus, Co-sinus, Tangentes, Co-tangentes, &c. j'enseigne à trouver soit le Sinus, soit le Co-sinus, soit la Tangente, soit la Co-tangente des Arcs multiples. J'applique cette théorie à la résolution des Équations du troisiéme degré dans le cas irréductible. Enfin je résous ce Problême ; couper la demi-circonférence d'un Cercle en un nombre quelconque de parties égales par des lignes tirées d'un point, situé sur le diametre, mais hors du centre ; l'Équation à laquelle je parviens, renferme le beau Théorême de M. Cotes.

Après avoir parlé de la Trigonométrie plane ou rectiligne, je développe les principes de la Trigonométrie sphérique, science dont on ne peut se passer dans l'Astronomie, & qui est d'une si grande utilité dans la navigation. J'ai tâché de la mettre à la portée des esprits ordinaires, en la présentant sous un point de vue facile à saisir, & écartant toutes les inutilités dont certains Auteurs ont, pour ainsi dire, accablé cette partie de la Géométrie.

Pour traiter les chofes dans l'ordre le plus naturel qu'il foit poffible, je n'ai pas fait difficulté de faire ufage de l'Algebre toutes les fois qu'il m'a paru qu'elle pouvoit fimplifier les démonftrations géométriques. Ceux qui ont traité la Géométrie avant l'Algebre ont été obligés non-feulement de rendre leur ouvrage plus long, mais encore de renvoyer à l'Algebre des queftions qui doivent naturellement être placées dans la Géométrie, inconvénient qui ne me paroît pas petit.

Tel eft le premier volume de notre Cours de Mathématiques. Le fecond contient la Géométrie fublime ou la Géométrie des Courbes. Les Courbes, comme tout le monde le fçait, font de trois efpeces, géométriques ou algébriques, tranfcendantes, & à double courbure. Parmi les Courbes algébriques, les Sections Coniques tiennent le premier rang à caufe de leur utilité dans les Arts, l'Aftronomie & la Méchanique : elles n'étoient pas inconnues aux anciens Géometres Grecs, qui s'en font beaucoup occupés. Je commence donc par développer les propriétés de ces Courbes ; je n'oublie pas de parler des Logarithmes hyperboliques ordinaires, des Logarithmes fimples ou d'une dimenfion, des Sinus & Co-finus hyperboliques. Je viens aux Sections coni-

ques des genres ſupérieurs, & je fais voir que toute équation d'un degré impair a au moins une racine réelle, & que ſi elle en a pluſieurs elles ſont toujours en nombre impair; de ſorte que les racines imaginaires ſont toujours en nombre pair : au contraire les Equations de degré pair ont des racines réelles en nombre pair, ou n'en ont aucune. Je parle auſſi de quelques uſages des Sections Coniques, & je donne une idée de la maniere dont on emploie la Parabole & l'Ellipſe dans la conſtruction des vaiſſeaux. Je fais voir auſſi que la fuſée d'une montre doit avoir la figure d'un hyperboloïde formé par la révolution d'un hyperbole autour de ſon aſymptote.

Après les Sections Coniques, je parle des Courbes Algébriques de tous les genres; j'apprends à décrire la Courbe lorſqu'on a ſon équation; je traite enſuite de la méthode des Interpôlations, ſi utile dans l'Aſtronomie. De-là paſſant à d'autres objets, j'enſeigne à tranſporter l'Équation d'une Courbe, dont les Axes des x & des y forment un Angle donné, à d'autres Axes dont l'Angle ſoit différent : je démontre que les ſeules Lignes droites ſont déſignées par une Équation du premier degré à une ou pluſieurs inconnues. Je parle auſſi de quelques pro-

priétés de Lignes de tous les ordres. Je fais voir ensuite que les Lignes du second ordre sont représentées par des Équations du second degré ; j'indique les marques auxquelles on peut reconnoître si une Ligne du second ordre est Ellipse, Parabole ou Hyperbole. Je passe aussi-tôt après aux propriétés des Lignes du troisiéme ordre, aux Branches infinies des Courbes, & à leurs Asymptotes rectilignes ou curvilignes. Je donne la méthode de diviser les Lignes d'un même ordre en especes. Les Lignes du second ordre sont au nombre de trois ; sçavoir, la Parabole, l'Ellipse & l'Hyperbole ; mais les Lignes du troisiéme ordre ont seize especes. J'ai suivi la méthode de M. Euler, qui m'a paru préférable à celle du grand Newton. Je parle ensuite d'une autre méthode pour trouver les Asymptotes des Courbes : elle est fondée sur les propriétés du Quarré analytique ou algébrique, dont je développe la construction & les usages, pour trouver les valeurs d'une inconnue par une Série qui contienne l'autre inconnue qui se trouve dans l'équation proposée : je traite aussi du retour des Suites, & je donne la méthode d'exprimer un Nombre par son Logarithme. Je parle ensuite des diametres & du centre des Courbes, de leurs tangentes & de leur

courbure, de leur figure dans un eſpace fini; des Lignes courbes décrites par le moyen des inſtrumens; des Courbes dont on trouve l'équation par des propriétés données qui dépendent de pluſieurs points de ſection; des Courbes ſemblables; des interſections des Lignes algébriques; de la conſtruction des Problêmes & des Équations. Je réſous pluſieurs équations déterminées du ſecond degré, & pluſieurs Problêmes géométriques. Je traite auſſi-tôt après de la conſtruction des Équations du ſecond degré à deux inconnues, de la réſolution des Équations déterminées du troiſiéme & du quatriéme degré, des Problêmes déterminés & indéterminés, des Degrés ſupérieurs, & je donne une méthode par laquelle on peut facilement conſtruire une équation déterminée d'un degré quelconque : enfin je fais voir comment on peut trouver les Racines réelles d'une Équation numérique à une ſeule inconnue.

Les Courbes tranſcendantes, qu'on appelle encore *méchaniques*, devant faire partie d'un Cours complet de Mathématiques, j'ai cru devoir parler des plus fameuſes, telles que la Ligne des ſinus & des co-ſinus, les Spirales de différens genres, la Quadratrice de Dinoſtrate, la Cycloïde, la Logarithmi-

que, & je n'ai pas oublié les Courbes que M. Leibnitz appelle *intercendantes*.

Outre les Lignes dont nous venons de parler, qui ſont toujours ſituées ſur une ſurface plane, les Géometres modernes conſiderent encore les Courbes à double courbure, dont tous les points ne ſont pas placés dans le même plan ; mais parce que la théorie des Courbes à double courbure ſuppoſe celle des ſurfaces courbes, je traite d'abord des équations des ſurfaces courbes ; & venant enſuite aux Courbes à double courbure, j'apprends à les décrire par le moyen des équations de leurs trois Courbes de projection, me réſervant de parler plus au long de ces ſortes de Courbes dans la ſeconde Partie de cet Ouvrage.

Il nous reſte à dire un mot de la maniere dont les Commençans peuvent étudier notre Cours de Mathématiques. Ceux qui n'ont pas le ſecours d'un bon Maître, choſe rare dans les Provinces, doivent lire d'abord tout ce qui eſt écrit en caractere ordinaire, avec les Notes qui y ont rapport, Notes inutiles ſans doute pour les Savans, mais que nous avons jugé à propos de multiplier, afin de nous rendre plus intelligibles, nous étant

proposés d'instruire les Commençans, & non de nous faire admirer. Revenant ensuite sur leurs pas, ils reprendront le tout, en lisant de suite l'Ouvrage tout entier : j'en excepte la derniere section de la seconde Partie, pour laquelle il ne sera pas nécessaire de prendre cette précaution. Le petit caractere contient (excepté dans la quatriéme section de la seconde Partie) des choses moins essentielles, quoique très-intéressantes ; & ceux qui veulent approfondir les Mathématiques & devenir vraiment Géometres, seront bien-aise de trouver rassemblés dans un petit nombre de volumes les découvertes & les travaux des Mathématiciens anciens & modernes. Une longue expérience nous ayant appris la maniere dont on doit présenter la vérité aux jeunes gens pour qu'ils la saisissent avec facilité, nous espérons que les esprits même ordinaires pourront, moyennant une application un peu soutenue, comprendre facilement notre Ouvrage & devenir Géometres sans le secours d'aucun Maître : mais ceux qui auront ce secours pourront faire des progrès plus rapides, & approfondir les Mathématiques en fort peu de temps.



APPROBATION

DU CENSEUR ROYAL.

J'AI lu par l'ordre de Monſeigneur le Chancelier, le *Cours complet de Mathématiques*, compoſé par M. l'Abbé SAURI. Ce Cours m'a paru plus complet que tous ceux qui ont paru juſqu'à préſent, ſoit en France, ſoit dans le reſte de l'Europe : la Géométrie, l'Algebre, les Séries, la théorie des Sinus y ſont traités d'une maniere auſſi claire que profonde ; les Sections Coniques y ſont très-bien développées ; on y trouve tout ce qu'on peut déſirer ſur les Courbes tranſcendantes & ſur les Courbes à double courbure, avec la réſolution des Problêmes de Géométrie qui s'y rapportent, la méthode de trouver les racines des Equations par le moyen des Courbes & du quarré analytique.

La ſeconde Partie de cet Ouvrage contient quatre Sections : dans la premiere ſont les principes généraux du Calcul différentiel & du Calcul intégral, les applications du Calcul différentiel aux ſous-tangentes, ſous-normales, tangentes & normales des Courbes, ſoit algébriques, ſoit tranſcendantes, & aux queſtions importantes de *maximis* & *minimis*. L'Auteur examine, par exemple, qu'elles ſont les conditions que doivent avoir les fonctions algébriques, pour être ſuſceptibles du *maximum* & du *minimum*. Il explique les *maxima* & *minima* de la ſeconde eſpece, les rayons de courbure, les points d'inflexion & de rebrouſſement, les cauſtiques par réflexion & par réfraction, & l'uſage du Calcul différentiel dans la recherche des racines des Equations. Les notions qu'il donne ſur la nature du Calcul infinitéſimal, ſont claires & ſatisfaiſantes ; il paroît même prouver que Newton, Euler ſe ſont trompés dans l'idée qu'ils s'en formoient.

La ſeconde Section comprend les applications du Calcul intégral à la Géométrie ; on y apprend la quadrature & la rectification des Courbes, la maniere de trouver le centre de gravité des Solides, la méthode inverſe des tangentes, & l'application du Calcul différentiel & intégral aux Courbes à double courbure.

Dans la troiſiéme Section, M. l'Abbé SAURI donne la maniere d'intégrer les Formules & les Equations différentielles à une & à pluſieurs variables ; on y apprend dans quel cas une différentielle d'un ordre quelconque peut être intégrée un certain nombre de fois dans l'état où elle eſt. Tout ce qu'on a

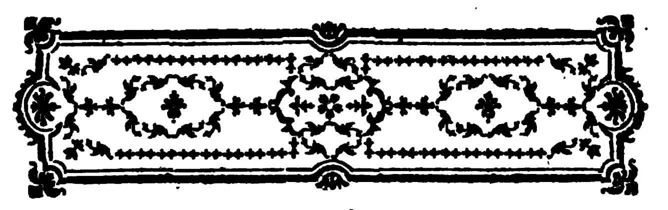
trouvé de plus intéressant sur le Calcul intégral, depuis que les plus grands Géometres s'en sont occupés, est renfermé dans cette Section, qui tiendra lieu de plusieurs volumes à ceux qui voudront approfondir cette partie, la plus abstraite de la haute Géométrie. L'Auteur y développe la nouvelle théorie des Variations, avec les conséquences qu'on peut en tirer pour la perfection du Calcul intégral; il fait enfin l'application de ce Calcul aux questions de *maximis* & *minimis*, qui ne peuvent se résoudre par le Calcul différentiel.

La quatriéme Section renferme l'application de tous ces Calculs aux plus beaux Problêmes de Physique, de Marine, de Méchanique & d'Hydrodinamique.

Cet exposé du Cours de Mathématiques de M. l'Abbé SAURI fait voir qu'il étoit difficile d'y réunir plus d'avantages; on les chercheroit inutilement dans tout autre Ouvrage. L'Auteur y a mis la plus grande clarté. Il substitue souvent aux méthodes des plus habiles Géometres, des méthodes plus simples qui lui sont propres & qui sont ingénieuses; il releve des erreurs dans des Auteurs célebres, relativement à des questions importantes; enfin il réunit tous les genres de mérite que l'on pouvoit donner à cet Ouvrage. On pourra par le moyen de ce Livre approfondir les Mathématiques plus facilement & en moins de temps qu'on ne pouvoit le faire avec le secours dispendieux d'un grand nombre de Livres étrangers & de Mémoires de différentes Académies, dont on pourra se passer au moyen du nouvel Ouvrage de M. l'Abbé SAURI. A Paris, le premier Mars 1772. *Signé*, DELALANDE, de l'Académie des Sciences.

Le Privilége se trouve au Cours de Philosophie *par le même Auteur.*

COURS



COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES.

PREMIERE PARTIE.

CALCUL.

1. Les Mathématiques ne sont autre chose que la science de la grandeur. La *grandeur* ou *quantité* est une chose susceptible d'augmentation ou de diminution : comme les nombres qu'on peut augmenter, en leur ajoutant une ou plusieurs unités, qu'on peut diminuer en en retranchant un autre nombre : ainsi, en ajoutant trois unités au nombre douze, on a *quinze* ; & seulement *huit*, si de ce nombre l'on retranche quatre. La quantité dont les parties sont séparées, s'appelle *grandeur discrete* : tel est un amas de grains ; elle fait l'objet de l'Arithmétique. On appelle *grandeur continue*, celle dont les parties sont unies entr'elles : si ces parties existent successivement, & non toutes à la fois, c'est alors la *grandeur successive* : tel est le temps, dont les

parties se suivent les unes les autres sans aucune interruption; si les parties existent toutes à la fois, on la nomme *grandeur permanente* : telle est l'étendue qui fait l'objet de la Géométrie.

On peut diviser les Mathématiques en *pures* & *mixtes*. Les Mathématiques pures considerent la grandeur en tant que grandeur; les Mathématiques mixtes considerent la grandeur en tant que revêtue des qualités sensibles & physiques : comme la Méchanique, qui considere le mouvement des corps ; l'Optique, qui traite des propriétés de la lumiere. Comme nous avons déja rendu compte du plan de notre Ouvrage, il seroit inutile de revenir là-dessus; mais, avant d'entrer en matiere, il est bon d'expliquer ce qu'on entend par certains termes fort usités chez les Mathématiciens.

Un *Théorême* est une proposition dont il s'agit de démontrer la vérité.

Un *Corollaire* est une proposition qui suit d'une autre.

Un *Problême* est une proposition qui enseigne le moyen de faire quelque chose.

Un *Lemme* est une proposition qu'on démontre pour servir de principe à un autre.

Un *Scolie* est une remarque que l'on fait sur une proposition déja démontrée, ou bien encore la récapitulation succinte d'une théorie plus étendue.

Une *Définition* est une proposition qui explique la nature d'une chose, ou la signification d'un mot.

On entend, par *Axiomes*, des vérités si palpables que personne ne les conteste : telles sont les propositions suivantes.

Le tout est plus grand qu'une de ses parties ; deux choses égales à une troisiéme, sont égales en-

tr'elles ; si à des quantités égales on ajoute des quantités égales ; ou bien, si de quantités égales on retranche des quantités egales, elles resteront égales.

DE L'ARITHMÉTIQUE.

1. L'*Arithmétique*, ou la science des nombres, apprend à les composer & décomposer. On entend par un *nombre*, l'*assemblage de plusieurs unités* ; l'*unité* est une chose indivisible, ou qu'on regarde comme telle, mais cela n'empêche pas que certaines unités ne soient composées d'autres unités plus petites : *par exemple*, l'unité de livre est composée de seize onces. On se sert dans la numération actuelle des dix caracteres suivans :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
zero,	un,	deux,	trois,	quatre,	cinq,	six,	sept,	huit,	neuf

Le 0 seul ne signifie rien, mais il augmente la valeur des chiffres qui le précédent vers la gauche : le caractere 3, *par exemple*, ne vaut que trois unités ; mais, s'il est suivi d'un 0, en cette maniere 30, il vaut *trente* : de même le chiffre 2 ne vaut que *deux* ; mais suivi d'un 3, en cette maniere 23, il vaut *vingt-trois* : de sorte que, dans la numération actuelle, la valeur des chiffres va en augmentant de droite à gauche, en proportion décuple : c'est-à-dire, l'unité d'un chiffre plus à gauche, vaut dix fois l'unité d'un chiffre immédiatement plus à droite : donc, en allant de la droite à la gauche, les unités du premier chiffre seront des unités simples ; celles du second, des dixaines ; celles du troisiéme, des centaines ; celles du quatriéme, des mille, &c. comme on le voit ici :

	5	3	6	2	3	2	4	3	0	5	8	7	2
&c.	Trillions.	Centaines de billions.	Dixaines de billions.	Billions.	Centaines de millions.	Dixaines de millions.	Millions.	Centaines de mille.	Dixaines de mille *qui manquent.*	Mille.	Centaines.	Dixaines.	Unités.

Si donc on propose d'exprimer en chiffres le nombre cinquante millions cinq cens douze mille cent, je commence par les millions, en écrivant 50; j'écris ensuite 512, & à côté je pose encore 100, & j'ai 50, 512, 100, nombre demandé : mais, pour exprimer dans le discours le même nombre exprimé en chiffres, après l'avoir partagé en tranches, en commençant par la droite, ensorte que chaque tranche contienne trois chiffres, excepté la premiere à gauche qui peut en contenir moins, je vois que la premiere tranche (car on suppose qu'il y en a plus d'une, autrement ce que nous venons de dire n'auroit pas lieu) contient des unités; la seconde des mille, & la troisiéme des millions : ainsi, en allant de la gauche à la droite, je dirai cinquante millions cinq cens douze mille cent.

DE L'ADDITION.

3. L'*Addition* est cette opération par laquelle on trouve la somme de plusieurs nombres qu'on veut joindre ensemble.

PROBLEME. *Soit proposé d'ajouter ensemble les nombres* 73520, 702, 897 : les ayant écrits les uns sous les autres, les unités sous les unités, les dixaines

fous les dixaines, &c. on tirera une barre au-deffous; prenant enfuite la fomme des unités,on l'écrira fous les unités; on prendra enfuite la fomme des dixaines, qu'on écrira fous les dixaines; puis celle des centaines, &c. Si la fomme des unités ne peut s'exprimer que par 2 chiffres, on écrira fous les unités celui de la droite, & l'on retiendra celui de la gauche pour l'ajouter à la fomme des dixaines; on fera la même chofe à l'égard des dixaines par rapport aux centaines, &c. Ainfi je dirai 7 & 2 font 9, que j'écris fous les unités : je paffe enfuite aux dixaines, en difant 9 & 2 font 11, qui valent une dixaine & 10 dixaines, c'eft-à-dire, une dixaine & une centaine, c'eft pourquoi j'écris 1 fous les dixaines, & je retiens 1 pour l'ajouter à la fomme des centaines : je dis donc 1 de retenu & 8 font 9, & 7 font 16, & 5 font 21, j'écris 1 fous les centaines, & je retiens les 2 pour les ajouter au chiffre 3 fitué dans la colonne des mille, je dis donc 2 de retenu & 3 font 5, que j'écris fous les mille; je paffe enfuite à la colonne des dixaines de mille, qui ne contient que le chiffre 7 que j'écris fous cette colonne, de forte que j'ai pour fomme cherchée le nombre 75119.

73520
702
897
75119

4. PROBLEME. *Ajouter enfemble des nombres complexes, c'eft-à-dire, des nombres qui contiennent des grandeurs de différentes efpeces, comme livres, fols, deniers.* Il faut écrire les unités de même nature les unes fous les autres, c'eft-à-dire, les deniers, *par exemple*, fous les deniers, les fols fous les fols, &c. On prendra enfuite la fomme des plus petites efpeces, & l'on verra fi cette fomme ne contient pas une ou plufieurs unités de l'efpece plus grande, dans ce cas on retiendroit cette unité,

ou ces unités, pour en faire une seule somme avec le nombre qui désigne la somme des unités de la grandeur suivante ; on en feroit de même pour les sols à l'égard des livres : ainsi, pour ajouter ensemble les nombres qu'on voit ici,

352 liv.	3 sols.	5 den.
872	18	10
3	0	2
1228 liv.	2 sols.	5 den.

Je prends la somme des deniers, laquelle étant 17 (on prend les 10 deniers tous à la fois) vaut 5 deniers & 12 deniers, c'est-à-dire, un sol & cinq deniers : c'est pourquoi écrivant 5 sous les deniers, je retiens un sol pour l'ajouter à la somme de la colonne suivante : je dis donc un sol de retenu & 0 & 18 font 19 & 3 font 22, qui valent 2 sols & 1 liv. c'est pourquoi j'écris 2 sols sous les sols, & je retiens 1 que j'ajoute aux livres ; je dis donc un de retenu & 3 font 4, & 2 font 6, & 2 font 8, que j'écris sous les unités de livre. Je passe ensuite à la colonne suivante, dont la somme est 12, c'est pourquoi j'écris 2 sous cette colonne, & je retiens 1 pour la colonne suivante, qui par ce moyen (2) vaudra 12 : ainsi j'écrirai 2 sous les centaines de livre, & 1 au rang des mille, de sorte que la somme sera 1228 liv. 2 s. 5 den. On opérera de même s'il s'agit d'ajouter ensemble des toises, pieds & pouces, en se souvenant que la toise vaut 6 pieds, & le pied 12 pouces.

Scolie. On peut, en opérant sur les deniers ou les sols, prendre à la fois la somme des dixaines & des

unités, ſans s'aſſujettir à paſſer des unités aux dixaines.

DEMONSTRATION de l'Addition. En ſuivant la regle preſcrite, on prend la ſomme des unités, celle des dixaines, celle des centaines, &c. donc on prend la ſomme entiere des nombres propoſés.

Pour faire la preuve de l'Addition, on peut recommencer l'opération, en allant de bas en haut, ſi l'on a d'abord opéré, en allant de haut en bas, ou réciproquement; & ſi l'on trouve la même ſomme que l'on a d'abord trouvée, c'eſt une marque qu'il n'y a pas d'erreur; car il n'y a point d'apparence qu'on faſſe la même faute dans les deux opérations.

DE LA SOUSTRACTION.

5. *Souſtraire un nombre 3, par exemple*, de 5, c'eſt ôter 3 de 5; le reſte 2 eſt l'excès du plus grand ſur le plus petit: on l'appelle auſſi *différence*. Il eſt viſible que l'excès ou la différence 2 étant ajoutée au nombre 3 qu'on a ſouſtrait, doit donner le nombre 5 dont on a ſouſtrait. Il eſt encore évident que ſi on ajoutoit au nombre 5 un nombre 10, *par exemple*, en ajoutant le même nombre au nombre 3 qu'on veut ſouſtraire de 5, la différence 2 de 15 à 13 ſeroit encore la même qu'auparavant.

6. PROBLEME. *Souſtraire le nombre 3502 du nombre 58001.* Ecrivez le plus petit ſous le plus grand, enſorte que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c. Retranchez, en allant de la droite à la gauche, chaque chiffre du nombre inférieur du chiffre correſpondant dans le nombre ſupérieur; écrivez la différence ſous chaque co-

```
58001
 3502
-----
54499
```

lonne. Si un des chiffres du nombre inférieur se trouve plus grand que son correspondant dans le nombre supérieur, ajoutez 10 au nombre supérieur; mais ensuite n'oubliez pas d'ajouter une unité au chiffre suivant du nombre inférieur. Cette unité étant ajoutée à un chiffre immédiatement plus à gauche, vaudra les dix unités ajoutées au nombre supérieur (2) : ainsi (5) la différence sera toujours la même. Ayant donc écrit les deux nombres, comme on le voit ici : je dis 2 de 1, cela ne se peut ; c'est pourquoi ajoutant 10 à 1, je retranche 2 de 11, j'écris le reste 9 sous les unités ; mais je me souviens ensuite d'ajouter 1 au chiffre suivant 0 du nombre inférieur (cela se fait seulement par la pensée) ce qui fait 1, qui ne peut être soustrait du chiffre correspondant 0; j'ajoute donc 10 à 0, & je retranche 1 de 10 pour avoir le reste 9, que j'écris au rang des dixaines; & à cause de 10 ajouté au nombre supérieur, j'ajoute 1 au chiffre 5 du nombre inférieur 1, la somme 6 ne peut être retranchée du chiffre correspondant 0, j'ajoute donc 10 à 0, d'où retranchant 6, il reste 4, que j'écris à la différence ; je me souviens d'ajouter 1 au chiffre suivant 3 du nombre inférieur pour avoir la somme 4, qui ôtée de 8, il reste 4 que j'écris à la différence; & comme je n'ai rien à ôter de 5, je dis rien, ou 0, de 5, il reste 5 que j'écris encore à la différence, comme on le voit, de sorte que la différence cherchée est 54499.

Si les nombres sont complexes, il faut écrire les unités de même espece les unes sous les autres, & soustraire en allant de droite à gauche, chaque chiffre du nombre inférieur de son correspondant dans le nombre supérieur. S'il arrivoit que le nombre

des deniers, *par exemple*, dans le nombre inférieur fût plus grand que son correſpondant, on ajouteroit à ce nombre correſpondant un ſol réduit en deniers, c'eſt-à-dire, 12 deniers; mais il faudroit ajouter 1 aux ſols du nombre inférieur, afin que la différence fût toujours la même. Si l'on étoit obligé d'ajouter aux ſols du nombre ſupérieur, on leur ajouteroit 20 ſols, c'eſt-à-dire, une livre réduite en ſols, puis on ajouteroit 1 livre aux livres du du nombre inférieur. S'il s'agiſſoit de pouces, pieds, & toiſes, on s'y prendroit comme dans l'exemple ſuivant.

EXEMPLE. *Soit propoſé de ſouſtraire 25 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, de 368 toiſes, 2 pieds, 8 pouces.* Ayant diſpoſé ces nombres, comme on le voit ici:

368 toiſes.	2 pieds.	8 pouces.
25	3	10
342	4	10
368 toiſes.	2 pieds.	8 pouces.

Je dis 10 de 8, cela ne ſe peut; c'eſt pourquoi j'ajoute 1 pied, ou 12 pouces, à 8, ce qui me donne 20, d'où retranchant 10, reſte 10, que j'écris ſous les pouces. J'ajoute enſuite un pied au nombre inférieur pour avoir 4 pieds, qui ne peuvent s'ôter de 2; c'eſt pourquoi j'ajoute une toiſe, ou 6 pieds au nombre ſupérieur, ce qui me donne 8, d'où retranchant 4, il reſte 4, que j'écris ſous les pieds. Comme j'ai ajouté une toiſe au nombre ſupérieur, je dois en ajouter une à l'inférieur; je dis donc 5 & 1 font 6, de 8, il reſte 2, que j'écris

ſous les toiſes : j'ôte enſuite 2 de 6, & je poſe 4 à côté du 2, & enfin, ôtant rien, ou 0 de 3, il reſte 3 que j'écris encore à la différence, qui eſt 342 toiſes, 4 pieds, 10 pouces.

Pour faire la preuve de la Souſtraction, on ajoutera enſemble le nombre qu'on a ſouſtrait avec la différence, & l'on trouvera la même ſomme, ſi l'opération eſt bien faite. Si l'on ajoute donc 25 toiſes, 3 pieds, 10 pouces, avec 342 toiſes, 4 pieds, 10 pouces, on aura 368 toiſes, 2 pieds, 8 pouces : ainſi l'opération ci-deſſus eſt bien faite.

Pour faire la démonſtration de la Souſtraction, il n'y a qu'à remarquer qu'en ſuivant la méthode propoſée, on prend la différence des unités, celle des dixaines, des centaines, &c. du plus grand & du plus petit nombre : on trouve donc la différence totale de l'un à l'autre.

DE LA MULTIPLICATION.

7. *Multiplier un nombre par un autre, c'eſt prendre le premier, qu'on appelle* Multiplicande *autant de fois qu'il y a d'unités dans le ſecond, qu'on nomme* Multiplicateur ; *le réſultat s'appelle* Produit. *Par exemple*, multiplier 5 par 3, c'eſt prendre 5 trois fois, ce que l'on fait, en diſant, 3 fois 5 font 15, 5 eſt le *multiplicande*, 3 le *multiplicateur*, & 15 le *produit*. Il ſuit de là que le produit 15 doit contenir le multiplicande 5 trois fois, c'eſt-à-dire, autant de fois que le multiplicateur contient l'unité. Pour exécuter facilement la multiplication, il eſt bon d'apprendre par cœur la table ſuivante, dont l'uſage eſt facile à concevoir :
ſi je veux ſavoir, *par exemple*, combien font 7

fois 6, je cherche la case qui répond à 7 & à 6, le nombre 42 qui se trouve dans cette case, est le produit de 7 par 6, & ainsi des autres.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

PROBLEME. *Multiplier un nombre par un autre.* Écrivez le multiplicateur au-dessous du multiplicande, de maniere que les unités répondent aux unités, les dixaines aux dixaines, &c. Ecrivez ensuite, en allant de la droite à la gauche, le produit de chaque chiffre du multiplicande par les unités du multiplicateur, ayant attention, lorsqu'un produit contient deux chiffres, de retenir celui de la gauche, pour l'ajouter au produit suivant, dont les unités sont des dixaines du produit précédent. S'il y a plusieurs chiffres au multiplicateur, le premier chiffre de chaque produit doit être écrit sous le chiffre correspondant du multiplicateur, ce qui est évident; puisque, quand on multiplie, *par exemple*, par les dixaines du multiplicateur, le premier chiffre du produit doit être au rang des

dixaines, &c. Prenez ensuite la somme de tous les produits, & vous aurez le produit total : Pour multiplier 3052, *par exemple*, par 153, après avoir écrit le multiplicande & le multiplicateur, comme on le voit ici, je dis 3 fois 2 font 6, que j'écris sous le premier chiffre du multiplicateur; je dis ensuite 3 fois 5 font 15, j'écris 5 à côté de 6, & je retiens 1 : continuant d'opérer, je dis 3 fois 0 font 0, & 1 de retenu font 1, que j'écris à la gauche du 5 ; je dis ensuite 3 fois 3 font 9, que j'écris comme on le voit, & j'ai le produit du multiplicande par le premier chiffre du multiplicateur. Je prends de même le produit du multiplicande par le second chiffre du multiplicateur, en disant 5 fois 2 font 10; j'écris 0 sous le second chiffre 5 du premier produit, & je retiens 1. En continuant d'opérer, je dis, 5 fois 5 donnent 25, & 1 de retenu font 26, j'écris 6 & retiens 2; je dis ensuite 5 fois 0 donnent 0, & 2 de retenus donnent 2, que j'écris à côté de 6 : je dis enfin 5 fois 3 font 15, que je pose, comme on le voit. Je passe au troisiéme chiffre du multiplicateur, en disant, 1 fois 2 est 2, que j'écris sous 1, c'est-à-dire, au rang des centaines; je dis ensuite 1 fois 5 donne 5, j'écris 5 à côté de 2 : ensuite 1 fois 0 donne 0, que j'écris après 5; enfin 1 fois 3 fait 3, que j'écris après 0. J'ajoute ces différens produits, en disant, 6 que j'écris sous 6; ensuite 0 & 5 font 5, que j'écris à côté de 6. Et continuant d'opérer, je dis, 1 & 6 font 7, & 2 donnent 9, que j'écris à coté de 5; & continuant de même, j'ai le produit total 466956.

$$\begin{array}{r} 3052 \\ 153 \\ \hline 9156 \\ 15260 \\ 3052 \\ \hline 466956 \end{array}$$

DEMONSTRATION de la Multiplication. En sui-

vant le procédé que nous venons d'indiquer, on prend le produit du multiplicande par les unités, par les dixaines, centaines, &c. du multiplicateur: donc on trouve le vrai produit, ou, ce qui revient au même, l'on prend le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur... En effet, en multipliant par 3, on a pris le multiplicande 3 fois, en multipliant par 5 on l'a pris 50 fois, puisqu'on a écrit le premier chiffre du produit au rang des dixaines, en multipliant par 1, & mettant le premier chiffre du produit au rang des centaines, on a multiplié par 100: on a donc pris le multiplicande 153 fois.

Comme dans certains cas on peut abréger la multiplication, il est bon d'en faire connoître quelques-uns. Si l'on doit multiplier par 1 suivi d'un ou de plusieurs 0 il suffira d'écrire à la suite du multiplicande autant de 0 qu'il y en a au multiplicateur: *par exemple*, pour multiplier 25 par 100, j'écris 2500, ce qui est évident, puisque multiplier 25 par 100, c'est prendre le multiplicande 100 fois, ou, ce qui revient au même, c'est rendre le multiplicande 100 fois plus grand; or, en ajoutant deux 0, on rend le multiplicande 100 fois plus grand, puisque ses unités deviennent des centaines, & ses dixaines deviennent des mille: donc, &c. Si on avoit à multiplier 25 par un nombre quelconque, suivi d'un ou de plusieurs 0, on multiplieroit à l'ordinaire sans avoir égard aux 0, on ajouteroit ensuite au produit autant de 0 qu'il y en auroit au multiplicateur: ainsi, si le multiplicateur étoit 300, on multiplieroit 25 par 3, le produit est 75, à côté duquel écrivant 00, j'ai pour produit total 7500: en effet le produit de 25 par 300 doit être triple du pro-

duit de 25 par 100; or, 7500 est triple de 2500.

S'il y avoit des o, tant à la fin du multiplicande, que du multiplicateur: *par exemple*, si on avoit à multiplier 250 par 300, on multiplieroit 25 par 3, & l'on ajouteroit au produit 75 autant de o qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur, & le produit cherché seroit 75000. Pour en avoir la raison, il suffit de remarquer que le produit de 25 par 300 doit être 7500, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus; or 250 est 10 fois plus grand que 25, donc le produit 7500 est 10 fois trop petit; on doit donc, en ajoutant un o, le rendre 10 fois plus grand: donc, &c.

REMARQUE I. Cela n'a pas lieu pour les o qui se trouvent entre les chiffres positifs du multiplicande ou du multiplicateur: ainsi, pour multiplier 12000 par 10100, on doit multiplier 12 par 101, & ajouter au produit autant de o qu'il y en a, tant à la fin du multiplicande, qu'à la fin du multiplicateur, & l'on aura pour produit 121200000.

REMARQUE II. La Multiplication sert à réduire les grandes especes en petites; *par exemple*, les toises en pieds, les pieds en pouces, les livres en sols, les sols en deniers. Ce qui se fait en multipliant les grandes especes par le nombre qui désigne combien de fois la grande contient la petite espece: ainsi, pour savoir combien 8 toises valent de pieds, je multiplie 8 par 6, parce que la toise contient six pieds, le produit 48 me fait voir que 8 toises valent 48 pieds.

Pour prouver la multiplication, on peut changer l'ordre des nombres donnés, c'est-à-dire, prendre pour multiplicande le multiplicateur, & réciproquement; car on doit toujours trouver le même

produit : en effet, 4 multiplié par 3 donne 12 ; & 3 multiplié par 4 donne aussi 12.

DE LA DIVISION.

8. *La Division est une opération par laquelle on cherche combien de fois un nombre*, par exemple, *15 qu'on appelle* Dividende, *contient un autre nombre 5*, par exemple, *qu'on nomme* Diviseur ; *le nombre 3 qui exprime combien de fois le dividende 15 contient le diviseur 5, est appellé* Quotient.

COROLLAIRE. De-là il suit : 1°. que le dividende contient le diviseur autant de fois que le quotient contient l'unité ; 2°. que la division est une espece de soustraction, puisque, quand on demande de diviser 15 par 5, c'est la même chose que si on demandoit de soustraire 5 de 15 autant de fois qu'il y est contenu, c'est-à-dire, 3 fois ; & si l'on fait attention qu'en multipliant 5 par 3, on ajoute 5 trois fois, il sera aisé de voir que la multiplication est une espece d'addition, comme la division est une espece de soustraction ; 3°. que parce que le quotient exprime combien de fois le diviseur est contenu dans le dividende, si on prend le diviseur autant de fois qu'il y a d'unités dans le quotient, on aura le dividende ; de sorte que le produit du diviseur, par le quotient, doit rendre le dividende (& c'est en cela que consiste la preuve de la division), si le quotient est exact ; mais si ce quotient n'est pas exact, c'est-à-dire, s'il y a un reste, il est nécessaire qu'en ajoutant le reste au produit dont nous venons de parler, on retrouve le dividende. *Par exemple*, si je divise 24 par 5, je dirai en 24 combien de fois 5, je trouve 4 pour quotient ; mais si

parce que 20, produit du diviſeur 5 par le quotient 4, étant ſouſtrait du dividende 24, il y a 4 de reſte, il faut qu'en ajoutant le reſte 4 au produit 20, on retrouve le dividende 24; 4°. puiſqu'en multipliant 5 par 3, le produit 15 contient évidemment le multiplicande 5 trois fois, c'eſt-à-dire, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur, ſi on diviſe le produit par le multiplicande, on doit retrouver le multiplicateur au quotient: en effet, en diviſant 15 par 5, on a 3 pour quotient. On voit auſſi qu'en diviſant le produit 15 par le multiplicateur, on aura le multiplicande 5, & c'eſt en cela que conſiſte la preuve de la multiplication.

PROBLEME. *Diviſer un nombre par un plus petit.* Ecrivez le diviſeur à la droite du dividende, en les ſéparant l'un de l'autre par une barre; tirez-en une autre au-deſſous; prenez pour premier membre de diviſion un nombre de chiffres capable de contenir le diviſeur; cherchez combien de fois le diviſeur eſt contenu dans le premier membre dont nous venons de parler: écrivez le quotient, en commençant par la gauche; multipliez enſuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviſeur; ôtez le le produit du premier membre de diviſion; à côté du reſte, ou de o, s'il n'y a point de reſte, deſcendez le chiffre ſuivant du dividende; diviſez le reſte joint au chiffre deſcendu, ou le chiffre deſcendu ſeul, s'il n'y a point de reſte, par le diviſeur; écrivez le réſultat au quotient, & ainſi de ſuite juſqu'à la fin. Si, en opérant ainſi, l'on s'apperçoit que le diviſeur n'eſt pas contenu dans quelqu'un des membres de diviſion qui ſuivent le premier, on mettra o au quotient; & ſi à la fin on trouve

trouve un reste, on l'écrira à part, en le renfermant entre deux crochets, pour l'ajouter au produit du quotient entier par le diviseur.

EXEMPLE I. *Soit proposé de diviser 824 par 4.* Ayant écrit le diviseur à la droite du dividende, comme on le voit ici, je prends 8 pour premier membre de division, & je dis en 8 combien de fois 4, je trouve qu'il y est 2 fois, c'est pourquoi j'écris 2 au quotient; multipliant ensuite le diviseur par le quotient, & retranchant le produit de 8, il reste o, à côté duquel je descends 2; mais, parce que 2 ne contient pas 4, j'écris o au quotient. A côté de 2 je descends 4 pour avoir 24 au troisiéme membre de division: je divise 24 par 4, & j'écris le quotient 6, que je multiplie par le diviseur 4; Le produit 24 étant retranché de 24, il ne reste rien, de sorte que le quotient est exact, & égal à 206.

824	4
8	206
024	

EXEMPLE II. *Soit proposé de diviser 358 par 5.* Je prends 35 pour premier membre de division, parce que le premier chiffre 3 ne contient pas le diviseur; je dis ensuite en 35, combien de fois 5, il y est 7 fois, j'écris 7 au quotient; je multiplie le diviseur 5 par 7, le produit 35 étant retranché de 35, le reste est o; à côté duquel je descends 8, pour dire ensuite, en 8 combien de fois 5, 1 fois, j'écris donc 1 au quotient; & multipliant 5 par 1, je retranche le produit 5 de 8. J'ai un reste 3 que j'écris entre deux crochets, comme vous le voyez ici, ce qui marque que si le dividende eût été plus petit de 3, il auroit contenu le diviseur 71e fois juste.

358	5
35	71 (3)
08	
5	
3	

EXEMPLE III. *Soit proposé maintenant de diviser*

1534 par 23. Ayant disposé le diviseur & le dividende comme à l'ordinaire, je remarque que les deux premiers chiffres du dividende ne contiennent pas le diviseur 23, c'est pourquoi je prends pour premier membre de division les trois premiers chiffres du dividende, & je conçois que le premier chiffre 2 du diviseur répond aux deux premiers du dividende, en cette maniere $\frac{153}{23}$ (ce qui a lieu de même toutes les fois qu'un membre de division contient un chiffre de plus que le diviseur). Je dis ensuite, en 15 combien de fois 2, je trouve qu'il y est 7 fois: je multiplie le diviseur entier par 7, le produit 161 ne peut être soustrait du dividende partiel 153: ainsi je diminue le quotient d'une unité; & comme le produit 138 du diviseur 23 par 6 peut-être ôté du premier membre de division 153, je fais cette soustraction, & je mets 6 au quotient. Je descends 4 à côté du reste 15, & je trouve de même que le second chiffre du quotient est 6: je multiplie encore le diviseur par 6, & je soustrais le produit 138 de 154, pour avoir le reste 16, que j'écris à côté du quotient, comme on le voit ici.

1534	23
1380	66(16)
154	
138	
16	

REMARQUES. 1°. On se sert d'abord seulement du premier chiffre du diviseur pour trouver le quotient; mais, parce qu'il s'agit de trouver combien de fois le diviseur entier est contenu dans le dividende, il faut, avant de mettre un chiffre au quotient, multiplier le diviseur entier par ce chiffre. Si le produit peut être soustrait du dividende partiel, on l'écrira au quotient: si le contraire arrive, on diminuera le quotient d'une, de deux, de trois, &c. unités, jusqu'à ce que le produit

ſoit contenu dans ce dividende ; & ſi le diviſeur ſe trouvoit plus grand que le membre de diviſion ſur lequel on opere, on écriroit o au quotient. 2°. Il eſt bon de paſſer un trait ſur chaque chiffre qu'on abaiſſe, afin de ſe ſouvenir qu'on l'a abaiſſé. 3°. Si un reſte étoit égal, ou plus grand que le diviſeur, ce ſeroit une marque que le diviſeur ſeroit contenu dans ce dividende au moins 1 fois de plus qu'il n'eſt marqué par le quotient, il faudroit donc augmenter ce quotient. 4°. On ne peut jamais mettre plus de 9 au quotient; car ſuppoſons d'abord que le membre de diviſion ſur lequel on opere, contient autant de chiffres que le diviſeur : que ce membre ſoit 99, *par exemple*, qui eſt le plus grand nombre de deux chiffres, & que le diviſeur ſoit 10, qui eſt le plus petit nombre de deux chiffres ; or 99 ne contient pas 10 dix fois, puiſque 10 fois 10 font 100, plus grand que 99. Suppoſons en ſecond lieu que le dividende partiel contienne un chiffre de plus que le diviſeur, de maniere que l'on ait 25 pour diviſeur, & 249 pour dividende partiel, il eſt viſible qu'en augmentant d'une unité ce dividende, on aura 250 : mais alors on ne pourra plus prendre 250 pour dividende partiel, mais ſeulement 25 égal au diviſeur, de ſorte que 249 eſt le plus grand dividende de 3 chiffres par rapport au diviſeur 25 ; or 249 ne contient pas 25 dix fois, puiſque 10 fois 25 valent 250 : donc ſi le premier membre de diviſion contient un chiffre de plus que le diviſeur, on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient. Mais parce que chaque reſte eſt toujours plus petit que le diviſeur, au moins d'une unité, ſi à côté de ce reſte on deſcend o, ce qui le rendra 10 fois plus grand, il s'en faudra encore

au moins de 10 unités que le diviseur n'y soit contenu 10 fois : donc, si à la place de 0 on met 9 (qui est le plus grand chiffre qu'on puisse y mettre) il s'en faudra encore au moins d'une unité que le diviseur ne soit contenu dix fois dans le dividende partiel ; ainsi on ne peut pas mettre plus de 9 au quotient pour quelque membre de division que ce soit.

Soit proposé de diviser 79 par 4. Ayant divisé 7 par 4 , & soustrait le produit 4 (du quotient 1 par le diviseur 4), il reste 3 plus petit d'une unité que le diviseur 4 ; donc si à côté de 3 on mettoit 0 , on auroit 30 , & l'on voit qu'il s'en faut de 10 unités que 30 ne contienne 4 dix fois ; par conséquent si à la place de 0 on met 9 , il s'en faudra d'une unité que le dividende partiel 39 ne contienne 10 fois le diviseur 4.

Pour faire la preuve de la division, on multipliera le diviseur entier par le quotient entier ; à ce produit l'on ajoutera le reste , s'il y en a , & l'on retrouvera le dividende , si l'opération est exacte.

DÉMONSTRATION de la Division. En opérant, ainsi que nous l'avons dit, on trouve combien de fois le diviseur est contenu dans les centaines, dixaines, &c. du dividende ; on trouve donc le vrai quotient cherché.

Pour réduire les petites especes aux grandes : *par exemple*, les sols en livres , on se servira de la division , & l'on divisera le nombre des petites especes , par celui qui désigne combien de fois la grande contient la petite : ainsi, pour savoir combien de toises valent 45 pieds, je divise 45 par 6 ; le quotient 7 & le reste 3 me font voir que 45 pieds valent 7 toises 3 pieds.

S'il y a à la fin du dividende un certain nombre de o, & que le diviseur soit 1 suivi de zeros, on effacera autant de o à la fin du dividende, qu'il y en a au diviseur. Ainsi, pour diviser 22000 par 100, on écrira 220; car, en opérant ainsi, on prendra la centiéme partie du dividende, c'est-à-dire, qu'on rendra le dividende 100 fois plus petit. Si l'on avoit à diviser 3230 par 1000, parce que le diviseur contient plus de o que le dividende, on feroit la division à l'ordinaire.

9. Avant de passer plus loin, nous allons donner l'explication de quelques signes qu'on trouve fréquemment dans les ouvrages de Mathématiques. Le signe + marque l'Addition: ainsi 2 + 3 marque la somme de 2 & de 3, ce signe est appellé *plus*; de sorte que 3 + 5, ou 3 plus 5 font 8. Le signe — marque la Soustraction, on l'appelle *moins*: ainsi 5 — 2, ou 5 moins 2, vaut 3. Le signe = s'appelle signe d'*égalité*: ainsi 5 — 2 = 3 veut dire que 5 — 2 est égal à 3. Le signe × indique la Multiplication; de sorte que 3 × 5 = 15, cela signifie que 3 multiplié par 5 est égal à 15. Le signe < ou > signifie plus petit & plus grand: ainsi 3 < 5, 7 > 2 signifient que 3 est plus petit que 5, & 7 plus grand que 2; en un mot la quantité la plus grande se trouve toujours du côté de l'ouverture, & la plus petite du côté de la pointe du signe.

DES FRACTIONS.

10. Une *fraction* n'est autre chose qu'une ou plusieurs parties de l'unité. On se sert de deux nombres pour exprimer une fraction; l'un s'ap-

pelle le *Dénominateur*, parce qu'il désigne la quatité des parties de l'unité, si ce sont des tiers, *par exemple*, ou des quarts, &c. l'autre est appellé *Numérateur*; il marque le nombre des parties que l'on prend : on écrit le dénominateur au-dessous du numérateur; en séparant l'un de l'autre par une ligne. Si donc je veux exprimer en nombres les deux tiers d'une unité, j'écrirai $\frac{2}{3}$. Il n'est pas difficile de comprendre qu'on peut regarder le numérateur comme un *Dividende*, & le dénominateur comme un *Diviseur*. en effet, supposons que l'unité dont il s'agit, soit un pied, les $\frac{2}{3}$ d'un pied seront la même chose que le tiers de deux pieds, puisque les $\frac{2}{3}$ d'un pied valent 8 pouces, aussi bien que le $\frac{1}{3}$ de deux pieds. De-là il suit que tout reste de division est une fraction : *par exemple*, si l'on divise 23 par 5, on a 4 au quotient, & 3 de reste; or il est visible qu'il faut prendre la cinquiéme partie de ce reste, de sorte que le quotient entier sera $4 + \frac{3}{5}$.

Si deux fractions ont le même dénominateur, la plus grande est celle qui a un plus grand numérateur. En premier lieu il est évident, *par ex.* que $\frac{4}{5} > \frac{3}{5}$; en second lieu, il n'est pas moins évident qu'une fraction sera d'autant plus grande que son numérateur sera plus grand, & son dénominateur plus petit, puisque dans ce cas le numérateur contiendra plus le dénominateur, soit quil le contienne entiérement, ou en partie : mais une fraction est d'autant plus petite, que son dénominateur est plus grand; ainsi $\frac{3}{8} < \frac{3}{7}$: en troisiéme lieu, il est facile de comprendre qu'une fraction restera de même valeur, en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre; car la fraction $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$:

en effet, dans le premier cas on prend deux parties de l'unité, & dans le second on n'en prend qu'une; mais aussi les parties de la seconde fraction sont deux fois plus grandes que celles de la premiere, ce qui donne la même valeur pour les deux fractions. De même la fraction $\frac{6}{9}$ se réduit, en divisant ses deux termes par 3, à la fraction $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, & la fraction $\frac{2}{3}$ devient $\frac{6}{9}$, en multipliant ses deux termes par 3.

Une fraction est plus petite que l'unité, lorsque son numérateur est plus petit que son dénominateur, elle est plus grande que l'unité, si son numérateur est plus grand que son dénominateur: enfin, elle est égale à l'unité, lorsque le numérateur est égal au dénominateur: ainsi $\frac{3}{3} = 1$, $\frac{3}{4} < 1$, & $\frac{4}{3} > 1$. Ce qui est évident.

Pour réduire un entier 5 en fraction, il suffit de regarder l'entier comme le numérateur d'une fraction, dont le dénominateur seroit 1; de sorte que $5 = \frac{5}{1}$; car 1 ne divise ni ne multiplie: mais, si ou vouloit une fraction qui eût un dénominateur donné 3, *par exemple*, on multiplieroit l'entier 5 par 3, pour avoir 15, numérateur de la fraction cherchée, qui seroit $\frac{15}{3} = 5$.

11. PROBLEME. *Réduire deux fractions au même dénominateur.* Soient les deux fractions $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$; multipliant les deux termes de la premiere par le dénominateur 5 de la seconde, j'ai $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ (10); multipliant de même les deux termes de la seconde par le dénominateur 3 de la premiere, j'ai $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$. Il est visible que les fractions réduites sont de même valeur qu'avant la réduction, & de plus, qu'elles sont réduites au même dénominateur, puisque le

dénominateur commun eſt le produit des deux dénominateurs.

COROLLAIRE. Si on vouloit réduire trois, ou un plus grand nombre de fractions au même dénominateur, il ſuffiroit de multiplier les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs de toutes les autres.

12. PROBLEME. *Réduire une fraction à un dénominateur donné : par exemple*, réduire la faction $\frac{3}{5}$ d'une livre, en vingtiémes de la livre, ou en ſols, multipliez les deux termes de la fraction propoſée par le dénominateur donné 20, pour avoir $\frac{3}{5} = \frac{60}{100}$; diviſez enſuite les deux termes de cette derniere fraction par le dénominateur 5 de la fraction donnée, & vous aurez la fraction cherchée $\frac{12}{20} = 12ſ.$

COROLLAIRE. Donc, en ſuppoſant la fraction donnée, réduite à ſa plus ſimple expreſſion, ou à ſes moindres termes, la réduction, dont nous parlons, n'aura lieu que dans le cas que le dénominateur donné ſera diviſible par le dénominateur de la propoſée : ainſi la fraction $\frac{2}{3}$ ne peut pas ſe réduire à une fraction, dont le dénominateur ſeroit 5, parce que 5 n'eſt pas diviſible par 3 ; en effet, en ſuivant la méthode du problême, on aura d'abord $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$; diviſant les deux termes de cette derniere fraction par 3, on aura 15 diviſé par $3 = 5$; mais 10 n'étant pas diviſible par 3, on ne pourra pas parvenir au réſultat cherché.

13. PROBLEME. *Réduire une fraction à ſa plus ſimple expreſſion.* Diviſez les deux termes de la fraction par leur plus grand commun diviſeur ; la fraction qui en réſultera, ſera réduite à ſa plus ſimple expreſſion : ainſi la fraction $\frac{10}{15}$ ſera réduite

à ſes plus petits termes, en diviſant ſes deux termes par 5, ce qui donnera $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$.

14. PROBLEME. *Trouver le plus grand commun diviſeur de deux nombres.* Diviſez le plus grand par le plus petit; ſi la diviſion eſt ſans reſte, le plus petit ſera le plus grand commun diviſeur cherché; s'il y a un reſte, diviſez le plus petit nombre par le reſte; ſi la diviſion eſt exacte, ce reſte ſera le plus grand diviſeur cherché; s'il y a un ſecond reſte, diviſez le premier reſte par le ſecond, & ainſi ſucceſſivement, le dernier reſte, qui diviſera exactement le reſte précédent ſera le plus grand diviſeur cherché. Si le dernier reſte eſt 1, c'eſt une marque que les deux nombres n'ont d'autre diviſeur commun que l'unité, dans ce cas on les appelle *premiers entr'eux*: ainſi 2 & 3 ſont premiers entr'eux.

EXEMPLE. *Pour avoir le plus grand diviſeur de 10 & de 15.* Je diviſe 15 par 10, le quotient eſt 1 avec un reſte 5; je diviſe 10 par le reſte 5, le quotient eſt exact: donc 5 eſt le plus grand diviſeur de 10 & de 15. En effet, puiſque 5 diviſe 10, il diviſera auſſi $10 + 5 = 15$: or 5 eſt le plus grand nombre qui puiſſe diviſer 10 & 15, ou 10 & $10 + 5$: donc, &c.

15. PROBLEME. *Ajouter enſemble les fractions* $\frac{3}{5}, \frac{2}{3}$; les ayant réduites au même dénominateur (11), nous aurons à ajouter enſemble les fractions $\frac{9}{15}$ & $\frac{10}{15}$; or $\frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{19}{15} = 1 + \frac{4}{15}$; c'eſt-à-dire, que, pour avoir la ſomme d'un nombre quelconque de fractions, on doit les réduire au même dénominateur, ſi elles en ont de différens, prendre la ſomme des numérateurs; & lui donner pour dénominateur le dénominateur commun.

COROLLAIRE. Pour ajouter un entier à une fraction, on réduira l'entier à une fraction de même dénominateur (10) que la fraction donnée, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire. Si on vouloit ajouter un entier plus une fraction à un autre entier plus une autre fraction, on réduiroit le premier entier & sa fraction à une seule fraction de même dénominateur; on feroit la même réduction pour le second entier & sa fraction, l'on auroit ensuite à ajouter deux fractions, ce que nous savons déja faire : ainsi, pour ajouter $2 + \frac{2}{3}$ à $3 + \frac{1}{2}$, je réduis la premiere quantité à $\frac{6}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$, & la seconde à $\frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$; & j'ai ensuite à ajouter $\frac{8}{3}$ avec $\frac{7}{2}$, ce qui, en réduisant au même dénominateur, donne $\frac{16}{6} + \frac{21}{6} = \frac{37}{6}$.

16. PROBLEME. *Soustraire une fraction d'une autre fraction.* Soit $\frac{2}{5}$ à soustraire de $\frac{4}{5}$, on aura $\frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{4-2}{5} = \frac{2}{5}$; c'est-à-dire, que, pour soustraire une fraction d'une autre fraction de même dénominateur, on prendra la différence des numérateurs, qu'on divisera par le dénominateur commun. Si les fractions ne sont pas de même dénominateur, on les y réduira, & l'on opérera ensuite comme nous venons de le dire. Pour soustraire une fraction d'un entier, on réduira l'entier en une fraction de même dénominateur que la fraction à soustraire, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire : ainsi $5 - \frac{2}{3} = \frac{15}{3} - \frac{2}{3} = \frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$.

Si on vouloit soustraire un entier joint à une fraction d'un autre entier joint à une autre fraction, on réduiroit d'abord le premier entier & sa fraction en une seule fraction de même dénominateur; on feroit la même chose pour le second entier & sa fraction; l'on auroit ensuite une fraction

à soustraire d'une autre fraction : opération qui n'a maintenant aucune difficulté.

17. PROBLEME. *Multiplier une fraction par une fraction.* Multipliez le numérateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le numérateur du produit ; multipliez ensuite le dénominateur du multiplicande par celui du multiplicateur, vous aurez le dénominateur du produit : *par exemple*, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$: en effet, si j'avois à multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, je prendrois $\frac{2}{3}$ quatre fois, ce qui donneroit $\frac{8}{3}$; or je ne dois pas multiplier $\frac{2}{3}$ par 4, mais par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, par la cinquiéme partie de quatre ; j'ai donc multiplié par un nombre 5 fois trop grand, & le produit $\frac{8}{3}$ est 5 fois trop grand ; pour le rendre 5 fois plus petit, je rends le dénominateur 5 fois plus grand, ou, ce qui revient au même, je multiplie le dénominateur par 5, & le vrai produit cherché est $= \frac{8}{15}$.

Il est aisé de voir ; 1°. que, pour multiplier une fraction par un entier, ou un entier par une fraction, il suffit de multiplier le numérateur de la fraction par l'entier : ainsi $3 \times \frac{2}{5}$, ou $\frac{3}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5} = \frac{2}{5} \times 3$: 2°. que, pour multiplier un entier joint à une fraction, il suffit de réduire le multiplicande à une seule fraction ; on fait la même chose pour le multiplicateur, lorsque celui-ci est un entier joint à une fraction, pour opérer ensuite, comme nous venons de le dire ; 3°. que, pour réduire une fraction de fraction à une fraction, il faut se servir de la multiplication : pour savoir combien valent, *par exemple*, les $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$ d'un écu, il faut multiplier $\frac{4}{5}$ par $\frac{3}{7}$, le produit $\frac{12}{35}$ donnera les $\frac{3}{7}$ de $\frac{4}{5}$ d'un écu, & ce produit étant multiplié par $\frac{2}{3}$ donnera $\frac{24}{105}$ d'un écu ; 4°. que le produit d'une fraction

par une autre fraction plus petite que l'unité, doit être plus petit que le multiplicande; puisque, si l'on doit multiplier par $\frac{2}{3}$, *par exemple*, on doit seulement prendre les $\frac{2}{3}$ du multiplicande.

18. PROBLEME. *Diviser la fraction* $\frac{2}{3}$ *par la fraction* $\frac{4}{5}$. Multipliez le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, pour avoir le numérateur du quotient; multipliez ensuite le dénominateur du dividende par le numérateur du diviseur, vous aurez le dénominateur du quotient, qui sera $= \frac{10}{12}$: en effet, pour diviser $\frac{2}{3}$ par 4, ou, pour prendre le $\frac{1}{4}$ de $\frac{2}{3}$, il faudroit trouver une fraction 4 fois plus petite que $\frac{2}{3}$; mais on rendroit la fraction $\frac{2}{3}$ quatre fois plus petite, en multipliant son dénominateur par 4, ce qui donneroit $\frac{2}{12}$; or ce n'est pas par 4 qu'on doit diviser, mais par $\frac{4}{5}$, c'est-à-dire, par la cinquiéme partie de 4; donc le diviseur, dont on s'est servi, étant 5 fois trop grand, le quotient est 5 fois trop petit; on doit donc le rendre 5 fois plus grand, ce qu'on fera en multipliant le numérateur 2 par 5, pour avoir $\frac{10}{12}$, vrai quotient cherché.

19. REMARQUE. Pour diviser une fraction $\frac{2}{5}$, *par exemple*, par un entier 3, on supposera $3 = \frac{3}{1}$, & l'on aura une fraction à diviser par une autre fraction. Dans l'exemple proposé le quotient est $\frac{2}{15}$; & l'on trouveroit la même chose, en se contentant de multiplier le dénominateur du dividende par l'entier. Si l'on avoit un entier joint à une fraction à diviser par un entier, ou par un entier joint à une fraction, on réduiroit le dividende & le diviseur chacun à une seule fraction, & l'on opéreroit ensuite comme nous venons de le dire.

DES FRACTIONS DÉCIMALES.

20. *Les Fractions décimales sont des fractions qui ont pour dénominateur l'unité suivie d'un ou de plusieurs zeros.* Ainsi $\frac{3}{10}$, $\frac{35}{100}$ sont des fractions décimales. Pour simplifier, on n'exprime pas le dénominateur ; & quand il y a des entiers joints aux fractions, on les en sépare par un point, ou par une virgule. *Par exemple*, $25 + \frac{3}{10}$ s'écrit ainsi, $25 \cdot 3$, ou $25, 3$; de même $25 + \frac{32}{100} = 25 \cdot 32$, de même $7 + \frac{3002}{10000} = 7 \cdot 3002$. La fraction $\frac{3}{10}$ s'exprime ainsi, $0 \cdot 3$; la fraction $\frac{35}{100}$ s'exprime ainsi, $0 \cdot 35$, en mettant 0 à la place des entiers. Il est facile de voir que le premier chiffre après le point représente des dixiémes, le second des centiémes, &c. car, *par exemple*, la fraction $0 \cdot 352 = \frac{352}{1000} = \frac{300}{1000} + \frac{50}{1000} + \frac{2}{1000} = \frac{3}{10} + \frac{5}{100} + \frac{2}{1000}$; puisque, en effaçant le même nombre de 0 au numérateur & au dénominateur d'une fraction, on divise ses deux termes par un même nombre, ce qui laisse la fraction de même valeur (10). Il suit de-là; 1°. que la fraction $\frac{3}{10} = \frac{300}{1000}$, ou que $0 \cdot 3 = 0 \cdot 300$, ou qu'en général, une fraction décimale reste de même valeur, quelque nombre de 0 qu'on ajoute au numérateur de cette fraction ; 2°. que si les dixiémes, ou les centiémes, &c. manquent, on doit mettre des 0 à la place des chiffres qui manquent : ainsi $\frac{23}{10000} = 0 \cdot 0023$, parce que les dixiémes & les centiémes manquent *.

* Avec un peu d'attention, il est aisé de s'appercevoir que la valeur des chiffres qui sont à la droite du point, va en diminuant, en proportion décuple, en allant de gauche à droite, & que les fractions décimales sont des fractions, dont le dénominateur (sous-entendu) est l'unité suivie d'autant de zeros,

PROBLEME. *Réduire une fraction ordinaire en une fraction décimale.* Soit, *par exemple*, la fraction $\frac{3}{5}$ à réduire en une fraction décimale. Ajoutez un o au numérateur *, & divisez ensuite le numérateur par le dénominateur, vous aurez la premiere décimale du quotient; continuez de même s'il y a un reste, en ajoutant un o à ce reste, & ainsi de suite, & vous aurez de nouvelles décimales. Ajoutant donc un o à 3, j'ai 30 que je divise par 5, le quotient est *6*; donc o · *6* est le vrai quotient cherché. En effet le dividende 3 ayant été multiplié par 10, le quotient de 30 divisé par 5 est 10 fois trop grand: donc on doit le diviser par 10 pour avoir $\frac{6}{10}$ = o · *6*. Soit la fraction $\frac{2}{3}$ qu'on veut réduire en fraction décimale; j'ajoute o à 2, pour avoir 20 que je divise par 3, le quotient *6* est une premiere décimale. Je multiplie le diviseur par le quotient, ôtant le produit 18 du dividende, il reste 2, auquel ajoutant o, & divisant de même par 3, j'ai encore *6* pour quotient; & continuant de même, je trouve toujours *6* pour quotient, de sorte qu'il est impossible d'avoir une fraction décimale terminée, qui exprime la valeur de $\frac{2}{3}$.

o · *666*, &c.

On connoît qu'il est impossible de trouver une fraction décimale exacte, lorsqu'on voit reparoître les mêmes chiffres du quotient, & dans le même ordre; or les mêmes chiffres reparoissent dans ce cas, pour le plus tard, au rang désigné par le dénominateur de la fraction: *par exemple*, si on vouloit réduire en fraction décimale la fraction $\frac{4}{7}$,

qu'il y a de chiffres après le point; lesquels chiffres forment le numérateur.

* C'est comme si on multiplioit le numérateur par 10.

on auroit o · 571428, & ensuite 571 &c. l'infini.

On peut voir maintenant que, quand après une division il y a un reste, pour avoir un quotient plus exact, il faut ajouter au quotient ce reste réduit en décimales : *par exemple*, si j'ai à diviser 32 par 7, le quotient sera 4 avec un reste $\frac{4}{7}$, ou 4·571 &c.

Quand on n'a pas besoin d'une si grande précision, on peut négliger les milliémes, & quelquefois même les centiémes : ainsi, dans l'exemple précédent, si on n'a pas besoin d'une grande précision, on peut supposer $\frac{32}{7} = 4 \cdot 57$, ou 4·6, en augmentant d'une unité le dernier chiffre qu'on ne néglige pas, ce que l'on fait toutes les fois que les deux chiffres suivans surpassent 50 *; en effet o · 071 valent plus de la moitié d'un dixiéme : ainsi, en augmentant le chiffre 5 d'une unité, l'erreur est moins considérable que si on ne faisoit pas cette augmentation. Au reste, en négligeant un nombre de chiffres quelconque, l'erreur n'est jamais égale à l'unité du dernier chiffre qu'on ne néglige pas; *par exemple*, si j'ai la fraction décimale 5 · 3999 &c. à l'infini, en négligeant tous les chiffres qui suivent 3, j'aurai 5 · 3; or o · 3 $= \frac{3}{10}$, & o · 0999 $= \frac{999}{10000} < \frac{1}{10}$, puisqu'en ajoutant 1 à 999, j'aurai $\frac{1000}{10000} = \frac{1}{10}$; le même raisonnement a lieu, quelque nombre de chiffres qu'on néglige.

PROBLEME. *Ajouter & soustraire les fractions décimales.* Soient les fractions décimales 35 · 702, 303 · 7, 2 · 25, dont on demande la somme, écrivez ces fractions, ensorte que les unités soient sous les unités, les dixaines sous les dixaines, &c. les dixiémes sous les dixiémes, &c. opérez ensuite, en allant de

* La même chose a lieu, si on négligeoit un seul chiffre > 5.

droite à gauche, comme pour les nombres entiers. Ce qui est évident, puisque la valeur des chiffres dans les fractions décimales va en augmentant de droite à gauche en proportion décuple.

35 · 702
303 · 7
2 · 25
341 · 652

Pour soustraire la fraction décimale 25·032 de 32·04, je les dispose de la même maniere, ayant soin de mettre la premiere sous la seconde, comme on le voit ici; mais, parce qu'il n'y a aucun chiffre qui soit correspondant à 2, je suppose o à côté de 4, ce qui, comme nous l'avons dit il n'y a pas long-tems, ne change rien à la valeur de la fraction, faisant ensuite la soustraction à l'ordinaire, j'ai pour reste 7 · 008.

32 · 040
25 · 032
7 · 008

PROBLEME. *Multiplier une fraction décimale par une autre.* Multipliez les deux fractions comme si c'étoient des nombres entiers, en vous souvenant de séparer dans le produit autant de décimales qu'il y en a, tant au multiplicande qu'au multiplicateur: ainsi, pour multiplier 7 · 12 par 2 · 3, je multiplie 712 par 23; le produit est 16376, dans lequel je sépare 3 décimales, parce qu'il y en a deux au multiplicande, & une au multiplicateur; de sorte que le produit cherché est 16 · 376. La raison de ce procédé est facile à appercevoir; car $7 \cdot 12 = \frac{712}{100}$, & $2 \cdot 3 = \frac{23}{10}$; or $\frac{712}{100} \times \frac{23}{10} = \frac{16376}{1000} = 16 \cdot 376$. Si le produit ne renfermoit pas un nombre suffisant de chiffres, il faudroit ajouter vers la gauche autant de o qu'il seroit nécessaire, pour qu'on eût autant de décimales au produit, qu'il y en a tant au multiplicande qu'au multiplicateur: *par exemple*, pour multiplier o · 25 par o · 03, après avoir trouvé le produit 75 de 25 par 3, je m'apperçois que ce produit

duit ne contient que deux chiffres, tandis que je dois avoir 4 décimales : ainſi j'ajoute deux o en cette ſorte, 0 · 0075, & j'ai le vrai produit cherché : en effet $0 \cdot 25 \times 0 \cdot 03 = \frac{25}{100} \times \frac{3}{100} = \frac{75}{10000}$ $= 0 \cdot 0075$.

PROBLEME. *Diviſer une fraction décimale : par exemple, 4 · 444 par une autre fraction décimale 2 · 2.* Diviſez le dividende par le diviſeur, comme ſi c'étoient des nombres entiers ; mais ſéparez dans le quotient autant de décimales qu'il y en a plus au dividende qu'au diviſeur : ainſi, en diviſant 4444 par 22, je trouve pour quotient 202 ; je ſépare 2 décimales, parce qu'il y en a deux de plus au dividende qu'au diviſeur ; de ſorte que le quotient cherché eſt 2 · 02. Pour comprendre la raiſon de cette méthode, on fera attention que $4 \cdot 444 = \frac{4444}{1000}$, & que $2 \cdot 2 = \frac{22}{10}$; la premiere fraction diviſée par la ſeconde, donne $\frac{4444 \times 10}{22 \times 1000}$ (18) $= \frac{4444}{2200}$: or $\frac{4444}{22} =$ 202 ; mais, parce que le véritable diviſeur 2200 eſt cent fois plus grand que 22, le quotient 202 eſt cent fois trop grand, il faut donc le diviſer par 100 pour avoir le vrai quotient $\frac{202}{100} = 2 \cdot 02$.

4444	22
	2 · 02

Remarquez 1°. S'il y a autant de décimales au dividende qu'au diviſeur, le quotient ſera ſans décimales ; 2°. S'il y a moins de décimales au dividende qu'au diviſeur, on doit ajouter au dividende quelques o, pour avoir au moins autant de caracteres au dividende qu'au diviſeur ; & même, ſi l'on veut avoir quelques décimales au quotient, il eſt néceſſaire d'ajouter à la fin du dividende aſſez de o, pour qu'il y ait plus de caracteres au dividende qu'au diviſeur ; 3°. Si, en diviſant une fraction décimale par une autre, ou

par un entier on trouve un reſte, on pourra continuer d'opérer ſur ce reſte comme ſur un reſte de diviſion ordinaire, en ajoutant o à chaque nouveau reſte.

DE L'ÉVALUATION DES FRACTIONS.

21. Si l'on vouloit évaluer la fraction décimale de toiſe o · 72, on multiplieroit cette fraction par 6, pour avoir des pieds, parce que la toiſe vaut 6 pieds, ce qui donneroit 4 · 32 ; c'eſt-à-dire, 4 pieds, plus la fraction o · 32 de pied. Multipliant celle-ci par 12 pour avoir des pouces, je trouve 3 · 84, c'eſt-àdire, trois pouces plus o ·84 de pouce; ainſi la fraction propoſée vaut 4 pieds 3 pouces plus o · 84 de pouce. Pour évaluer la fraction o · 02 de toiſe, je la multiplie par 6, & j'ai o · 12 de pied; multipliant celle-ci par 12, j'ai 1 · 44 de pouce, c'eſt-à-dire, 1 pouce & o · 44 de pouce; en multipliant cette derniere par 12, j'aurois des lignes. Mais pout évaluer la fraction $\frac{3}{5}$ d'un ſol, comme le ſol vaut 12 deniers, on multiplieroit le numérateur 3 par 12, pour avoir $\frac{36}{5}$ de denier, ou $7^d + \frac{1}{5}$ de denier. La fraction $\frac{5}{13}$ de livre deviendra, en multipliant 5 par 20, $\frac{100}{13}$ de ſol $= 7^f + \frac{9}{13}$. Multipliant celle-ci par 12, l'on auroit $\frac{108}{13}$ de denier $= 8^d + \frac{4}{13}$ de denier, de ſorte que la fraction $\frac{5}{13}$ de livre vaut $7^f\ 8^d + \frac{4}{13}$ de denier.

DE LA MULTIPLICATION ET DIVISION des Nombres Complexes.

22. PROBLEME. *On demande combien coûteront 3 toiſes 2 pieds d'une muraille, à* 2 liv. 3 ſ. *la toiſe.* Je réduis les toiſes en pieds, en multipliant 3 par

6, à cause que la toise vaut 6 pieds; au produit 18 j'ajoute 2 pour avoir le nombre total 20 pieds; je réduis les livres en sols, en multipliant 2 par 20; au produit 40 j'ajoute 3, & j'ai 43. En multipliant 43 sols par 20, le produit 860 sols marque combien couteroient 20 pieds, si chaque pied coûtoit 43 sols; mais ce n'est pas le pied qui coûte 43 sols, c'est la toise qui vaut 6 pieds : ainsi le pied ne coûte que la sixiéme partie de 43 sols, & 20 pieds, ou 3 toises 2 pieds ne coûteront aussi que la sixiéme partie de 860 sols : on doit donc diviser 860 par 6, le quotient sera 143 sols avec un reste 2 sols; ce reste vaut 24 deniers, dont la sixiéme partie est 4 deniers; en les ajoutant au quotient, nous aurons 143 sols 4 deniers, ou en réduisant en livres, ce qui se fait en divisant 143 par 20, 7 liv. 3 s. 4 d.

Remarquez 1°. qu'en multipliant 43 sols par 20, on a considéré le multiplicateur comme un nombre pur & abstrait, c'est-à-dire, comme un nombre qui ne contient que des unités simples, & non comme un nombre concret, c'est-à-dire, qui renferme des unités d'une espece déterminée, comme, *par exemple*, des pieds. Car il seroit ridicule de multiplier des sols par des pieds.

2°. Que si on avoit demandé le prix de 20 toises, à 2 liv. 3 sols la toise, on auroit trouvé pour résultat 860 sols, ou 43 liv., & l'on auroit pas eu besoin de faire la division par 6.

3°. Qu'il faut dans ces sortes de questions réduire le multiplicande & le multiplicateur chacun à sa plus petite espece, faire ensuite la multiplication à l'ordinaire, & diviser le produit par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece du multiplicateur contient la petite : ainsi si

le multiplicateur avoit contenu des pouces, on auroit réduit le multiplicateur en pouces : de même si le multiplicande avoit contenu des deniers, on l'auroit réduit en deniers ; après l'opération on auroit divisé le produit par 72, parce que la toise vaut 72 pouces, on auroit ensuite réduit les deniers en sols, & les sols en livres. Quant au multiplicande, c'est la nature seule de la question qui peut le faire connoître. Dans l'exemple proposé il est aisé de voir que le multiplicande est l'argent qu'on cherche au produit.

Seconde Méthode. On réduira chaque nombre à sa plus basse espece ; on multipliera ensuite les fractions qui en résulteront l'une par l'autre, & l'on réduira le produit aux unités, & aux especes établies par l'usage.

EXEMPLE & DÉMONSTRATION. *L'on demande combien coûteront 25 toises 5 pieds 10 pouces, à 3 liv. 10 s. 6 d. la toise.* Je réduis le multiplicande, ou l'argent en deniers, ce qui me donne 846 deniers; mais un denier est la $\frac{1}{240}$ partie de la livre qui vaut 20 sols, & par conséquent 240 deniers : ainsi le multiplicande vaut $\frac{846}{240}$ d'une livre. Je réduis le multiplicateur en pouces, & je trouve 1870 pouces; or le pouce est la 72e partie de la toise; donc le multiplicateur vaut $\frac{1870}{72}$ d'une toise. Multipliant maintenant les numérateurs du multiplicande & du multiplicateur l'un par l'autre, aussi bien que les dénominateurs, le produit cherché est $\frac{1582020}{17280}$, fraction de livre.

Pour réduire donc cette fraction aux especes usitées, ou pour évaluer cette fraction, je divise le numérateur par le dénominateur, & je trouve 91 avec le reste 9540, ou $\frac{9540}{17280}$. Les 91 sont des

unités ou des livres. Pour évaluer le reste qu'on vient de trouver, je multiplie le numérateur 9540 par 20, ce qui réduit ce reste en sols; & divisant le produit 190800 par 17280, je trouve 11 sols avec le reste 720, ou $\frac{720}{17280}$ d'un sol, qu'on réduira en deniers, en multipliant 720 par 12, & divisant le produit 8640 par 17280, ce qui donnera $\frac{8640}{17280}$ qui ne vaut pas un denier (il vaut la moitié d'un denier) : ainsi on pourra le négliger, & le produit cherché sera 91 liv. 11 sols.

23. PROBLEME qui contient la division des nombres complexes. *Deux toises 5 pieds ayant coûté 18 liv. 14 s. quel est le prix de la toise?* Je réduis 18 liv. 14 s. en sols, pour avoir 374 sols; je réduis de même 2 toises 5 pieds en pieds, pour avoir 17 pieds, & divisant 374 par 17, j'ai 22 pour quotient, c'est-à-dire, que chaque pied vaut 22 sols, ou 1 liv. 2 s. mais la toise vaut 6 pieds; donc la toise vaut 6 fois 1 liv. 2 s. ou 6 liv. 12 s.

Il est aisé de remarquer 1°. qu'en divisant par 17, ou en prenant la 17e. partie du dividende, l'on a considéré le diviseur comme un nombre pur, parce qu'il seroit ridicule de diviser des sols par des pieds; en second lieu, qu'après la division on doit multiplier le quotient par le nombre qui exprime combien de fois la grande espece du diviseur contient la petite.

AUTRE EXEMPLE. *Deux toises 5 pieds ayant coûté 18 liv. 15 s. quel sera le prix de la toise?* Dix-huit livres quinze sols valent 375, qu'il faudra diviser par 17 pieds = 2 toises 5 pieds, le quotient sera 22 avec 1 de reste, qui donnera la fraction $\frac{1}{17}$, de sorte que le quotient entier sera 22 s. + $\frac{1}{17}$ de sols, qui, étant multiplié par 6, donnera 132 s. plus

$\frac{6}{17}$ de sol = 6 liv. 12 s. 4 d. + $\frac{4}{17}$ deniers, en évaluant en deniers la fraction $\frac{6}{17}$ de sol.

On pourra trouver le même résultat par la méthode suivante; pour cela on n'a qu'à multiplier le dividende par le nombre qui désigne combien de fois la grande espece du diviseur contient la petite, & diviser le produit par le diviseur. Ayant donc multiplié 375 par 6, je divise le produit 2250 par 17, & j'ai pour quotient 132 sols + $\frac{6}{17}$ = 6 liv. 12 s. 4. d. en négligeant la fraction $\frac{4}{17}$ qui ne vaut pas le quart d'un denier.

Troisiéme méthode. Cette méthode consiste à réduire le dividende & le diviseur en fraction, pour faire ensuite la division à l'ordinaire : l'exemple suivant suffira pour la faire comprendre.

PROBLEME. *Vingt-cinq toises 5 pieds 10 pouces ayant coûté* 91 liv. 11 s. *quel sera le prix de la toise?* Il est visible qu'il faut diviser 91 liv. 11 s. par 25 toises 5 pieds 10 pouces, & que le quotient donnera le résultat cherché. Réduisant le dividende en une fraction de livre, & le diviseur en une fraction de toise, & faisant attention qu'un sol est un $\frac{1}{20}$ de livre, qu'une livre est = $\frac{20}{20}$ de livre, & qu'un pouce vaut $\frac{1}{72}$ de toise, on aura à diviser $\frac{1831}{20}$ par $\frac{1870}{72}$, le quotient donnera $\frac{131832}{37400}$, fraction de livre, qui, étant évaluée, donne 3 liv. 10 s. 5 d. + $\frac{36680}{37400}$ d'un denier.

A l'égard du dividende & du diviseur, c'est la nature de la question qui doit le faire connoître dans les exemples ci-dessus; il étoit évident que l'argent devoit être le dividende, & que l'on cherchoit de l'argent au quotient.

DE L'ALGEBRE.

24. L'*Algebre* n'eſt autre choſe que la ſcience de la grandeur exprimée par des caracteres, dont la ſignification eſt indéterminée : telles ſont les lettres de l'alphabet, qui n'ayant aucune ſignification par elles-mêmes, peuvent repréſenter toutes ſortes de quantités, nombres, mouvemens, &c. Les quantités précédées du ſigne + ſont appellés *poſitives*; celles qui ſont précédées du ſigne — ſont dites *négatives*; elles ne ſont pas moins réelles que les *poſitives*, mais elles ſont priſes dans un ſens oppoſé : *par exemple*, le bien que l'on poſſede étant poſitif, les dettes que l'on a ſeront des quantités négatives. De ſorte que ſi l'on poſſede 10000 liv. & qu'on doive 2000 liv. c'eſt comme ſi l'on avoit + 10000 liv. — 2000 liv. = + 8000 liv.

Sur quoi l'on peut remarquer que les quantités négatives détruiſent les poſitives ; ici, *par exemple*, la dette — 2000 liv. a détruit + 2000 liv. or, ſi on ajoutoit 0 à + 10000 liv. on auroit 0 + 10000 liv. = 10000 liv. donc une quantité négative, quant à ſon effet ſeulement, & non abſolument en elle-même, eſt plus petite que 0, puiſque 0 ajouté à une quantité poſitive, ne la diminue pas comme fait la quantité négative.

Les quantités qui n'ont aucun ſigne, ſont cenſées précédées du ſigne +, & ſont par conſéquent *poſitives* : ainſi $+b = b$, $a = +a$: mais le ſigne — n'eſt jamais ſous-entendu. Pour marquer qu'une quantité a eſt multipliée par une quantité b, on écrit l'une à côté de l'autre, ou bien on met un point entre deux, ou, encore, on indique le produit par le ſigne $\times$; de ſorte que le produit de a

par $b = a \times b = a \cdot b = ab$; donc si $a = 3$ & $b = 5$, on aura $ab = 3 \times 5 = 15$: si $a = 7$ & $b = 10$, on aura $ab = 70$. Pour multiplier a par a, on écrit aa, ou a^2 ; pour multiplier a par aa, ou par a^2, on écrit a^3. Le chiffre 2 marque dans le premier cas que a doit être écrit 2 fois, le chiffre 3, dans le second cas, exprime le nombre de fois qu'on doit écrire a ; de sorte que si $a = 3$, on aura $aaa = a^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$; car $3 \times 3 = 9$, & $9 \times 3 = 27$; de même, $a^7 = aaaaaaa$. Lorsqu'on veut prendre une lettre a un certain nombre de fois, *par exemple*, 5 fois, on écrit 5 devant a, en cette maniere, $5a$; pour prendre a deux fois, j'écris $2a$. Les chiffres qui sont à la gauche des lettres, sont appellés *coefficiens* ; *par exemple*, dans l'expression $5a$, 5 est le coefficient de a. Les chiffres qui sont à la droite, sont appellés *exposans*. Si une lettre n'a point de coefficient, l'unité est censée son coefficient ; de sorte que $a = 1a$. Comme aussi quand une lettre n'a pas d'exposant exprimé, l'unité est censée son exposant ; ainsi $a = a^1 = 1a^1$. Il y a une grande différence entre l'*exposant* & le *coefficient*, *par exemple*, $2a$ est une quantité bien différente de a^2 ; car supposons $a = 5$, on aura $2a = 2$ fois $5 = 10$; mais $a^2 = aa = a \times a = 5 \times 5 = 25$: de sorte que $2a$ marque la somme de a & de a, & a^2 indique le produit de a par a (l'exposant doit être un peu au-dessus de la lettre qu'il affecte).

Les quantités qui ne sont pas jointes à d'autres quantités par le signe + ou — sont appellées *monomes* : telles sont les quantités $+ 5a$, $+ ab$, $7ad$; mais, si deux quantités sont jointes ensemble par les signes + ou —, on a ce qu'on appelle un *bi-*

nome : $a + d$, $2a - 3cd$ font des binomes. Si trois quantités sont jointes ensemble par le signe + ou —, l'on a un *trinome* ; un *quatrinome*, s'il y en a 4, &c. En général on appelle *polinome* l'assemblage de plusieurs quantités jointes ensemble par les signes + ou — ; chacune de ces quantités qui composent le polinome, est appellée *terme* : ainsi dans le trinome $a + 3d - 2cd$, a, $3d$, $2cd$ sont des termes.

Les quantités algébriques sont dites *semblables*, lorsque ces quantités contiennent les mêmes lettres, ni plus ni moins écrites le même nombre de fois : ainsi $3a$ & $2a$ sont des quantités semblables aussi bien que $3ad$ & $-5ad$; mais $3a$ & $2a^2$ ne sont pas semblables, parce que $2a^2 = 2aa$, ou parce que a est écrit 2 fois dans l'une, & 1 fois seulement dans l'autre.

25. PROBLEME. *Etant donné un polinome qui contienne des termes semblables, faire la réduction.* Si les quantités semblables ont le même signe, ajoutez leurs coefficiens ; si elles ont des signes différens, ôtez le plus petit coefficient du plus grand, écrivez ensuite la somme ou la différence de ces quantités, & la réduction sera faite. *Par exemple*, dans le trinome $2a + 2d + 5a$, les termes $2a$ & $5a$ étant semblables, j'ajoute 2 avec 5, & j'ai la somme $7a$; de sorte que le trinome proposé se réduit à la quantité $7a + 2d$. Si j'avois $a + d + 2a$, j'ajouterois 2 avec 1 (coefficient sous-entendu de a), pour avoir $3a + d$. Si j'avois le trinome $2a + d - 7a$, je retrancherois 2 de 7, pour avoir $d - 5a$. Il est visible que quand les quantités semblables ont différens signes, & des coefficiens égaux, elles se détruisent : ainsi $2a + d - 2a = d$; s'il y avoit plusieurs quantités semblables, les unes *po-*

ſitives, les autres *négatives*, on prendroit la ſomme des coefficiens des poſitivès, on feroit la même choſe pour les négatives, l'on retrancheroit la plus plus petite ſomme de la plus grande, pour écrire le reſte avec le ſigne de la plus grande ſomme. Ainſi, pour faire la réduction des termes ſemblables du quintinome $3a + d - 2a - 3d + 7a$, je prends la ſomme 10 des coefficiens des a poſitifs, de laquelle je rettanche 2, coefficient de la quantité négative $-2a$, j'ôte enſuite le coefficient 1 de d du coefficient 3 de $-3d$, & j'ai, toute réduction faite, la quantité $8a - 2d$.

26. PROBLEME. *Ajouter & ſouſtraire les quantiés algébriques.* Pour ajouter la quantité b à la quantité c, on écrira $b + c$; pour ajouter enſemble b & $-d$, on écrit $b - d$, c'eſt-à-dire, que l'on ajoute les quantités algébriques, en les écrivant les unes à côté des autres avec leurs ſignes. On voit facilement que $b + c$ eſt la ſomme de b & de c : on ne voit pas avec la même facilité que $b - d$ ſoit la ſomme de b & de $-d$, mais il ne faut pas confondre augmenter avec ajouter; quand un homme ajoute une dette de 1000 liv. à ſon bien que je ſuppoſe de 10000 liv. il diminue réellement ſon bien de 1000 liv. ainſi l'on ne doit pas être ſurpris ſi $b - d < b$.

Pour ſouſtraire une quantité algébrique d'une autre, il faut ſeulement changer le ſigne de la quantité qu'on ſouſtrait: *par exemple*, ſi de $+5a$, je veux ſouſtraire $+2a$, j'écrirai $5a - 2a = 3a$; de même pour ſouſtraire 5 de 12, j'écris $12 - 5 = 7$. Mais pour ſouſtraire $7 - 2$ de 12, j'écris $12 - 7 + 2 = 7$: car, ſi j'écrivois ſeulement $12 - 7$, j'ôterois 2 de trop, puiſque je ne veux pas ſouſ-

traire 7, mais seulement $7-2$, ou 5; donc, après avoir écrit $12-7$, je dois ajouter $+2$ pour avoir la différence cherchée $=7$, comme cela doit être. La raison pour laquelle on change le signe — en +, est facile à saisir, c'est qu'on ne peut soustraire une quantité négative, qu'en ajoutant une quantité positive, comme on ne peut soustraire une quantité positive qu'en introduisant une quantité négative : ainsi, pour soustraire la quantité $-d$ de la quantité $a-d$, il faut écrire $a-d+d=a$, autrement on ne soustrairoit pas $-d$.

27. PROBLEME. *Multiplier les quantités algébriques les unes par les autres.* Pour multiplier a par b, on écrit, ainsi que nous l'avons déjà dit, a à côté de b pour avoir le produit ab. Si on avoit $2a$ à multiplier par d, on écriroit $2ad$: en effet le produit de a par d, étant ad, il est évident que, si le multiplicande devient double de ce qu'il étoit, le produit sera aussi double : donc $2a \times d = 2ad$, mais, si le multiplicateur devenoit triple de ce qu'il étoit, le produit devroit être triple : donc $2a \times 3d = 6ad$: donc il faut dans la multiplication algébrique multiplier les coefficiens l'un par l'autre, en se souvenant qu'un terme qui n'a point de coefficient exprimé a l'unité pour coefficient : c'est d'ailleurs ce qui est évident; car les coefficiens sont des nombres, & par conséquent on doit dans leur multiplication suivre les regles de la multiplication des nombres. Si on avoit à multiplier b^1 par $b^2 = bb$, on écriroit b^3, en ajoutant l'exposant 1 du multiplicande, avec l'exposant 2 du multiplicateur : ainsi $d \times d^3 = d^4$, en se souvenant que l'exposant de d est 1 : en effet $d^3 = ddd$; or $d \times ddd = dddd = d^4$. Donc, pour multiplier une lettre par la même

lettre, il suffit d'ajouter à l'exposant du multicande celui du multiplicateur, & de donner à cette lettre un exposant égal à la somme des deux exposans : ainsi $a^7 \times a^5 = a^{12}$.

Pour trouver les regles des signes, soit proposé de multiplier $5 - 2$ par $4 - 2$, je multiplie d'abord 5 par 4 (en algébre on commence la multiplication par la gauche), le produit est 20, que j'écris comme on le voit ;

$$\begin{array}{r} 5 - 2 \\ 4 - 2 \\ \hline 20 - 8 - 10 + 4 = 6 \end{array}$$

mais, parce que je ne dois pas multiplier 5 par 4, mais seulement 5 diminué de 2, ou $5 - 2$, j'ai pris 2 quatre fois de trop, de sorte que le produit 20 est trop grand de 8 ; donc je dois le diminuer de cette quantité, en écrivant $- 8$ à côté : de sorte que $20 - 8 = 12$ est le produit de $5 - 2$ ou de 3 par 4. Je remarque maintenant que je ne devois pas multiplier $5 - 2$ par 4, mais seulement par 4 diminué de 2 ou par 2 ; j'ai donc pris $5 - 2$ deux fois de trop. Pour détruire cette erreur, je multiplie $5 - 2$ par 2 le produit est $10 - 4$, que je retranche de $20 - 8$, pour avoir $20 - 8 - 10 + 4 = 6$, vrai produit.

COROLLAIRE. De-là il suit que $+ \times +$, ou $- \times - = +$, & que $+ \times -$, ou $- \times + = -$, car 20 résulte de la multiplication de $+ 5 \times + 4$, $- 8$ résulte de $- 2 \times + 4$, $- 10$ résulte de $+ 5 \times - 2$, & $+ 4$ résulte de $- 2 \times - 2$. Donc, lorsque le signe du multiplicande est le même que celui du multiplicateur, le produit doit avoir le signe $+$; mais il aura le signe $-$, si le signe du multiplicande est différent de celui du multiplicateur ; d'ailleurs, lorsque le multiplicateur a le signe $+$, on prend le multiplicande autant de fois qu'il

y a d'unités dans le multiplicateur : ainsi le produit est égal au multiplicande pris un certain nombre de fois ; donc $- 2a \times + 3d = - 6ad$: mais pour multiplier par $-$, il faut faire le contraire, c'est-à-dire, qu'il faut retrancher le multiplicande autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur ; par conséquent si le multiplicande est positif, le produit sera composé d'une quantité positive retranchée un certain nombre de fois ; & le produit sera négatif : mais si le multiplicande a le signe $-$, le produit sera composé d'une quantité négative, soustraite un certain nombre de fois : ainsi le produit sera positif. D'autre côté $3 - 3$ étant multiplié par 2, donnera évidemment $6 - 6 = 0$; or $- 3 \times 2 = - 2 \times 3$, visiblement : donc $3 - 3 = 0$ étant multiplié par $- 2$ dennera $- 6 + 6 = 0$: donc, &c.

EXEMPLE. *Soit proposé de multiplier* $3a^2x + 2p$ *par* $a - 2x$. Ayant écrit le multiplicateur au-dessous du multiplicande, je multiplie le premier terme $3a^2x$ du multiplicande par le premier terme a du multiplicateur, & j'écris le produit $3a^3x$; je multiplie de même le second terme du multiplicande par le premier du multiplicateur, ce qui me donne $+ 2ap$, en multipliant d'abord 2 par le coefficient 1 de a, & ensuite p par a ; je multiplie de nouveau le multiplicande entier par $- 2x$, second terme du multiplicateur, & j'écris de suite les produits $- 6a^2x^2$, $- 4px$ & j'ai le produit total demandé.

$$\begin{array}{l} 3a^2x + 2p \\ a - 2x. \\ \hline 3a^3x + 2ap - 6a^2x^2 - 4px \end{array}$$

REMARQUES. 1°. Pour multiplier une quantité algébrique par une autre, il faut multiplier tout le

multiplicande par chaque terme du multiplicateur, & ajouter tous les produits pour avoir le produit total. 2°. Il est indifférent de multiplier a par p, ou p par a; car le produit $ap = pa$, par la même raison que $5 \times 4 = 4 \times 5 = 20$. De même $apd = pad$; car $ap = pa$, donc $ap \times d = pa \times d$. Soit $a = 2$, $p = 3$, $d = 4$, on aura $apd = 2 \cdot 3 \cdot 4$ (le point indique la multiplication) $= 3 \cdot 2 \cdot 4$; car $2 \cdot 3 = 6$, & $6 \times 4 = 24 = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot 4 \cdot 2$ · de même $apd = adp = pad = pda = dap = dpa$, de sorte qu'il est indifférent quelle lettre on mette la premiere dans le produit, néanmoins, pour plus de clarté, il est à propos de suivre l'ordre alphabétique; ainsi en multiplicnt $2p$ par a, on écrira $2ap$, & non pas $2pa$. 3°. Quelquefois on se contente d'indiquer la multiplication, sans la faire: ainsi $(a+b) \times (a+d)$ ou $(a+b)(a-d)$ indique qu'il faut multiplier $a + b$ par $a - d$; mais, si on écrivoit $a + b \times (a - d)$ ou $a + b\ (a - d)$, cela signifieroit qu'il faut ajouter à la quantité a le produit de b par $a - d$.

DE LA DIVISION.

28. *Diviser une quantité par une autre, c'est chercher combien de fois la premiere qu'on appelle le* Dividende *contient la seconde, ou le diviseur.* La quantité qui résulte de cette opération est appellée *quotient*. En faisant attention à la nature de la division, on verra aisément qu'en *algébre*, comme en *arithmétique*, le produit du diviseur par le quotient, doit être égal au dividende : donc, si j'ai à diviser ab par a, ce qu'on peut indiquer : ainsi

$\frac{ab}{a}$, en metant le diviſeur ſous le dividende, en forme de fraction, je dis que le quotient ſera b : en effet, s'il étoit différent, en multipliant le diviſeur a par le quotient, le produit ne pourroit pas être égal au dividende ab. De-là il réſulte que pour diviſer un *monome* par un autre *monome*, on doit écrire au quotient les lettres qui ne ſont pas communes au dividende & au diviſeur : ainſi $\frac{ap}{a}$, ou $\frac{pa}{a} = p$, de même $\frac{apd}{a} = pd$, $\frac{apd}{d} = ap$, $\frac{apd}{ad} = p$; en effet en multipliant le diviſeur ad par le quotient p, on retrouve le dividende apd. De même $\frac{a^2}{a} = \frac{aa}{a} = a$, $\frac{a^3}{a^2} = \frac{aaa}{aa} = a$, $\frac{a^5}{a^2} = a^3 = a^{5-2}$, c'eſt-à-dire, que, pour diviſer une lettre par la même lettre, il faut ſouſtraire l'expoſant du diviſeur de celui du dividende ; donc $\frac{a^6}{a^2} = a^4$, $\frac{a^5}{a^5} = a^{5-5} = a^0 = 1$; car, en multipliant le diviſeur a^5 par a^0, on aura par les regles de la multiplication (27.) $a^{5+0} = a^5$; de même en multipliant a^5 par 1, on a $1 \times a^5 = a^5$, de ſorte que $a^0 = 1$; d'où l'on conclut que toute quantité élevée à l'expoſant 0, eſt $= 1$: de plus, parce que toute quantité ſe contient elle-même une fois, il eſt évident que $\frac{a^5}{a^5} = 1$; $\frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; car la fraction $\frac{a^3}{a^5}$ devient (en diviſant ſes deux termes par a^3, ce qui ne change pas ſa valeur) $\frac{1}{a^2}$; mais par les regles de la

division il faut souſtraire l'expoſant 5 du diviſeur de l'expoſant 3 du dividende ; donc $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; d'où l'on peut conclure qu'une quantité élevée à un expoſant négatif, eſt égale à l'unité diviſée par cette même quantité élevée au même expoſant rendu poſitif : ainſi $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (m eſt ici l'expoſant de a) *. A l'égard des coefficiens, comme ce ſont des nombres, on les diviſera à l'ordinaire : ainſi $\frac{6ap}{2a} = \frac{3ap}{a} = 3p$. En effet, en diviſant par 2 le coefficient 6 de ap, on a 3 au quotient ; & en diviſant ap par a, on a le quotient p : d'ailleurs $2a \times 3p = 6ap$ qui eſt le dividende. La regle des ſignes eſt celle-ci : le *quotient doit avoir* $+$, *lorſque les ſignes du dividende & du diviſeur ſont les mêmes ; mais le quotient aura le ſigne* $-$, *ſi les ſignes du dividende & du diviſeur ſont différens* : ainſi $\frac{+ab}{+a} = +b$,

* On peut toujours faire paſſer une quantité du numérateur au dénominateur & réciproquement en changeant le ſigne de ſon expoſant : ainſi $\frac{1}{a^2} = 1a^{-2} = a^{-2}$, de même $\frac{b}{a^{-2}} = ba^2$: en effet, en diviſant $b = \frac{b}{1}$ par $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$; on trouve (par la regle de la diviſion des fractions, ſelon laquelle on a le quotient, en multipliant le numérateur du dividende par le dénominateur du diviſeur, & le dénominateur du dividende par le numérateur du diviſeur ; regle qui a lieu également pour les nombres & pour les quantités algébriques) $\frac{b \cdot a^2}{1 \cdot 1} = \frac{ba^2}{1} = ba^2$. En général, $\frac{b}{a^m} = \frac{ba^{-m}}{1} = ba^{-m}$, & $\frac{b}{a^{-m}} = \frac{ba^m}{1} = ba^m$.

$+b$, $\frac{+ab}{-a} = -b$, $\frac{-ab}{+a} = -b$ & $\frac{-ab}{-a} = +b$, sans quoi le produit du diviseur par le quotient ne seroit pas égal au dividende.

PROBLEME. *Diviser une quantité complexe, c'est-à-dire, une quantité composée de plusieurs termes par une quantité incomplexe, ou monome.* Divisez chaque terme du dividende par le diviseur; écrivez les quotiens les uns à côté des autres avec leurs signes, & vous aurez le quotient entier cherché; ainsi pour diviser $5a^2 - 10ad$ par $5a$; je divise d'abord $5a^2$ par $5a$, le quotient est a, je l'écris sous le diviseur; je divise ensuite $-10ad$ par $5a$, le quotient est $-2d$ que j'écris à côté de a, & j'ai le quotient entier $= a - 2d$: en effet, si on multiplie ce quotient par le diviseur, on aura le dividende.

$$\begin{array}{l|l} 5a^2 - 10ad & 5a \\ \hline & a - 2d \end{array}$$

PROBLEME. *Diviser un polinome par un polinome.* Ordonnez le dividende & le diviseur par rapport à une même lettre, c'est-à-dire, disposez le dividende & le diviseur, de telle maniere que la lettre par rapport à laquelle vous voulez ordonner, se trouve au premier terme avec son plus grand exposant, que le plus haut exposant qui reste se trouve au second terme, & ainsi de suite. Ayant ensuite écrit le diviseur à côté du dividende, comme dans la division des nombres, divisez le premier terme du dividende par le premier du diviseur, écrivez le résultat au quotient, multipliez ensuite le quotient que vous venez d'écrire par le diviseur entier; écrivez le produit sous le dividende, retranchez ce produit du dividende (ce qui se fait en changeant les signes); divisez de même le reste du dividende

s'il y en a (en divisant toujours par le premier terterme du diviseur le terme du dividende qui contient le plus haut exposant de la lettre par rapport à laquelle vous avez ordonné), & ainsi de suite. Soit, *par exemple*, proposé de diviser $a^2 - d^2$ par $d + a$, j'ordonne le diviseur par rapport à la lettre a, car le dividende est tout ordonné ; divisant ensuite a^2 par a, j'écris le quotient a que je multiplie par le diviseur entier $a + d$, j'écris sous le dividende le produit $a^2 + ad$,

$$\begin{array}{rr|l} a^2 & - d^2 & a + d \\ o & & \\ \hline -a^2 \pm ad & & a - d \\ -ad & - d^2 & \\ o & o & \\ -ad & - d^2 & \\ + & + & \end{array}$$

je soustrais ce produit en changeant ses signes, j'écris o sous a^2, qui se trouve détruit par $-a^2$, il me reste $-ad$ que j'écris comme on le voit ici : à côté de ce reste je descends $-d^2$; & divisant $-ad$ par a, je trouve $-d$ que j'écris au quotient ; je multiplie ensuite le diviseur par le quotient $-d$ que je viens d'écrire, le produit est $-ad - d^2$ que j'écris sous le dividende ; je soustrais ce produit en changeant les signes, & j'écris o sous $-ad$, qui est détruit par $+ad$: j'écris de même o sous $-d^2$, qui est détruit par $+d^2$. Si l'on multiplie le diviseur par le quotient $a - d$, on aura $a^2 + ad - ad - d^2 = a^2 - d^2$, en faisant la réduction.

Si la lettre par rapport à laquelle on veut ordonner, se trouvoit avoir le même exposant dans plusieurs termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre.

Lorsqu'il y a des lettres au diviseur qui ne se trouvent pas dans le dividende, l'on ne peut faire la division exactement, dans ce cas on peut se contenter de l'indiquer : ainsi, pour marquer le quo-

tient de a^2 divisé par d, on écrira $\frac{a^2}{d}$; pour diviser ab par cb, on écrira $\frac{ab}{cb} = \frac{a}{c}$, en faisant la division autant qu'on le peut, ce qui est évident, puisque $cb \times \frac{a}{c} = \frac{cab}{c} = ab$: c'est-à-dire, que le produit du diviseur, par le quotient, est égal au dividende: de même $\frac{a+b}{x}$, indique la division de $a+b$ par x.

Voici quelques divisions pour exercer les Commençans, qui, pour se familiariser avec cette opération,

Dividende.	Diviseur.
$x^2 - 2px + p^2$	$x - p$
	$x - p$
	Quotient.

Dividende.	Diviseur.
$x^4 + 4x^2p + 4p^2$	$-x^2 - 2p$
	$-x^2 - 2p$
	Quotient.

peuvent multiplier deux quantités algébriques quelconques l'une par l'autre, en divisant le produit par l'une des deux, ils doivent trouver l'autre au quotient.

29. Avant de passer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver tous les diviseurs d'une quantité quelconque. Soit la quantité $x^3p + x^2p$, dont on demande tous les diviseurs. Je divise d'abord cette quantité par un de ses diviseurs simples

p, le quotient eſt $x^3 + x^2$, que je diviſe par un de ſes diviſeurs ſimples x, pour avoir le quotient $xx + x$, que je puis encore diviſer par x, le quotient eſt $x+1$, que je ne puis plus diviſer que par $x+1$, le quotient eſt 1; de ſorte que les diviſeurs ſimples ſont $p, x, x, x+1$. Les multipliant 2 à 2, & n'écrivant qu'une fois le même produit, j'ai les diviſeurs doubles px, $px+p$, x^2, x^2+x. Les multipliant enſuite, 3 à 3, j'ai les diviſeurs de trois dimenſions px^2, $px^2 + px$, $x^3 + x^2$; enfin les multipliant 4 à 4, j'ai $px^3 + px^2$: de ſorte que les diviſeurs cherchés ſont p, x, $x+1$, px, $px+p$, x^2, x^2+x, px^2, px^2+px, x^3+x^2, px^3+px^2, auxquels on peut joindre l'unité qui eſt un diviſeur de toutes les quantités. La raiſon de ce procédé eſt évidente; car, ſi la quantité propoſée eſt diviſible par p & par x, elle ſera évidemment diviſible par le produit px.

Soit le nombre 30 dont on demande tous les diviſeurs. On eſſayera de diviſer par 2 autant de fois qu'on le pourra, enſuite par 3, enſuite par 5, & ainſi de ſuite par tous les *nombres premiers* (ce ſont ceux qui n'ont d'autre diviſeur que l'unité & eux-mêmes), on multipliera enſuite les différens diviſeurs, deux à deux, enſuite trois à trois, &c. Diviſant donc 30 par 2, le quotient eſt 15, que je ne puis plus diviſer par 2; mais, comme je puis diviſer par 3, je fais la diviſion, & le quotient eſt 5, que je ne puis diviſer que par 5, le quotient eſt 1; de ſorte que les diviſeurs ſimples de 30 ſont 2, 3, 5 : les multipliant deux à deux, j'ai les nouveaux diviſeurs 6, 10, 15; enfin les prenant trois à trois, j'ai 30 : donc les diviſeurs cherchés ſont 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30, j'omets 1 qui eſt diviſeur de tout nombre.

DES FRACTIONS ALGEBRIQUES.

30 *Soit la fraction* $\frac{b}{d}$ *qui indique qu'on a divisé l'unité en un certain nombre de parties désigné par* d, *& que l'on prend un nombre* b *de ces parties.* En se rappellant ce que nous avons dit sur les fractions numériques, on verra aisément qu'en multipliant ses deux termes par x, la fraction restera de même valeur, c'est-à-dire, que $\frac{b}{d} = \frac{bx}{dx}$, de même la fraction $\frac{ab}{ad}$ devient $\frac{b}{d}$, en divisant ses deux termes par une même quantité a. Pour réduire deux fractions $\frac{b}{d}$, $\frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bp}{dp}$, $\frac{dx}{dp}$ qui ont un même dénominateur, & qui d'ailleurs sont de même valeur (voyez les fractions numériques). De même pour réduire les fractions $\frac{b}{d}$, $\frac{c}{g}$, $\frac{x}{p}$ au même dénominateur, on multipliera les deux termes de chacune par le produit des dénominateurs des autres, & l'on aura les nouvelles fractions $\frac{bgp}{dgp}$, $\frac{cpd}{dgp}$, $\frac{dgx}{dgq}$. Pour réduire une fraction $\frac{ba}{ad}$ à sa plus simple expression, on divisera ses deux termes par leur plus grand commun diviseur a, & l'on aura $\frac{b}{d}$ pour la fraction $\frac{ba}{ad}$ réduite à sa plus simple expression.

31. Mais comme il n'est pas toujours facile de trouver le plus grand commun diviseur de deux quantités, nous allons en donner la méthode, après avoir établi le *lemme* suivant.

LEMME. *Si deux quantités* A *plus grande &* B *plus petite sont exactement divisibles par une même quantité* p, *je dis que si, après avoir divisé* A *par* B, *il y a un reste* c, *ce reste sera divisible par* p. Soit le quotient de A divisé par B $= m$; donc A $= m$ B $+ c$; donc, puisque A est exactement divisible par p, m B $+ c$ sera aussi exactement divisible par p; mais B est exactement divisible par p; donc son multiple m B (le produit d'une quantité a par une quantité d est dit *multiple* de a, lorsque le multiplicateur est un nombre entier > 1, & *sous-multiple*, si le multiplicateur est plus petit que l'unité. Ainsi ad est multiple de a, si $d = 3$, *par exemple*, & sous-multiple, si $d = \frac{1}{2}$) sera divisible par p; donc c le sera aussi.

COROLLAIRE. Parce que B & c sont exactement divisibles par p, si on divise B par c, ensorte qu'il y ait un reste d, il suit du lemme précédent que d sera exactement divisible par p. De même on pourra diviser par p le reste e qu'on trouvera en divisant c par d, & ainsi de suite, jusqu'à ce quil ne reste rien.

COROLLAIRE II. Il peut arriver deux cas, ou le dernier reste est égal à p, ou plus grand; car il ne peut être plus petit, puisque tous les restes sont exactement divisibles par p, dans le premier cas p sera le plus commun diviseur de A & de B, puisqu'une plus grande quantité ne sauroit diviser exactement tous les restes, à cause qu'elle ne pourroit diviser exactement le dernier reste qu'on suppose $= p$; dans le second cas p sera visiblement un diviseur commun, puisqu'il divise exactement le der-

nier reste ; mais il ne sera pas le plus grand diviseur, puisque A & B pourront être divisés par le dernier reste.

REMARQUES. Nous avons divisé B par c, & d par c, parce que nous avons supposé que les restes vont en décroissant (ce qui arrive toujours en arithmétique) ; mais, si un reste d étoit plus grand que le reste précédent c, on diviseroit d par c, & le reste seroit également divisible par p, comme il suit du lemme.

Soit maintenant proposé de trouver le plus grand commun diviseur des quantités A & B, *ordonnées par rapport à la lettre* x. Divisez le premier terme de la formule A

A .... $-x^3 + ax^2 - c^2x + ac^2$

m .... $-x^3 + ax^2 - yx^2 + ayx$

C .... $yx^2 + (c^2 + ay) \cdot - x + ac^2$

n .... $yx^2 - ayx + y^2x - ay^2$

d .... $(c^2 + y^2) \cdot - x + ac^2 + ay^2$

	Quotiens.
B ... $-x^2 + (a - y)x + ay$	x
q ... $-x^2 + ax$	$-y$
	x
E ... $-yx + ay$	
p ... $-x + a$	$c^2 + y^2$
K ... $-x + a$	1
0	$c^2 + y^2$

par le premier de la formule B, & ayant multiplié le quotient x par le diviseur, ôtez le produit m de A, pour avoir le reste C, que vous diviserez de la même maniere par B ; retranchez-en le produit n

du diviſeur B, par le quotient $-y$, vous aurez le reſte d. Maintenant comme x a un expoſant moindre dans ce reſte que dans B; renverſez l'ordre, & diviſez B par le reſte d, & retranchez-en q, produit de d par le quotient $\frac{x}{c^2+x^2}$. Le troiſiéme reſte ſera E, qui, étant diviſé par y, qui ſe trouve dans tous ſes termes, donnera p; diviſez p par d, & ôtez-en le produit K de d par $\frac{1}{c^2+y^2}$, le reſte ſera o, de ſorte que p ſera le plus grand commun diviſeur cherché, comme cela ſuit du lemme; mais pour le faire encore mieux concevoir, voici comme je raiſonne. Si p étant diviſé par d, le reſte eſt o : donc p diviſe exactement d (ici le quotient peut être fractionnaire), donc p diviſe auſſi exactement d multiplié par $\frac{x}{c^2+y^2}$, c'eſt-à-dire q, & parce qu'il diviſe E de la même maniere, il diviſera encore exactement q + E ou B, donc il diviſera auſſi le produit de B par $-y$ ou n, auſſi bien que $n+d=C$; mais le produit de B par x, ou m eſt exactement diviſible par p: donc $m+C=$ A l'eſt auſſi; donc A & B ſont exactement diviſés par p; donc p eſt commun diviſeur de A & de B : d'ailleurs il eſt leur plus grand commun diviſeur; car aucune autre quantité ne peut diviſer le dernier reſte, ce que doit cependant faire le commun diviſeur, ainſi que nous l'avons déjà vu.

Si en s'y prenant, comme nous venons de le dire, on ne trouvoit point de commun diviſeur, mais une ſuite infinie de termes, on ordonneroit par rapport à une autre lettre; & ſi, en ordonnant ſucceſſivement par rapport à toutes les lettres du dividende, la même

chose arrivoit, ce seroit une marque que les quantités A & B n'auroient point de commun diviseur.

REMARQUE. Si l'on s'apperçoit que de deux quantités A, B, l'une contient une quantité qui ne puisse pas diviser l'autre, ou qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre, on peut l'effacer sans craindre que le commun diviseur en soit altéré; on fera la même chose, lorsqu'on divisera C par d, &c. On peut de même multiplier l'une des quantités sur lesquelles on opere par une quantité qui n'ait aucun diviseur commun avec l'autre; car le plus grand commun diviseur de ab & de a, étant a, le plus grand diviseur commun de yab & de a, de $\frac{ab}{d}$ & de a sera encore a. Or il arrive souvent que pour diviser une quantité par une autre, on a besoin de multiplier tous les termes de la premiere par une quantité qui ne peut pas exactement diviser la seconde. On pourra donc faire cette multiplication sans altérer le plus grand commun diviseur cherché.

32. Pour ajouter ensemble plusieurs fractions qui ont le même dénominateur, on ajoute leurs numérateurs en conservant le dénominateur; ainsi $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, ce qui est évident, en faisant attention à ce que nous avons dit en parlant des fractions numériques; mais si les fractions qu'on veut ajouter, avoient différens dénominateurs, après les avoir réduites au même dénominateur, on prendroit pour numérateur de la somme, la somme de tous les numérateurs : ainsi $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$.

33. Pour soustraire une fraction d'une autre fraction, on les réduira au même dénominateur, si elles en ont de différens, & l'on prendra pour numérateur de la différence, la différence des numérateurs : ainsi $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-cb}{bd}$.

Si on avoit à soustraire une fraction d'un entier, ou d'un entier joint à une fraction, ou si l'on avoit à soustraire un entier & une fraction d'une fraction jointe à un entier, l'on réduiroit (si la réduction n'étoit pas déja faite) la quantité qu'on veut soustraire, & la quantité dont on veut soustraire chacune à une seule fraction, pour opérer ensuite comme nous venons de le dire.

34. Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on multipliera les numérateurs l'un par l'autre, le produit sera le numérateur du produit des fractions; pour avoir le dénominateur du produit, l'on prendra le produit des deux dénominateurs, & il en sera de même pour un plus grand nombre de fractions; mais si l'on veut multiplier un entier a, *par exemple*, par une fraction, on supposera $a = \frac{a}{1}$, ce qui ne change pas sa valeur, & l'on n'aura plus qu'à multiplier une fraction par une autre fraction : ainsi $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $a \times \frac{c}{d} = \frac{a}{1} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{d}$, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{p}{q} = \frac{acp}{bdq}$.

35. Pour diviser une fraction par une fraction, il faut multiplier le numérateur du dividende par le dénominateur du diviseur, le produit sera le numérateur du quotient; & multipliant ensuite le dénominateur du dividende par le numérateur du di-

viſeur, le produit donnera le dénominateur du quotient : ainſi le quotient de $\frac{c}{d}$ par le diviſeur $\frac{a}{b}$, ſera $\frac{cb}{da}$. Si on propoſoit de diviſer un entier a par une fraction, on ſuppoſeroit $a = \frac{a}{1}$, & pour diviſer un entier joint à une fraction par un entier, ou par un entier joint à une autre fraction, on réduiroit le dividende & le diviſeur chacun en une ſeule fraction : ainſi ces deux derniers cas rentrent dans le premier. Toutes ces regles ſe démontrent comme celles des fractions numériques.

REMARQUE. Après une opération quelconque, Addition, Souſtraction, Multiplication, ou Diviſion, on ne doit pas oublier de faire la réduction des termes ſemblables, s'il y en a.

DE la formation des puiſſances des Monomes & Polinomes, de l'extraction des Racines, du Calcul des radicaux, & des Expoſans.

36. Nous appellons *premiere puiſſance* de a la quantité a elle-même : ainſi la premiere puiſſance de $a = a$; la ſeconde puiſſance de a, ou le produit de a par a, eſt $= a \times a = a^1 \times a^1 = a^2 = aa$; la troiſiéme puiſſance de $a = a^3 = a^{1\times3}$; de même la ſeconde puiſſance de $a^3 = a^3 \times a^3 = a^6 = a^{3\times2}$: d'où l'on peut conclure 1°. que la puiſſance d'une quantité a n'eſt autre choſe que cette quantité multipliée par elle-même un certain nombre de fois. 2°. qu'il faut faire autant de multiplications, moins une, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de la puiſſance. 3°. que pour élever une quantité à une puiſſance donnée, il ſuffit de multiplier l'expoſant

de cette quantité par l'exposant de la puissance : ainsi la troisiéme puissance de $a^2 = a^{2\times 3} = a^6 = a^2 \times a^2 \times a^2$: donc, pour élever $a = a^1$ à la puissance m, on multipliera l'exposant 1 de a par l'exposant m de la puissance, & l'on aura a^m ; & si l'on veut avoir la puissance p de a^n, on multipliera n par p, pour avoir a^{np}. La seconde puissance s'appelle *quarré*, & la troisiéme s'appelle *cube* : ainsi a^2 est le quarré de a, a^3 en est le cube. S'il s'agit d'avoir le quarré d'un nombre, on multipliera ce nombre par lui-même ; *par exemple*, le quarré de 5 est $= 5 \times 5 = 25$, son cube est le produit du quarré 25 par le nombre 5 : voici les quarrés & les cubes de tous les nombres, depuis 1 jusqu'à 10.

Nombres	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Quarrés.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Cubes.	1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.

Si les quantités qu'on veut élever à une puissance entiere & positive étoient complexes, il n'y auroit rien à changer à la méthode : ainsi, pour élever $a+b$ à la seconde puissance ou au quarré, on multipliera $a+b$ par $a+b$, & l'on aura la seconde puissance de $a+b$ qu'on peut indiquer : ainsi $\overline{a+b}^2 = \overline{a+b} \times \overline{a+b} = a^2 + 2ab + b^2$. Le cube de $a+b = \overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$: la puissance quatriéme de $a+b = \overline{a+b}^4$, & enfin la puissance m quelconque de $a+b$ est $= \overline{a+b}^m$. La quantité a, qui, multipliée par elle-même une fois, a donné le quarré a^2, s'appelle la *racine quarrée* de a^2 ; de même bc est la *racine quarrée* de $b^2 c^2$. La racine cubique de a^6 est la quantité a^2, qui, multipliée deux fois par elle-même, a donné le cube

a^6. En général la racine n de a^n est a, parce qu'en multipliant a par lui-même un nombre $n-1$ de fois, on trouve a^n *. Le quarré d'une fraction $\frac{a}{b}$ se trouve en prenant le quarré du numérateur & celui du dénominateur : pour avoir le cube, on prendra le cube du numérateur & celui du dénominateur : ainsi le quarré de $\frac{a}{b}$ est $\frac{a^2}{b^2}$ son cube sera $\frac{a^3}{a^3}$. On voit aussi bien aisément que la racine quarrée de $\frac{a^2}{b^2}$ est $\frac{a}{b}$; que la racine cube de $\frac{a^3}{b^3}$ est $\frac{a}{b}$; de sorte que pour avoir la racine d'une fraction, il faut prendre celle de son numérateur aussi-bien que celle de son dénominateur.

De ce que nous venons de dire, il suit que, pour avoir la racine troisiéme ou cubique de a^6, il suffit de diviser l'exposant 6 de la quantité donnée par l'exposant 3 de la racine ; que pour avoir la racine quarrée de a^4, il suffit de diviser l'exposant 4 par l'exposant 2 de la racine : de sorte que la racine cube de $a^6 = a^{\frac{6}{3}} = a^2$, la racine quarrée de a^4 est $= a^{\frac{4}{2}} = a^2$, ce qui est évident ; & en général, puisque pour élever a^m à la puissance p, il faut multiplier l'exposant m par l'exposant p de la puissance pour trouver a^{mp}, il faudra, pour avoir la racine p de a^{mp}, diviser l'exposant mp par l'exposant de la racine, & on aura $a^{\frac{pm}{p}} = a^m$: donc en général la racine n de $a^m = a^{\frac{m}{n}}$. On marque aussi la racine n de a^m, de cette maniere, $\sqrt[n]{a^m}$; de sorte

* On suppose que n est un nombre entier positif.

que $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$; de même $\sqrt[2]{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$, $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}} = a^2$. Le ſigne $\sqrt{}$ s'appelle *ſigne radical*, & les quantités affectées de ce ſigne, ſont dites *quantités radicales* : ainſi $p\sqrt[3]{bc}$ eſt une quantité radicale. La quantité p qui eſt hors du ſigne, s'appelle *coefficient* du ſigne, & la quantité bc eſt dite être ſous le ſigne. Lorſqu'un radical n'a point de coefficient exprimé, il eſt cenſé avoir l'unité pour coefficient. On appelle *expoſant* du ſigne la quantité qui ſe trouve entre les branches du ſigne ; mais, quand un radical n'a point d'expoſant, il eſt cenſé avoir 2 pour expoſant, de ſorte que $\sqrt[2]{b^4} = \sqrt{b^4} = b^{\frac{4}{2}} = b^2$.

En examinant avec attention ce que nous venons de dire, on verra facilement que l'expoſant du ſigne eſt toujours le diviſeur de l'expoſant de la quantité qui eſt ſous le ſigne.

Il eſt facile d'appercevoir que la racine quarrée de a^2 eſt $= \pm \sqrt{aa} = \pm a$; car $a^2 = + a \times + a$, de même $a^2 = - a \times - a$. ainſi la racine quarrée d'une quantité poſitive eſt toujours double. De même la racine quatriéme de $p^4 = \pm \sqrt[4]{p^4} = \pm p$; car $p^4 = + p \cdot + p \cdot + p \cdot + p$ (le point indique la multiplication) $= - p \cdot - p \cdot - p \cdot - p$. En général une racine d'un degré pair eſt toujours double ; mais $\sqrt{-a^2}$ eſt une quantité impoſſible ; car elle ne peut être ni $+ a$, ni $- a$, puiſque $+ a \times + a = a^2$, de même $- a \times - a = + a^2$: donc la racine de $- a^2$ qu'on marque ainſi $\pm \sqrt{-a^2}$ eſt une quantité abſurde ; de même toutes les racines paires d'une quantité

négative sont impossibles : ainsi $\pm \sqrt[4]{-p^4}$ est une quantité impossible ; ces sortes de quantités sont appellées *imaginaires*.

Si l'on veut changer l'exposant d'un radical, en conservant sa valeur, il faut multiplier par la même quantité l'exposant du radical, & l'exposant de la quantité qui est sous le signe. Ainsi $\sqrt[3]{a^n} = \sqrt[3\times 2]{a^{2\times n}}$; car $\sqrt[3]{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$, & $\sqrt[3\times 2]{a^{2\times n}} = \sqrt[6]{a^{2n}} = a^{\frac{2n}{6}} = a^{\frac{n}{3}}$; si $n = 1$ on aura $\sqrt[3]{a^1} = \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}}$.

Pour réduire deux radicaux au même exposant, sans changer leur valeur, il faut multiplier l'exposant du radical du premier, & l'exposant de la quantité qui est sous le signe par l'exposant du second, & réciproquement; mais, s'il y a plus de deux radicaux, on multipliera l'exposant du signe aussi-bien que l'exposant de la quantité qui est sous le signe d'un chacun par le produit des exposans de tous les autres radicaux, ce qui, comme nous venons de le voir, ne peut changer leur valeur. Ainsi, pour réduire au même exposant les radicaux $a\sqrt[3]{b^1}$, $c\sqrt[2]{d}$, je multiplie l'exposant 3 par 2; de même je multiplie l'exposant 1 de b par 2; je multiplie ensuite l'exposant du second radical par 3, aussi-bien que l'exposant 1 de d, & j'ai les deux radicaux $a\sqrt[6]{b^2}$, $c\sqrt[6]{d^3}$ réduits au même exposant. Les trois radicaux $a\sqrt[n]{b^m}$, $c\sqrt[p]{d^y}$, $\sqrt[x]{g^q}$, réduits au même exposant, se changeront en ceux-ci, $a\sqrt[xpn]{b^{mpx}}$, $\sqrt[npx]{d^{ynx}}$, $\sqrt[npx]{g^{qnp}}$, ce qui est évident.

Pour ajouter deux ou plusieurs radicaux ensemble, réduisez-les au même exposant, s'ils en ont de différens; prenez ensuite leur somme comme si c'étoient des quantités algébriques : ainsi la somme de $a\sqrt[3]{d}$ & de $c\sqrt[3]{d}$ est $= a\sqrt[3]{d} + c\sqrt[3]{d} =$

$(a+c)\cdot\sqrt[3]{d}$, la somme de $a\sqrt[3]{b} + c\sqrt[2]{d}$ est $= a\sqrt[6]{b^2} + c\sqrt[6]{d^3}$, en réduisant au même exposant.

La soustraction des radicaux qui ont un même exposant, se fait comme la soustraction algébrique, en changeant le signe de celui ou de ceux qu'on veut soustraire; mais s'ils ont différens exposans, on les réduit au même exposant, avant de faire la soustraction. Ainsi pour soustraire $a\sqrt{b}$ de $c\sqrt{p}$, on écrira $c\sqrt{p} - a\sqrt{b}$, ce qui est évident; mais $a\sqrt[3]{b} - c\sqrt[5]{d^2}$ est $= a\sqrt[15]{b^5} - c\sqrt[15]{d^6}$.

Pour faire passer un coefficient sous le signe, sans changer la valeur du radical, on élévera le coefficient à l'exposant du signe : ainsi $b\sqrt[3]{d^3} = \sqrt[3]{d^3b^3}$; car $b\sqrt[3]{d^3} = bd^{\frac{3}{3}} = bd$, de même $\sqrt[3]{d^3b^3} = d^{\frac{3}{3}}b^{\frac{3}{3}} = db$. On voit aussi que, pour faire passer hors du signe une quantité qui se trouve sous le signe, il suffit de diviser l'exposant de cette quantité par l'exposant du signe : ainsi $\sqrt[3]{ad^6} = d^2\sqrt[3]{a}$; car $\sqrt[3]{ad^6} = d^2 \times a^{\frac{1}{3}} = d^2\sqrt[3]{a}$. Pour faire entrer dans l'expression d'un radical une quantité d quelconque, il suffit de multiplier la quantité sous le signe par d élevé à l'exposant du signe, en divisant en même tems le coefficient du signe par la même quantité d; car, par cette opération, on ne fait que multiplier & diviser un radical par une même quantité : ainsi $a\sqrt[3]{b} = \frac{a}{d}\sqrt[3]{bd^3}$, $\sqrt[3]{b} = 1\sqrt[3]{b} = \frac{1}{d}\sqrt[3]{bd^3}$: car il est visible; *par exemple*, que $\frac{a}{d}\sqrt[3]{bd^3} = \frac{a}{d}\times b^{\frac{1}{3}}d^{\frac{3}{3}} = \frac{ad}{d}\times b^{\frac{1}{3}} = a\sqrt[3]{b}$.

Pour multiplier les radicaux les uns par les autres, après les avoir réduits au même exposant, s'ils en ont de différens, on multipliera leurs coefficiens les uns par les autres, le produit donnera le coefficient du produit cherché; on multipliera de même les unes par les autres, les quantités sous le signe & leur produit restera sous le signe : ainsi $a\sqrt[3]{b} \times c\sqrt[3]{d} = ac\sqrt[3]{bd}$, $a\sqrt[5]{d} \times \sqrt[5]{c} = a\sqrt[5]{d} \times 1\sqrt[5]{c} = a\sqrt[5]{dc}$, $a\sqrt[n]{p^m}$ ×

$\times\, c \sqrt[m]{q^x} \times d \sqrt[n]{g^y} = acd \sqrt[n]{p^m q^x g^y}$. De même $2\sqrt{4} \times 3\sqrt{9} = 6\sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$; ce qui est évident. Si on veut avoir le produit de $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$, on écrira $-\sqrt{aa} = -a$; puisqu'il est évident que $-a$ est le quarré de $\sqrt{-a}$. Pour ne pas se tromper en multipliant; *par exemple*, les quantités imaginaires $\sqrt{-b}$, $\sqrt{-c}$ l'une par l'autre, on remarquera que $\sqrt{-b} = \sqrt{-1 \, . \, b} = \sqrt{-1} \times \sqrt{b}$, de même $\sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{c}$: donc $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \times \sqrt{b} \times \sqrt{c} = -1 \times \sqrt{bc} = -\sqrt{bc}$, à cause de $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$. En multipliant à l'ordinaire, l'on auroit $\sqrt{-b} \times \sqrt{-c} = \sqrt{bc}$, ce qui est faux.

Pour diviser deux radicaux l'un par l'autre, on les réduira au même exposant, s'ils en ont de différens; on divisera ensuite le coefficient du dividende par celui du diviseur, & la quantité qui est sous le signe dans le dividende par la quantité qui se trouve sous le signe du diviseur: ainsi le quotient de $a\sqrt[3]{b}$ par $c\sqrt[3]{d}$ est $= \frac{a}{c}\sqrt[3]{\frac{b}{d}}$; de même $4\sqrt{16}$ divisé par $2\sqrt{4}$ est $= \frac{4}{2}\sqrt{\frac{16}{4}} = 2\sqrt{4} = 4$; mais pour diviser $a\sqrt[n]{b}$ par $c\sqrt[m]{p}$, on réduira les radicaux au même exposant, pour avoir $a\sqrt[nm]{b^m}$, $c\sqrt[nm]{p^n}$; divisant ensuite le premier par le second, on trouvera le quotient

$$= \frac{a}{c}\sqrt[nm]{\frac{b^m}{p^n}}.$$

Pour élever un radical à une puissance quelconque, il faut multiplier l'exposant de chacun de ses facteurs (dans un produit adc, les quantités a, d, c sont appelées les *facteurs* de ce produit) par l'exposant de la puissance proposée: ainsi la puissance cinquiéme de $\sqrt[5]{a^1}$, ou $(\sqrt[5]{a^1})^5$ est $= \sqrt[5]{a^5} = a^{\frac{5}{5}} = a^1 = a$; donc, lorsque l'exposant de la puissance est égal à l'exposant du signe, il suffit d'ôter le signe radical. La puissance m de $\sqrt[n]{a^p}$ sera $\sqrt[n]{a^{pm}}$; car $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$; mais, pour avoir la puissance m de cette derniere quantité, on doit, selon ce que nous avons dit ci-dessus, multiplier l'exposant $\frac{p}{n}$ par m, pour avoir $a^{\frac{pm}{n}} = \sqrt[n]{a^{pm}}$. Si le radical avoit un coefficient différent de l'unité, on éleveroit ce coefficient à la puissance proposée, ou bien,

avant de faire l'opération, on feroit passer le coefficient sous le signe : ainsi $(a\sqrt[3]{c^2})^2 = a^2\sqrt[3]{c^4} = \sqrt[3]{a^6c^4}$, en faisant passer a sous le signe avant l'opération, ou après; de même $(2\sqrt{4})^2 = 4\sqrt{16} = 4\times 4 = 16$, parce que la puissance seconde de 4 est $= 16$.

Pour extraire une racine quelconque d'une quantité radicale dont le coefficient est l'unité, il faut multiplier l'exposant du radical par celui de la racine ; ainsi la racine cinquiéme de $1\sqrt[3]{a^{15}} = \sqrt[15]{a^{15}} = a^{\frac{15}{15}} = a^1 = a$, ce est évident ; car $\sqrt[3]{a^{15}} = a^{\frac{15}{3}} = a^5$; or la racine cinquiéme de a^5 est $= a^{\frac{5}{5}} = a$; donc, &c. De même la racine n de $\sqrt[m]{a^p}$ est $= \sqrt[mn]{a^p}$. Si le radical avoit un coefficient, dont on peut prendre la racine demandée, on la prendroit séparément ; mais si on ne pouvoit en prendre une racine exacte, on le feroit passer sous le signe : ainsi la racine quarrée de $9\sqrt[3]{64}$ est $= 3\sqrt[6]{64} = 3\times 2 = 6$: car $\sqrt[3]{64} = 4$, dont la racine quarrée $= 2$, de même $\sqrt[6]{64} = 2$: car $64 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2$. Mais pour avoir la racine quarrée de $3\sqrt[3]{2}$, je fais passer 3 sous le signe & j'ai $\sqrt[3]{27\times 2} = \sqrt[3]{54}$, dont la racine quarrée est $= \sqrt[6]{54}$.

Pour avoir une puissance ou une racine d'une quantité radicale fractionnaire, on feroit sur le numérateur & le dénominateur du coefficient & de la quantité, sous le signe, les mêmes opérations que nous venons de faire sur les entiers ; il en seroit de même, si l'on vouloit avoir la somme ou le produit, la différence ou le quotient de ces sortes de quantités, ce qui n'a pas besoin d'une plus longue explication.

37. Passons maintenant à la formation des puissances & à l'extraction des racines des polinomes. Le quarré de $a+b$, ou $\overline{a+b}^2$, ou $(a+b)^2$ est $= a^2 + 2ab + b^2$. En multipliant cette quantité par $a+b$ & réduisant, on aura le cube de $a+b$, ou $\overline{a+b}^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; donc le quarré d'un binome $a+b$ contient 1°. le quarré a^2

du premier terme a de la racine; en second lieu le double produit du premier terme par le second, ou $2ab$; enfin le quarré b^2 du second terme b de la racine. Donc pour revenir du quarré à la racine, après avoir extrait la racine du quarré a^2, 1°. j'écrirai a, racine quarrée de a^2, au quotient, c'est-à-dire, à la racine : 2°. j'élevrai a au quarré pour avoir a^2, que je retrancherai du quarré $a^2 + 2ab + b^2$, ce qui se fait en écrivant $- a^2$, qui détruira a^2 & il ne restera que $2ab + b^2$. Pour trouver le second terme b de la racine, je prends le double du terme trouvé, c'est-à-dire, $2a$ pour diviseur; & divisant le terme $2ab$ par $2a$, le quotient sera $+ b$ & la racine cherchée sera $a + b$. Pour en faire la preuve, j'éleve $a + b$ au quarré, en multipliant $a + b$ par $a + b$, le produit est égal au quarré $a^2 + 2ab + b^2$: donc, &c. Appliquons ceci à l'exemple suivant.

Soit proposé d'extraire la racine quarrée de la quantité $9x^4 - 6x^2d + d^2$. Ayant écrit cette quantité, comme on le voit : je cherche d'abord la racine quarrée du premier terme, (quand on parle d'une racine, sans la spécifier, on entend parler de la racine quarrée); pour cela, je dis la racine de 9 est 3, que j'écris à la racine; je dis ensuite la racine de x^4 est x^2, que j'écris à côté de 3; élevant $3x^2$ au quarré, j'ai $9x^4$, que j'écris sous $9x^4$, je fais la soustraction, en changeant le signe (de $9x^4$) de + en —, & je mets 0, sous $9x^4$, qui se trouve détruit par $- 9x^4$. Je prends pour diviseur $6x^2$, double de la racine écrite $3x^2$; je divise le second terme $- 6x^2d$

$$\begin{array}{l|l} 9x^4 - 6x^2d + d^2 & 3x^2 - d \\ 0 & \\ \hline - 9x^4 & 6x^2 \end{array}$$

par ce diviseur, pour avoir le quotient $-d$, que j'écris à côté du premier terme de la racine; élevant maintenant $3x^2 - d$ au quarré, je retrouve la quantité proposée, ainsi l'opération est juste. Cette méthode est fondée sur ce que si $a+b$ représente la racine $3x^2-d$, a pourra représenter $3x^2$ & b la quantité $-d$. S'il y avoit plus de trois termes au quarré, on les réduiroit à 3 (si cela étoit possible), en prenant pour un seul terme les quantités dans lesquelles une même lettre auroit le même exposant & pour un seul terme tous ceux dans lesquels cette lettre ne se trouveroit pas: ainsi, pour avoir la racine de $a^2 + 2ab + b^2 - 2ad - 2bd + d^2$, on disposera cette quantité, comme on le voit ici: prenant ensuite la racine du premier terme a^2, on écrira a au quotient; élevant au quarré, on retranchera a^2 de a^2; on prendra pour diviseur $2a$ double de la racine, & divisant d'abord $2ab$ par $2a$, on mettra au quotient $+b$, divisant tout de suite $-2ad$ par $2a$, on écrira encore le quotient $-d$ à la racine, qui sera $a+b-d$; en effet en multipliant cette racine par elle-même, on trouvera la quantité proposée. Si la quantité proposée ne peut pas se réduire à trois termes par la méthode dont nous venons de parler, on ordonnera cette quantité par rapport à une lettre quelconque, on prendra la racine du premier terme comme nous venons de le faire; on retranchera de même le quarré du premier terme de la racine de la quantité proposée; prenant ensuite pour diviseur le double de la racine, on divisera le terme suivant (on doit

$$\begin{array}{l|l} a^2 + 2ab + b^2 & \\ 0 - 2ad - 2bd & a+b-d \\ \quad\quad + d^2 & \\ \hline -a^2 & 2a \end{array}$$

toujours diviser le terme qui contient le plus grand exposant de la lettre, par rapport à laquelle on a ordonné,) par ce diviseur; on écrira le quotient à la racine : multipliant ensuite le diviseur par le quotient, on ajoutera au produit le quarré de ce quotient pour soustraire le tout de la quantité proposée ; l'on continuera de même en prenant toujours pour diviseur le double de la racine trouvée.

Soit la quantité $x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$. Cette quantité ne pouvant pas évidemment se réduire à 3 termes & étant ordonnée par rapport à x ;

$x^4 + 4x^3p + 6x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$	$x^2 + 2xp + p^2$
$0 \quad 0$	
$-x^4 \pm 4x^3p \pm 4x^2p^2$	$2x^2$
$+ 2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$	$2x^2 + 4xp$

je prends la racine x^2 du premier terme & après avoir écrit x^2 à la racine, je prends son quarré x^4 que je soustrais de la quantité proposée. Prenant ensuite $2x^2$ pour diviseur, je divise le terme suivant $4x^3p$ par $2x^2$, & j'écris à la racine le quotient $2xp$. Je multiplie ensuite ce quotient par le diviseur & j'ai la quantité $4x^3p$, à laquelle j'ajoute $4x^2p^2$ quarré du quotient ; retranchant cette somme du reste de la quantité proposée, il me reste $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$ que j'écris sous la quantité proposée, comme on le voit. Doublant ensuite la racine, j'ai pour diviseur $2x^2 + 4xp$; je divise le terme $2x^2p^2$ par le premier terme $2x^2$ du diviseur, pour avoir le quotient $+p^2$, que j'écris à la racine ; multipliant ensuite le diviseur par le quotient & ajoutant au produit le quarré du quotient, j'ai $2x^2p^2 + 4xp^3 + p^4$; retranchant cette

quantité du reste de la quantité proposée, il ne reste rien, & la racine cherchée est $x^2 + 2px + p^2$. En prenant la racine de celle-ci, on aura $x + p$, racine quatriéme de la quantité proposée : de sorte que pour avoir la racine quatriéme d'une quantité d^4, on peut d'abord prendre la racine quarrée d^2 de d^4, & prendre ensuite la racine d de d^2 ; mais si l'on ne peut avoir la racine quarrée de celle-ci, c'est une marque que la quantité proposée n'a pas de racine quatriéme ; cette méthode est générale.

Pour extraire la racine cube de $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ que nous savons être $= a + b$; après avoir disposé cette quantité comme on le voit ici, je prends la racine cubique du premier terme a^3, j'ai a que

$$\begin{array}{l|l} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & a + b \\ 0 & \\ \hline -a^3 & 3a^2 \end{array}$$

j'écris à la racine ; élevant a au cube, je trouve a^3 que je retranche de la quantité proposée & j'écris o sous a^3. Pour trouver le second terme b de la racine, je vois qu'il me faut diviser le second terme $3a^2b$ par $3a^2$, c'est-à-dire, par le triple du quarré du premier terme a de la racine. Je prends donc le quarré a^2 de a, & triplant, j'ai $3a^2$ pour diviseur : divisant donc $+ 3a^2b$ par $3a^2 = + 3a^2$, j'ai $+ b$ pour quotient ; j'écris $+ b$ à la racine, de sorte que la racine entiere est $a + b$. En effet, élevant $a + b$ au cube, on trouve la quantité proposée. S'il y avoit plus de 4 termes au cube, il y en auroit plus de deux à la racine, dans ce cas on tacheroit de réduire la quantité proposée à 4 termes, en suivant la méthode, dont nous avons parlé ci-dessus. Ainsi, pour extraire la racine cubique de $x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 - 3x^2d + 3xd^2 - 6xbd - 3b^2d +$

$3bd^2 - d^3$, je dispose cette quantité comme on le voit: je prends ensuite la racine cubique x du premier terme x^3,

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2b + 3xb^2 + b^3 & \\ 0 & \\ \quad - 3x^2d - 6xbd - 3b^2d & x + b - d \\ \quad\quad + 3xd^2 + 3bd^2 & \\ \quad\quad\quad - d^3 & \\ \hline - x^3 & 3x^2 \end{array}$$

je l'écris à la racine; j'éleve x au cube & retranchant x^3 de x^3, j'écris o sous x^3; je prends ensuite pour diviseur le triple du quarré de la racine, & divisant tout de suite tous les termes affectés de x^2, j'ai $+ b - d$ que j'écris au quotient; de sorte que la racine cherchée est $x + b - d$: en effet, si on prend le quarré de cette quantité, qu'on multiplie ensuite ce quarré par la racine $x + b - d$ pour avoir le cube de cette racine, l'on trouvera la quantité proposée.

Lorsque la quantité proposée ne peut pas se réduire à quatre termes, à cause que chacune de ses lettres se trouve dans plus de quatre termes, avec des exposans au-dessus de o, on peut ordonner par rapport à une lettre quelconque; prenant ensuite la racine cubique du premier terme, on l'écrira à la racine; élevant cette racine au cube, on retranchera le résultat de la quantité proposée. Prenant ensuite pour diviseur le triple du quarré de la racine, on divisera le terme suivant (on doit toujours prendre pour terme suivant celui qui contient le plus grand exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par ce diviseur, pour écrire le quotient à la racine; on élevera au cube les deux premiers termes de la racine, pour retrancher ce cube de toute la quantité proposée. Prenant ensuite

pour diviseur le triple du quarré des deux premiers termes de la racine, on se servira du premier terme de ce diviseur pour diviser le terme suivant du reste de la quantité proposée; écrivant le quotient à la racine, on élevera ensuite toute la racine trouvée au cube, pour retrancher le résultat de toute la quantité proposée ; on continuera de même en prenant toujours pour diviseur le triple du quarré de la racine trouvée.

Si une quantité n'est pas une puissance parfaite, on se contente d'indiquer sa racine : ainsi $a^2 + b^2$ n'étant pas un quarré parfait, sa racine peut s'exprimer de cette maniere $\sqrt{a^2 + b^2} = \overline{a^2 + b^2}^{\frac{1}{2}}$ $= (a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}}$, en divisant l'exposant 1 sous-entendu de $(a^2 + b^2)$ par l'exposant 2 de cette racine.

38. Pour extraire les racines numériques, il faut se rappeller la table des quarrés & des cubes des nombres que nous avons donnée ci-dessus (36), après quoi l'on verra aisément qu'un nombre d'un seul chiffre ne peut avoir trois chiffres à son quarré, puisque 10 qui est le plus petit nombre de deux chiffres, a pour quarré 100, qui est le plus petit nombre de 3 chiffres ; 99 qui est le plus grand nombre de deux chiffres, a pour quarré 9801, qui ne contient que quatre chiffres ; de sorte qu'un nombre quelconque ne peut avoir à son quarré tout au plus que le double de ses chiffres. De même le cube d'un nombre ne peut contenir plus du triple des chiffres de ce nombre ; en effet 10, premier nombre de deux chiffres, a pour cube 1000, premier nombre de quatre chiffres & le cube de 99 ne contient que 6 chiffres, ainsi qu'on peut le voir en multipliant le quarré de 99 par 99 pour avoir son cube.

Pour elever un nombre 25 au quarré, il faut multiplier 25 par 25 ; & pour avoir son cube, il faut multiplier son quarré par 25. On trouvera pour le quarré 625 & multipliant ce dernier nombre par 25, on aura son cube 15625. Au lieu de multiplier 25 par 25 pour avoir son quarré, on peut s'y prendre de cette maniere : je prends le quarré de son premier chiffre 2 & j'écris 4 comme on le voit ici ; je prends ensuite le double du premier chiffre, c'est 4 ; je multiplie ce double par le second chiffre 5, j'écris le produit 20 sous 4, en avançant d'un rang vers la droite (s'il n'y avoit qu'un chiffre au produit, on l'avanceroit de même aussi d'un rang vers la droite) ; je prends ensuite le quarré du second, savoir 25, que j'avance encore d'un rang ; prenant ensuite la somme, je trouve 625 comme ci-dessus.

```
 4
 20
  25
----
 625
```

De-là je conclus qu'en partageant en tranches le quarré 625 en cette maniere 6, 25 ; de sorte que la premiere tranche à droite contienne deux chiffres, le quarré du premier chiffre de la racine doit se trouver dans la premiere tranche 6 de la gauche, & le double produit du premier chiffre par le second dans le ptemier chiffre 2 de la seconde tranche ; enfin le quarré du dernier chiffre 5 doit se trouver au dernier chiffre 5 de la seconde tranche. Quand on dit que le double produit du premier chiffre par le second doit se trouver au premier chiffre de la seconde tranche & que le quarré du second chiffre doit se trouver au dernier chiffre de la même seconde tranche, cela doit s'entendre du dernier chiffre à droite de ce produit, & du quarré de 5.

Si le nombre qu'on veut élever au quarré avoit plus

de deux chiffres, on prendroit de plus le double produit des deux premiers par le troisiéme avec le quarré du troisiéme; ensuite le double du produit des trois premiers par le quatriéme avec le quarré du quatriéme & ainsi de suite, en avançant toujours d'un rang vers la droite chaque produit & chaque quarré. De-là nous tirons la regle suivante : pour avoir la racine d'un nombre, partagez ce nombre en tranches, en commençant par la droite, de sorte que chaque tranche soit de deux chiffres, excepté la premiere à gauche qui ne sera que d'un seul chiffre, lorsque le nombre des chiffres sera impair. Prenez le plus grand quarré contenu dans la premiere tranche de la gauche, tirez-en la racine que vous écrirez à part; élevez cette racine au quarré, retranchez ce quarré de la premiere tranche; à côté du reste s'il y en a, ou à côté de o s'il n'y en a point, descendez la seconde tranche & prenez pour dividende le reste s'il y en a, joint au premier chiffre de la tranche abaissée, ou le premier chiffre seul de la tranche abaissée s'il n'y a aucun reste; prenez pour diviseur le double de la racine trouvée; écrivez le quotient à la racine; multipliez le diviseur par le quotient; ajoutez à ce produit, en avançant d'un rang vers la droite, le quarré du quotient; si la somme peut être soustraite de la tranche abaissée, jointe au reste s'il y en a, le chiffre trouvé est bon, si le contraire arrive, on diminuera le quotient successivement d'une unité & même on écrira o si en mettant 1 à la racine on ne peut faire la soustraction dont nous venons de parler. On s'y prendra de même pour les tranches suivantes, en prenant pour diviseur le double de la racine trouvée, & pour dividende le

le premier chiffre de la tranche abaissée, joint au reste s'il y en a, ou ce premier chiffre seul, s'il n'y a aucun reste.

Soit proposé d'extraire la racine quarrée du nombre 628. Ayant partagé ce nombre en tranches, comme nous venons de le dire; je vois par la table des quarrés que 4 est le plus grand quarré contenu dans 6, j'en prends sa racine 2 que j'écris comme on le voit; élevant 2 au quarré, j'écris 4 sous 6; retranchant 4 de 6, il reste 2; à côté de ce reste j'abaisse la tranche suivante, je mets un point sous le premier chiffre de cette tranche, pour me rappeller que 22 est mon dividende, je prends pour diviseur le double 4 de la racine; divisant 22 par 4, j'écris 5 au quotient; je multiplie le diviseur par le quotient, le produit est 20, auquel je joins le quarré du quotient, en cette maniere $\begin{smallmatrix}20\\25\end{smallmatrix}$ la somme 225 étant soustraite de 228, il reste 3, que j'écris comme on le voit; de sorte que la racine cherchée est 25, avec un reste 3, qui indique que le nombre proposé seroit un quarré exact, si on en ôtoit 3. Pour faire la preuve de cette opération, j'éleve 25 au quarré, j'ai 625, à ce nombre j'ajoute 3 & j'ai le nombre proposé 628.

6, 2 8	2 5 (3)
4	4 Diviseur.
2 2 8	

On voit par là qu'on ne peut pas toujours extraire exactement les racines quarrées des nombres. *Par exemple*, on ne peut pas extraire exactement les racines quarrées des nombres 2, 3, 5. De sorte que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sont des quantités qu'on appelle *irrationnelles* ou *sourdes*. On peut cependant en approcher tant que l'on veut par le moyen des décimales, pour cela il faut ajouter au nombre proposé autant de fois deux zéro qu'on veut

avoir de décimales : ainsi, pour avoir la racine de 5, à un centiéme près, j'ajoute 4 zeros à 5, de la maniere qu'on le voit ici : partageant ensuite le résultat en tranches, je prends la plus grande racine contenue dans la premiere tranche, je trouve que c'est 2, que j'écris à la racine ; je retranche le quarré 4 de 5, il reste 1, à côté duquel je descends deux o, & prenant 10 pour dividende, & 4 pour diviseur, j'écris le quotient 2 à la racine ; retranchant ensuite le produit du diviseur par le quotient joint au quarré du quotient (de la maniere que nous l'avons déjà expliqué) du nombre 100, il reste 16 ; à côté de ce nombre je descends 00 & j'ai 160 pour dividende & 44 pour diviseur. C'est pourquoi je divise 160 par 44, en disant en 16 combien de fois 4, je trouve qu'il y est quatre fois ; mais, parce que le produit du diviseur par le quotient joint au quarré du quotient (de la maniere qu'on l'a indiqué) ne peut se soustraire de 1600, je diminue le quotient d'une unité ; la soustraction pouvant alors se faire, j'écris 3 au quotient ; mais parce qu'en ajoutant 0000 à la droite de 5, j'ai multiplié 5 par 10000, dont la racine est 100, je dois avoir une racine cent fois plus petite que 223 ; je dois donc séparer 23 par un point pour avoir la véritable racine 2 . 23, à un centiéme près.

5, 00, 00	2 . 23
4	4
1 00	44
84	
16 0 0	

Un nombre sourd, tel que $\sqrt{5}$ ne peut jamais avoir pour racine exacte une fraction quelconque.

Car soit $\frac{a}{d}$ la fraction cherchée, on aura $\sqrt{5} = \frac{a}{d}$, & en prenant les quarrés on aura $5 = \frac{aa}{dd}$;

or cela est impossible, car la fraction $\frac{a}{d}$ étant réduite à ses moindres termes, ainsi que nous le supposons ici, les quantités a & d n'ont aucun diviseur commun; mais il est visible que si a & d n'ont aucun diviseur commun, leurs quarrés a^2 & d^2 n'en auront pas non plus : donc si d ne peut pas diviser exactement a, d^2 ne divisera pas non plus exactement a^2 : donc $\frac{a^2}{d^2}$ ne peut être un nombre entier 5 : donc, &c. On prouveroit de même que $\frac{a}{b}$ étant une fraction irréductible $= \sqrt[3]{5}$, $\frac{a^3}{b^3}$ devroit être une fraction égale à 5, ce qui ne peut être; donc un nombre qui n'est pas une puissance parfaite d'un dégré quelconque ne peut avoir aucune racine exacte du même degré exprimable en nombres.

Si on vouloit avoir le cube de 25, on prendroit d'abord le quarré 625 de ce nombre & multipliant 625 par 25, le résultat 15625 seroit le cube cherché. L'on trouveroit la même chose en prenant d'abord le cube du premier chiffre 2 qui est 8. En second lieu le triple produit du quarré du premier chiffre par le second 5. En troisiéme lieu le triple produit du premier chiffre par le quarré du second; & enfin le cube du second.

8	Cube du premier chiffre 2
60	Triple produit de 4 par 5
150	Triple produit de 2 par 25.
125	Cube de 5
15625	

Ayant soin d'avancer à chaque fois d'un rang vers

la droite ; faisant ensuite l'addition, on trouvera le même résultat que ci-dessus. S'il y avoit 3 chiffres au nombre proposé, on continueroit de même en regardant les deux premiers chiffres, comme n'en faisant qu'un ; de sorte qu'on prendroit de plus le triple produit du quarré des deux premiers par le troisiéme, le triple produit des deux premiers par le quarré du troisiéme, enfin le cube du troisiéme, & ainsi de suite pour un plus grand nombre de chiffres. Cela posé, si on partage ce nombre en tranches, ensorte que celle de la droite contienne trois chiffres, il est visible en premier lieu que le cube 8 du premier chiffre 2 est contenu dans la premiere tranche de la gauche ; en second lieu, que le triple produit du quarré du premier par le second est contenu dans le premier chiffre 6 de la seconde tranche. Quand nous disons que le triple produit du quarré du premier chiffre par le second est contenu dans le premier chiffre 6 de la seconde tranche, nous entendons parler du dernier chiffre de la droite de ce produit.

15,625	25
8	12
7625	

Soit proposé maintenant de prendre la racine cubique de 15625. Ayant partagé ce nombre en tranches, comme nous venons de le dire, je vois par la table des cubes que 8 est le plus grand cube contenu dans la premiere tranche 15, je prends donc la racine cubique de 8 qui est 2 ; j'écris 2 à la racine ; élevant 2 au cube, j'ai 8 que je soustrais de 15, pour avoir le reste 7, à côté duquel je descends la tranche suivante ; & mettant un point sous le premier chiffre 6 de cette tranche, je prends pour dividende le premier chiffre 6 de la tranche abaissée, joint au reste 7 de la précédente (s'il n'y avoit point

de reste, le seul chiffre 6 seroit le dividende); je prends 12 pour diviseur, c'est-à-dire, le triple du quarré du premier terme de la racine, divisant 76 par 12, le quotient est 6; mais le cube de 26 étant 17576 > 15625, je ne puis le soustraire de ce dernier; je diminue donc le quotient d'une unité & comme le cube de 25 est = 15625, quantité qui peut être soustraite du nombre proposé, j'écris 5 à la racine qui est 25. S'il y avoit une autre tranche, pour trouver le troisiéme chiffre, je prendrois pour diviseur le triple du quarré de 25 & pour dividende le premier chiffre de la troisiéme tranche, joint au reste s'il y en avoit, élevant ensuite au cube les trois premiers chiffres de la racine, si le résultat pouvoit être soustrait des trois premieres tranches, le chiffre trouvé seroit bon, sinon il faudroit diminuer successivement le quotient d'une unité, jusqu'à ce que la soustraction fût possible.

EXEMPLE SECOND. *Soit le nombre 8,489,667, dont on demande la racine cubique.* On trouvera, en suivant la méthode indiquée, 204 pour racine, avec

8,489,667	204	
	12	Premier diviseur.
	1200	Second diviseur.

un reste 3. Pour avoir une racine plus exacte, on ajoutera autant de fois trois zeros qu'on veut avoir de décimales, parce que le cube de 10 étant 1000 pour avoir des dixiémes, il faudra ajouter trois 0, ou, ce qui revient au même, multiplier par 1000.

La racine cube d'une fraction se trouve en prenant la racine cubique du numérateur & celle de son dénominateur; de même la racine quarrée d'une

fraction se trouvera en prenant la racine quarrée de son numérateur aussi-bien que celle de son dénominateur; de sorte que la racine cubique de $\frac{8}{27}$ est $\frac{2}{3}$, la racine quarrée de $\frac{4}{9}$ est $\frac{2}{3}$, la racine cube de $\frac{2}{3}$ = est $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$; la racine quarrée de $\frac{3}{5}$ est $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. Mais, si l'on veut avoir un nombre au numérateur, on le pourra, en multipliant pour la racine quarrée, les deux termes de la fraction par le numérateur; mais on multipliera par le quarré du numérateur, s'il s'agit de la racine cube : ainsi la racine quarrée de $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ est $\frac{2}{\sqrt{3}}$; la racine cube de $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$ est $\frac{2}{\sqrt[3]{12}}$. Si on vouloit avoir un nombre au dénominateur, on feroit du dénominateur le même usage que nous venons de faire du numérateur : ainsi $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}}$ est $= \frac{\sqrt[3]{18}}{3}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ est $= \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$. Si on vouloit faire disparoître le radical $\sqrt{6}$, dans la fraction $\frac{\sqrt{6}}{3}$, on le pourroit, en se contentant de prendre par approximation la racine de 6, ce qui seroit aisé à faire par le moyen des décimales, en suivant la méthode ci-dessus.

La racine cube de $\frac{a}{b}$ est $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$, ou parce

que

que $\frac{a}{b} = \frac{a^3}{aab}$, on aura $\frac{a}{\sqrt[3]{aab}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$; la racine quarrée de $\frac{a}{b} = \frac{a^2}{ab}$, sera $\frac{a^{\frac{2}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{ab}}$.

39. Avant de passer plus loin, nous allons donner une méthode générale pour trouver une puissance quelconque d'une quantité algébrique.

LEMME I. *Tous les produits qui résultent d'un même nombre de lettres sont égaux entr'eux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres.* Pour le démontrer, nous ferons usage de ce principe évident, que deux quantités donneront des produits égaux, laquelle des deux l'on prenne pour multiplicande : cela posé, je dis d'abord que $ab = ba$, par la même raison que $4 \times 3 = 3 \times 4 = 12$; donc les produits qui résultent de deux lettres a & b sont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. En second lieu $cab = abc$; car $ab = ab$: donc en multipliant c par ab, & ab par c, les produits cab & abc seront évidemment égaux; donc le produit $abc = bac$; car, puisque $ab = ba$, $ab \times c$ est $= ba \times c$. De même $cab = abc = cba$, puisqu'en multipliant c par ab, on doit avoir le même résultat qu'en multipliant ab par c, ou c par ba, à cause de $ba = ab$: donc les produits abc, bac, cab, cba, sont égaux. Par la même raison $bca = acb$, puisque $ca = ac$ & qu'en multipliant ac par b, on doit avoir le même produit qu'en multipliant b par ca : donc les six produits abc, bac, cab, cba, bca, acb sont égaux entr'eux; car les deux derniers sont égaux entr'eux aussi-bien que les quatre premiers; mais il est visible que le cinquiéme est égal au quatriéme ; donc

les produits de trois lettres sont égaux dans quelque ordre qu'on multiplie ces lettres. On prouvera facilement par la même méthode que les produits de 4 lettres sont tous égaux, & ainsi de suite : donc, &c.

LEMME II. *Deux lettres* a *&* b *peuvent recevoir deux arrangemens différens* ab *&* ba *; trois lettres* a, b, c *peuvent recevoir 2 fois 3 ou 6 arrangemens différens, ce qui donnera les 6 arrangemens suivans* acb, abc, bac, bca, cab, cba. *On voit aussi que quatre lettres recevront 6 fois 4, ou 24 arrangemens différens ; car chacune d'elles étant mise la premiere, les trois autres recevront 6 arrangemens différens, ce qui donnera 24 arrangemens différens. De même 5 lettres recevront 24 fois 5 ou 120 arrangemens différens ; &c. Mais tous ces produits seront égaux & non différens par le lemme précédent.*

LEMME III. *Un nombre* m *de lettres prises deux à deux, donnera un nombre* $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}$ *de produits réellement différens ; prises trois à trois un nombre* $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ *; prises quatre à quatre un nombre* $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot(m-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ *; & ainsi de suite.*

Puisque le nombre des lettres est m, chacune ne pourra être multipliée que par les autres, dont le nombre sera $m-1$; ainsi le nombre total des produits, en prenant les lettres deux à deux, sera $m\cdot(m-1)$; mais le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}$; car, *par exemple*, le nombre total des produits de trois lettres a, b, c prises deux à deux, sera $3\times(3-1)=3\times 2=6$, puisqu'on peut avoir ab, ac, ba, ca, bc, cb ;

mais, à cause de $ab = ba$, de $ac = ca$, de $bc = cb$, le nombre des produits réellement différens, n'est que la moitié du nombre total des produits : donc, &c. Pour avoir le nombre des produits, réellement différens, que peut donner un nombre m de lettres prises trois à trois, il faut remarquer que chacune ne peut être multipliée que par les produits des autres prises deux à deux, & que le nombre total des produits d'un nombre m de lettres prises deux à deux étant $m \cdot (m-1)$, celui d'un nombre $m-1$ de lettres sera $(m-1) \cdot (m-2)$: donc le nombre total des produits de ces lettres prises trois à trois sera $m \cdot (m-1) \cdot (m-2)$; mais, parce que trois lettres a, b, c fournissent six produits égaux (lemme précédent) le nombre trouvé est six fois trop grand : donc le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Par un raisonnement semblable on verra que le nombre total des produits de quatre lettres est $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)$; mais, parce que quatre lettres (lemme précédent) donnent 24 produits égaux, le nombre des produits réellement différens sera 24 fois plus petit que le nombre total des produits; donc il sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. On verra de même qu'en prenant les lettres cinq à cinq, le nombre des produits réellement différens sera $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot (m-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ & ainsi de suite.

LEMME IV. *Si on multiplie un nombre quelconque* m *de binomes, tels que* $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. *dont le premier terme soit le même, le premier terme du produit sera* x *élevé à l'exposant* m,

sans autre coefficient que l'unité ; le second terme contiendra x *élevé à un exposant moindre d'une unité, avec un coefficient égal à la somme des seconds termes* (par coefficient on entend ici tout ce qui multiplie une puissance de x); *le troisiéme terme renfermera* x *élevé à un exposant moindre d'une unité que le précédent, avec un coefficient égal à la somme des produits réellement différens que peuvent donner les lettres* a, b, c, *&c. combinées deux à deux. En général l'exposant de* x *ira toujours en diminuant d'une unité jusqu'au dernier terme dans lequel* x *ne se trouvera pas à cause de* $x^0 = 1$ (28). *A l'égard des coefficiens, celui du premier terme sera* $= 1$, *celui du second sera la somme de toutes les lettres* a, b, c, *&c. celui du troisiéme la somme des produits réellement différens des mêmes lettres combinées deux à deux; celui du quatriéme la somme des produits réellement différens des lettres* a, b, c, *&c. prises trois à trois & ainsi de suite jusqu'a dernier terme qui contiendra seulement le produit de toutes les lettres* a, b, c, *&c.* En effet $(x+a)\cdot(x+b)$ est $=$ $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} +ba$; $(x+a)\cdot(x+b)\cdot(x+d)$ est

$$= x^3 \begin{matrix} +ax^2 \\ +bx^2 \\ +dx^2 \end{matrix} \begin{matrix} +abx \\ +adx \\ +bdx \end{matrix} + abd$$

; & ainsi des autres : donc en supposant $a = b = d$, ce dernier produit deviendra $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 = (x+a)^3$, ce qui fait voir encore que les exposans de x vont en diminuant d'une unité d'un terme à l'autre : donc si la puissance est m, c'est-à-dire, si l'on a $(x+a)^m$, les exposans de x seront m, $m-1$, $m-2$, &c. A l'égard des coefficiens, ils seront 1 pour le pre-

mier terme, $\frac{ma}{1}$ pour le second, $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot a^2$ pour le troisiéme, $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3$ pour le quatriéme, & ainsi de suite. Cela suit de ce que nous venons de dire ; puisque pour avoir le coefficient du troisiéme terme, *par exemple*, il faut prendre le nombre des produits réellement différens d'un nombre m de lettres prises deux à deux ; mais en supposant chacune des lettres égale à a, chacun de ces produits sera $= a^2$; d'un autre côté le nombre de ces produits est $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}$. Donc le coefficient du troisiéme terme sera $\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}a^2$; celui du quatriéme sera $\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^3$: puisque chaque produit de trois lettres est dans ce cas $= a^3$, & ainsi des autres. Donc la formule générale du Binome $(x+a)^m$ sera $x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}a + \frac{m\cdot(m-1)\,x^{m-2}}{1\cdot 2}a^2 +$ &c. Lorsque $m = 2$, la suite finit au troisiéme terme, parce que $m-2=0$ doit multiplier tous les termes suivans ; en un mot la suite finit, lorsque le nombre négatif qui est joint à m est devenu $= m$.

Parce que x^{m-1} est $= \frac{x^m}{x}$, $x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}$, $x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}$, &c. On peut transformer notre formule en cette autre $(x+a)^m = x^m + \frac{max^m}{x} + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\times\frac{x^m a^2}{x^2} +$ &c. $= x^m\left(1 + m\cdot\frac{a}{x} + \frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}\right.$

$+$ &c.). De-là on tire la regle suivante, pour avoir la puissance m du Binome $x+a$. Ecrivez sur une premiere ligne les quantités

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \text{ \&c.}$$

$$1+\frac{m}{1}\cdot\frac{a}{x}+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{a^2}{x^2}+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{a^3}{x^3}, \text{\&c.}$$

Et ayant écrit l'unité au-dessous, & à une place plus avancée vers la gauche, formez la suite inférieure par cette loi; multipliez cette unité par le premier terme de la suite supérieure & par $\frac{a}{x}$ pour avoir le second terme de la suite inférieure; multipliez ce second terme par le second de la suite supérieure & encore par $\frac{a}{x}$, vous aurez le troisiéme terme de la suite inférieure, & ainsi de suite; multipliez enfin la suite inférieure par x^m, & vous aurez la puissance m de $x+a$, c'est-à-dire, que vous aurez $(x+a)^m$. Si on vouloit avoir $(x^3+a^2)^m$, au lieu de multiplier par $\frac{a}{x}$ on multiplieroit par $\frac{a^2}{x^3}$, & ensuite par x^{3m}. Supposons qu'on demande la troisiéme puissance de $x+a$, on aura 3, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$ & $(x+a)^3 = x^3\left(1+\frac{3a}{x}+3\frac{a^2}{x^2}+\frac{a^3}{x^3}\right)$; & pour avoir la puissance m d'un trinome $c+b+d$, on fera $c=x$, & $b+d=a$; substituant dans la formule les valeurs de x, x^2, &c. de a, a^2, &c. on aura la puissance cherchée. La formule peut s'appliquer à un polinome quelconque, en supposant le premier terme du polinome $=x$ & la somme de tous les autres $=a$.

De-là il suit que, pour avoir la racine m de la

quantité $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2$ &c. Il faut d'abord prendre la racine m du premier terme a^m, cette racine est a; l'ayant écrite à la racine,

$$\begin{array}{l|l} a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \cdot (m-1)}{2} a^{m-2}b^2 + \&c. & a + b \\ 0 & \\ \hline -a^m & ma^{m-1} \end{array}$$

j'éleve a à la puissance m, pour soustraire a^m de la quantité proposée; prenant ensuite pour diviseur le produit de l'exposant m de la racine, par la puissance $m-1$ du premier terme a de la racine, je divise le terme affecté de a^{m-1} par ma^{m-1}, le quotient est $+b$ que j'écris à la racine; de sorte que la racine cherchée est $a+b$.

Lorsque la quantité proposée peut se réduire à un nombre $m+1$ de termes, en prenant pour un seul terme tous ceux qui contiennent la même puissance de a, & qu'elle n'en a qu'un affecté de a^m, tandis qu'elle en a plusieurs affectés de a^{m-1}; l'on peut trouver tous les termes de la racine qui suivent le premier, en divisant de suite tous les termes affectés de a^{m-1}. Mais si l'on ne peut pas réduire la quantité proposée (que je suppose toujours contenir un seul terme affecté de a^m) à un nombre $m+1$ de termes, on ordonnera par rapport à la lettre a, & après avoir trouvé le premier terme a, on soustraira a^m de la quantité proposée, & divisant le terme suivant par ma^{m-1}; l'on écrira le quotient à la racine. Elevant les deux premiers termes de cette racine à la puissance m, on soustraira le résultat de la quantité proposée; on continuera d'opérer en di-

visant toujours le terme suivant (c'est-à-dire celui qui contiendra le plus haut exposant de la lettre par rapport à laquelle on a ordonné) par le produit de l'exposant *m* multiplié par la puissance *m* — 1 de toute la racine trouvée, jusqu'à ce qu'il ne reste rien. S'il y avoit un reste qu'on ne pût plus diviser, de la maniere que nous venons de le dire, ce seroit une marque que la quantité proposée n'est pas une puissance parfaite, dont on puisse extraire la racine exacte demandée.

Si l'on vouloit avoir la racine *m* d'un nombre, on le partageroit en tranches d'un nombre *m* de chiffres chacune, excepté la premiere tranche de la gauche, qui souvent en contiendra moins*. Prenant ensuite la racine *m* de cette premiere tranche, on l'écrira à la racine; on élevera cette racine à la puissance *m*, pour soustraire le résultat de la premiere tranche. Abaissant ensuite la seconde tranche à côté du reste, on prendra pour diviseur le produit de l'exposant *m* par la puissance *m* — 1 de la racine trouvée, on divisera par cette quantité le premier chiffre de la tranche abaissée joint au reste s'il y en a : on écrira le quotient à la racine; élevant ensuite à la puissance *m* toute la racine trouvée, on verra s'il est possible de retrancher le résultat des deux premieres tranches; dans ce cas, le quotient trouvé est bon, sinon il faut le diminuer jusqu'à ce que la soustraction soit possible. On continuera de même en prenant pour diviseur le produit de *m* par la puissance *m* — 1 de toute la racine déjà trouvée & pour dividende le premier chiffre de la nouvelle tranche abaissée, joint au reste s'il y

* On suppose que le nombre est assez grand pour permettre ce partage.

en a. Si, après avoir opéré sur toutes les tranches, il y a un dernier reste, on pourra continuer l'opération par le moyen des décimales, en ajoutant autant de fois un nombre m de o, qu'on veut avoir de décimales. Ce que nous venons de dire n'a aucune difficulté, après ce que nous avons déjà dit sur les racines quarrées & cubiques des nombres.

La formule du binome sert encore lorsque m est un nombre fractionnaire *positif* ou *négatif*, ou bien encore un nombre *entier négatif*. Pour le prouver; mettons d'abord $\frac{m}{n}$ à la place de m & notre formule $(x+a)^m$ deviendra $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}}[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n} \cdot (\frac{m}{n} - 1)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2}$ &c.]. Supposons que la somme de tous les termes de la série, excepté le premier, soit égale à p pour avoir $p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{\frac{m}{n} \times (\frac{m}{n} - 1)}{2} \frac{a^2}{x^2}$ &c. Ainsi l'on aura $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \times (1+p)$. Elevant les deux quantités à la puissance n ce qui se fait en multipliant leur exposant par n (36), & faisant attention que l'exposant de $1+p$ est 1 (car $1+p = (1+p)^1$), on aura $(x+a)^{\frac{mn}{n}} = (x+a)^m = x^{\frac{mn}{n}}(1+p)^n = x^m(1+p)^n$; or $(x+a)^m = x^m(1 + m\frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2}$ &c.)

De même $x^m(1+p)^n$ est $= x^m(1 + np + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \times p^2 +$ &c.); parce que les puissances n, $n-1$, &c. de 1 sont $= 1$. Si dans cette derniere quantité on

substitue les valeurs de p & de p^2, en se bornant (pour simplifier) aux termes qui ne passent pas le quarré, on aura

$$p = \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \frac{\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

$$p^2 = \frac{m^2}{n^2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

donc $1 + np + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^2 + \&c.$

deviendra $1 + m \cdot \frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-n)}{2n} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$

$$+ \frac{m^2}{n} \cdot \frac{(n-1)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.$$

Or le multiplicateur de $\frac{a^2}{x^2}$ se réduit à $m \left(\frac{m-n}{2n} + \frac{m \cdot n - m}{2n}\right) = m \left(\frac{m \cdot n - n}{2n}\right) = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$. En continuant, on trouveroit que le multiplicateur de $\frac{a^3}{x^3}$ se réduit à $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, & ainsi de suite; donc $(1+p)^n$ est $= 1 + m\frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2}$ + &c. donc $x^m (1+p)^n = x^m \left(1 + m\frac{a}{x} + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.\right)$ est $= (x+a)^m$: donc, prenant la racine n de ces deux quantités égales, on aura $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left(1 + m\frac{a}{x} + \&c.\right)^{\frac{1}{n}} = x^{\frac{m}{n}} (1+p)$, & $(x+a)^{\frac{m}{n}} = x^{\frac{m}{n}} \left[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \cdot \frac{\left(\frac{m}{n} - 1\right)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} + \&c.\right]$ Donc la formule aura

lieu, lorſque l'expoſant ſera un nombre fractionnaire poſitif. Il en ſera de même ſi l'expoſant eſt un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$, c'eſt-à-dire, qu'on aura $(x+a)^{-\frac{m}{n}} = x^{-\frac{m}{n}}(1 - \frac{m}{n} \times \frac{a}{x} + \&c.)$, quantité que nous ſuppoſons $=S$, ce qui donnera $S = \frac{(x+a)^{-\frac{m}{n}}}{1} = \frac{1}{(x+a)^{\frac{m}{n}}}$ *; or $S =$ $(x+a)^{-\frac{m}{n}}$ étant multipliée par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$ doit évidemment donner 1; multiplions donc S, ou ſa valeur ſuppoſée $x^{-\frac{m}{n}}[1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \times \frac{(\frac{m}{n}+1)}{2} \cdot \frac{a^2}{x^2} - \&c.]$ par $(x+a)^{\frac{m}{n}}$, c'eſt-à-dire, par $x^{\frac{m}{n}}[1 + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \cdot \frac{(\frac{m}{n}-1)}{2} \frac{a^2}{x^2} + \&c.]$; & nous bornant, pour ſimplifier, aux termes qui ne paſſent pas le quarré, nous aurons

$$x^{\frac{m}{n}-\frac{m}{n}}\left\{\begin{array}{l}[1 - \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} + \frac{m}{n} \cdot \frac{(\frac{m}{n}+1)}{2} \frac{a^2}{x^2} \&c. \\ \quad + \frac{m}{n} \cdot \frac{a}{x} \quad - \frac{m^2}{n^2} \frac{a^2}{x^2} \\ \quad + \frac{m}{n} \cdot \frac{(\frac{m}{n}-1)}{2} \frac{a^2}{x^2}\end{array}\right\}$$

* Voyez la note du N°. 28.

Si nous considérons attentivement ce résultat, nous trouverons que le multiplicateur de $\frac{a}{x}$ est $= 0$; il en est de même de celui de $\frac{a^2}{x^2}$; & en poussant plus loin le calcul, on verra facilement que tous les coefficiens des puissances ultérieures de $\frac{a}{x}$ se réduisent à 0 : donc le produit que nous venons de trouver, est $= x^0 \times 1 = 1$: donc la formule réussit encore, lorsque l'exposant est un nombre fractionnaire négatif $-\frac{m}{n}$. Si l'on suppose le dénominateur $n = 1$, l'exposant deviendra $= -m$ c'est-à-dire, que la formule a encore lieu, lorsque l'exposant est un nombre entier négatif.

De ce que nous venons de dire, il suit que la puissance m du binome $a + b$ est $(a + b)^m = (a + b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \&c. = a^m \left(1 + m \cdot \frac{b}{a} + \&c.\right)$, m étant un nombre quelconque positif ou négatif, entier ou fractionnaire.

PROBLEME. *Extraire la racine cubique du nombre 1001.* Je partage ce nombre en deux parties telles, que la premiere soit le plus grand cube contenu dans 1001, c'est ici 1000, cube de 10, l'autre partie sera $= 1$; faisant ensuite $1000 = x$ & $a = 1$, $m = \frac{1}{3}$, j'aurai $(x + a)^{\frac{1}{3}} = (1000 + 1)^{\frac{1}{3}}$ $= (1000)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}(1900)^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{9}(1000)^{-\frac{5}{3}} + \frac{5}{81} \times$

$(1000)^{-\frac{8}{3}}$ — &c. * $= 10 \left[1 + \frac{1}{3} (0 \cdot 001) \right.$ — &c.] Mais quoique ce ne ſoit qu'en prenant une infinité de termes qu'on peut avoir dans cet exemple la racine exacte cherchée ; cependant il eſt aiſé de voir que les termes de la ſérie décroiſſent ſi rapidement qu'on peut ſans erreur ſenſible ſe contenter des quatre premiers, & dans les cas ſemblables l'approximation ſera d'autant plus prompte, que la premiere partie du nombre ou de la quantité algébrique, dont on veut avoir la racine, ſera plus grande par rapport à l'autre. En effet $(a+b)^{\frac{1}{3}}$ eſt $= a^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{3} \frac{b}{a} - \frac{1}{9} \frac{b^2}{a^2} + \text{\&c.} \right)$; or les termes de cette ſuite diminuent d'autant plus rapidement que a eſt plus grand que b. Les ſuites, dont les termes vont en diminuant, s'appellent *convergentes* : celles au contraire, dont les termes vont en en augmentant, ſont nommées *divergentes*, telle ſeroit (en ſuppoſant $a < b$) la ſérie $1 + \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}$ &c.

Si on vouloit prendre la racine quarrée de 2, on en chercheroit une racine approchée, en ſuppoſant, *par exemple*, cette racine $= 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$, dont le quarré $\frac{49}{25}$ eſt plus petit que 2 d'un $\frac{1}{25}$. C'eſt pourquoi on feroit $a = \frac{49}{25}$, $b = \frac{1}{25}$, $m = \frac{1}{2}$, & ſubſtituant ces valeurs dans $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m \cdot (m-1)}{1 \cdot 2} a^{m-2} b^2$ &c. l'on auroit facilement la racine cherchée très-approchée de 2.

* $x^{m-1} a$ eſt ici $= x^{m-1} \times 1 = x^{m-1} = (1000)^{\frac{1}{3}-1} = (1000)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{(1000)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(1000)^2}} = \frac{1}{100} = 0 \cdot 01.$

DES RAISONS ET PROPORTIONS.

40. Un *rapport*, ou une *raiſon*, eſt la maniere d'être d'une grandeur par rapport à une autre grandeur de même eſpece (car on ne peut pas comparer des quantités hétérogènes, ou d'eſpece différente, comme 2 heures & 3 toiſes). Si l'on compare deux grandeurs 6 & 2 pour en connoître la différence, la raiſon eſt appellée *raiſon arithmétique*; mais ſi on cherche combien de fois la premiere grandeur 6 contient la ſeconde 2, le rapport eſt appellé *géométrique*. La premiere de deux grandeurs que l'on compare, s'appelle l'*antécédent*, & la ſeconde le *conſéquent* de la raiſon. Il eſt aiſé de voir que la valeur de la raiſon géométrique ſe trouve en diviſant l'antécédent par le conſéquent; puiſque c'eſt par la diviſion que l'on trouve combien de fois une grandeur contient l'autre. On pourroit prendre pour valeur de la raiſon géométrique le quotient du conſéquent diviſé par l'antécédent: ainſi que le font quelques Géometres; mais il nous paroît bien plus commode de prendre pour la valeur de cette raiſon, le quotient de l'antécédent diviſé par le conſéquent. La valeur de la raiſon arithmétique doit ſe trouver par la ſouſtraction, opération par laquelle on trouve la différence de deux quantités. Quand on parle d'une raiſon, ſans la ſpécifier, on entend toujours parler de la géométrique.

De ce que nous venons de dire, il ſuit que la raiſon de 6 à 2 eſt $=\frac{6}{2}=3$, c'eſt-à-dire, que le quotient 3, qu'on appelle encore l'*expoſant* de la raiſon, indique la maniere dont l'antécédent contient le conſéquent. On peut donc exprimer une raiſon géométrique par une fraction, dont le numérateur ſoit

l'antécédent, & le dénominateur le conséquent : de sorte que la raison de a à b s'exprime ainsi $\frac{a}{b}$, ou bien encore de cette maniere $a : b$; mais la raison arithmétique de a à b s'exprime ainsi $a \cdot b$.

On appelle *proportion* l'égalité de 2 raisons ; la proportion est géométrique, si ces raisons sont géométriques : elle est arithmétique, si les 2 raisons égales sont arithmétiques. Les raisons 12 : 6, 4 : 2, étant égales, formeront une proportion géométrique (en parlant d'une proportion, sans spécifier laquelle, on entend toujours parler de la géométrique) qu'on exprime ainsi 12 : 6 :: 4 : 2, ou bien de cette autre maniere $\frac{12}{6} = \frac{4}{2}$. Les deux raisons arithmétiques égales 7 · 2, 6 · 1 donnent une proportion arithmétique, qu'on écrit ainsi 7 · 2 : 6 · 1. Pour exprimer dans le discours la proportion $a : b :: c : d$, on dit a est à b, comme c est à d ; mais, pour exprimer la proportion arithmétique $g \cdot f : p \cdot m$, on dit g est à f arithmétiquement, comme p est à m. Le premier & le dernier terme d'une proportion s'appellent les *extrêmes*, le second & le troisiéme s'appellent les *moyens*. Si les deux moyens sont les mêmes, comme dans la proportion 12 : 6 :: 6 : 3, la proportion est dite *continue*, on l'exprime ainsi ∺ 12 : 6 : 3. Si la proportion continue a plus de trois termes, elle prend le nom de *progression* : telle est la suite ∺ 16 : 8 : 4 : 2 : 1, qui donne une progression géométrique, ou bien la suite ÷ 12 · 10 · 8 · 6 · 4 · 2 · 0, qui forme une progression arithmétique. La raison s'appelle *double*, lorsque l'antécédent contient deux fois le conséquent ; *triple*, s'il le contient trois fois ; &c. *sous-double*, *sous-triple*, &c. Si l'antécédent ne con-

tient que la moitié, ou le tiers, &c. du conséquent; *sesquialtere*, lorsque l'antécédent contient une fois & demi le conséquent, telle est la raison de 6 : 4; raison d'*égalité* si l'antécédent est égal, raison d'*inégalité* si l'antécédent n'est pas égal au conséquent. *On dit que trois nombres 6, 4, 3 sont en proportion harmonique*, lorsque le premier est au troisiéme, comme la différence du premier au second à la différence du second au troisiéme; de maniere que l'on ait $6 : 3 :: 6 - 4 : 4 - 3$, ou $6 : 3 :: 2 : 1$.

LEMME. *Le produit du conséquent d'une raison par l'exposant de la raison, est égal à l'antécédent.* Car l'antécédent est le *dividende*, le conséquent le *diviseur* & l'exposant le *quotient*; or le produit du diviseur par le quotient est toujours égal au dividende : donc, &c.

COROLLAIRE. Si la raison $\frac{a}{b}$ est $= q$, on aura $a = bq$; de même si $\frac{c}{d} = q$, l'on aura $c = dq$.

41. THÉOREME I. FONDAMENTAL. *Dans toute proportion géométrique* a : b :: c : d, *le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.* Soit la raison $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$: donc par le corollaire précédent $a = bq$, & $c = dq$: donc en mettant dans la proportion précédente bq à la place de a & dq à la place de c on aura la proportion $bq : b :: dq : d$, dans laquelle le produit des extrêmes $bqd = bdq$, produit des moyens; de même dans la proportion $6 : 3 :: 8 : 4$ on a $6 \times 4 = 3 \times 8 = 24$.

42. THÉOREME II. *Si quatre grandeurs* ap, a, bp, b, *sont telles que le produit des extrêmes* ap. b *soit égal*

égal au produit des deux moyennes a·bp, *ces quatre grandeurs seront proportionnelles.* Car si $ap \times b$ est $= a \times bp$, on aura $\frac{ap}{a} = \frac{bp}{b}$, ou $ap : a :: bp : b$; puisque l'exposant de la premiere raison est $= p$, aussi-bien que celui de la seconde.

COROLLAIRE. Donc, si on a deux produits égaux, tels que $adb = abd$, les *racines* de l'un des produits (on entend ici, par racines, les quantités de la multiplication desquelles résulte le produit) seront les extrêmes d'une proportion, dont les racines de l'autre produit seront les moyens, ou ce qui revient au même, les racines de l'un des produits seront *réciproques* à celle de l'autre, c'est-à-dire, que l'on aura ad racine du premier produit, est à a racine du second, comme bd, autre racine du second, est à b, seconde racine du premier produit.

On dit que deux quantités sont *réciproquement* comme deux autres quantités, ou sont en *raison inverse* des deux autres, lorsque, pour trouver la proportion, il faut renverser l'ordre des deux dernieres, ou celui des deux premieres. Ainsi 6 & 3 sont en raison inverse de 1 & 2 : car, pour faire la proportion, en laissant les premieres quantités dans l'état qu'elles sont, il faut, au lieu de la raison de $1 : 2$, prendre celle de $2 : 1$, en disant $6 : 3 :: 2 : 1$.

COROLLAIRE. Il suit du premier théorême que, dans une proportion continue $\div a : b : c$, le produit des extrêmes est égal au quarré du moyen terme, c'est-à-dire, que $ac = b^2$. En effet la proportion précédente est la même que celle-ci $a : b :: b : c$; or (41) ac est $= bb$; donc &c. De même dans la proportion continue $\div 18 : 6 : 2$, on a $18 \times 2 = 36 = 6^2 = 6 \times 6 = 36$.

COROLLAIRE. Si l'on a la proportion $a:b::c:d$, on pourra multiplier ou diviser par une même quantité, les conséquens ou les antécédens, ou même les 2 termes de la premiere ou de la seconde raison, sans détruire la proportion, je veux dire, sans qu'on cesse d'avoir une proportion; car les raisons de la proportion qui résultera de ces opérations, ne seront pas toujours égales à celle de la premiere proportion. Si donc on a la proportion $a:b::c:d$, on aura

I. $am:b::cm:d$ $\qquad \frac{a}{m}:b::\frac{c}{m}:d$. IV

II. $am:bm::c:d$ $\qquad a:bm::c:dm$. V

III. $\frac{a}{m}:\frac{b}{m}::c:d$ $\qquad a:\frac{b}{m}::c:\frac{d}{m}$. VI

car dans toutes ces proportions le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. En effet, pour la premiere, seconde & cinquiéme on a $adm = bcm$, & pour les autres $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$; or cela est évident, car, puisque $a:b::c:d$, on a $ad = bc$: donc $ab \times m = bc \times m$, & $\frac{ad}{m} = \frac{cb}{m}$.

COROLLAIRE. Donc si l'on a la proportion $a:b::c:d$, on pourra faire les changemens suivans, sans qu'il cesse d'y avoir proportion; c'est-à-dire, que si l'on a la proportion $a:b::c:d$, on aura

Alternando. $\qquad a:c::b:d$

Invertendo. $\qquad b:a::d:c$

Componendo.

$a+b:b::c+d:d$

$a+a:b::c+c:d$

$a:a+b::c:c+d$

$a:b+b::c:d+d$

Dividendo, $a - b : b :: c - d : d$.
ou
Subtrahendo. $a : a - b :: c : c - d$

En effet dans ces proportions le produit des extrêmes est égal à celui des moyens, ainsi que nous le verrons bientôt. Il est bon de retenir le nom de ces changemens.

Il est facile de voir que le changement appellé *alternando* consiste à faire changer de place aux moyens; mais dans le changement *invertendo* on met les antécédens à la place des conséquens. Dans le changement *componendo* on compare la somme de l'antécédent & du conséquent de chaque raison à son conséquent, ou l'antécédent à cette même somme, ou bien on double les antécédens ou les conséquens. J'appelle *dividendo* ou *subtrahendo* le changement dans lequel on compare la différence de l'antécédent & du conséquent au conséquent, ou bien dans lequel on compare l'antécédent à la différence dont on vient de parler.

Ces changemens ne détruisent pas la proportion, parce que le produit des extrêmes reste toujours égal à celui des moyens : en effet la proportion $a : b :: c : d$ donne $ad = bc$, & la proportion du changement *alternando* donne $ad = cb$; or il est visible que $bc = cb$; mais la proportion du changement *invertendo* donne $bc = ad$. La premiere proportion du changement *componendo* donne $ad + bd = bc + bd$, en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens; mais $bd = bd$ & $ad = bc$: donc ces deux produits sont aussi égaux. La troisiéme proportion du même changement doit donner $ac + ad = ac + bc$; or cela est évident, parce que $ad = bc$.

La seconde & la quatriéme doivent donner $2ad = 2bc$; ce qui est encore évident, puisque $ad = bc$. La premiere proportion du changement *dividendo* doit donner, si elle est vraie, $ad - bd = bc - bd$. Mais puisque $ad = bc$, ces produits sont évidemment égaux. La seconde proportion du même changement doit donner $ac - ad = ac - bc$: or ces produits sont égaux, puisqu'on ne fait que retrancher deux quantités égales ad & bc de la même quantité ac : donc ces changemens ne détruisent pas la proportion. Cependant, si l'on a la proportion $24 : 12 :: 6 : 3$, le changement *alternando* donnera $24 : 6 :: 12 : 3$ qui est différente de la premiere, puisque la raison de $24 : 6$ est $= 4$, & que celle de $24 : 12$ est seulement $= 2$. Ainsi les changemens dont on vient de parler peuvent changer une proportion en une autre; mais il restera toujours une proportion.

43. THÉORÈME III. *Si deux fractions* $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{d}$ ont *un même numérateur & différens dénominateurs, elles seront en raison inverse de leurs dénominateurs, c'est-à-dire, que la premiere sera à la seconde, comme le dénominateur de la seconde à celui de la premiere, desorte que l'on aura* $\frac{a}{b} : \frac{a}{d} :: d : b$. Cette proportion est vraie; car le produit des extrêmes $\frac{ab}{b} = a$, est égal à celui des moyens $\frac{ad}{d} = a$.

Si les dénominateurs étoient les mêmes & les numérateurs différens, les fractions seroient entre elles comme leurs numérateurs; car $\frac{a}{d} : \frac{c}{d} :: a : c$;

puisque le produit des extrêmes $\frac{ac}{d}$ est $= \frac{ca}{d}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc les fractions sont en raison inverse des dénominateurs & en raison directe des numérateurs.

COROLLAIRE. Donc deux grandeurs *en raison réciproque* l'une de l'autre, c'est-à-dire, dont l'une croît dans le même rapport que l'autre décroît, peuvent se mettre en raison directe, en les mettant au dénominateur d'une fraction, dont l'unité seroit le numérateur : ainsi $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} :: b : a$.

Avant de passer plus loin, nous allons expliquer ce qu'on entend par une *raison composée*. Une raison composée est celle qui résulte de la multiplication de plusieurs raisons, antécédent par antécédent & conséquent par conséquent : ainsi $\frac{ac}{bd}$ est *une raison composée* des deux raisons $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$. En effet soit $\frac{a}{b} = q$, $\frac{c}{d} = p$; donc (40) $a = bq$, $c = dp$: ainsi en substituant ces valeurs à la place de a & de c, on aura $\frac{ac}{bd} = \frac{bdpq}{bd} = pq$, produit des deux raisons ; de sorte que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = q$, l'on aura $\frac{ac}{bd} = q^2$. Lorsqu'il y a deux raisons composantes égales, la raison composée est dite *doublée* ; *triplée* s'il y a trois raisons composantes égales ; *quadruplée*, *quintuplée*, *sextuplée*, &c. s'il y a quatre, cinq, six, &c. raisons composantes égales.

COROLLAIRE. Donc les quarrés sont en raison

ait a : x :: x : b. On aura donc $ab = xx = x^2$, & en prenant la racine quarrée, $\sqrt{ab} = x$, c'eſt-à dire, que la racine quarrée du produit de deux grandeurs eſt moyenne proportionnelle entre ces grandeurs. Si $a = 2$ & $b = 8$, on aura $x = \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$.

49. PROBLEME. *Trouver un terme d'une proportion, dont on connoît les trois autres.* Soit la proportion $a : b :: c : x$, dans laquelle on connoît les trois premiers termes. Pour avoir la valeur du quatriéme x, je remarque que le produit des extrêmes ax eſt $= bc$, produit des moyens : donc en diviſant ces deux produits égaux par la même quantité a, j'aurai $\frac{ax}{a} = \frac{bc}{a}$, ou $x = \frac{bc}{a}$, c'eſt-à-dire, que le quatriéme terme d'une proportion eſt égal au produit des moyens diviſé par le premier extrême. Si $b = c$, c'eſt-à-dire, ſi la proportion eſt continue, on aura $x = \frac{b^2}{a}$: donc pour avoir le troiſiéme terme d'une proportion continue, on diviſera le quarré du moyen terme par le premier extrême.

Si le terme x cherché étoit un des moyens, ſi l'on avoit, *par exemple*, $a : b :: x : d$, on auroit $ad = bx$; & en diviſant de part & d'autre par b l'on trouveroit $x = \frac{ad}{b}$, c'eſt-à-dire, que le moyen cherché ſeroit égal au produit des extrêmes, diviſé par le moyen connu.

REMARQUE. Lorſqu'on a une fraction $\frac{ad}{b}$, on peut toujours faire une proportion, en prenant pour premier extrême le dénominateur de la fraction, & pour moyens les facteurs du numéra-

teur : car $b : a :: d : \frac{ad}{b} = x$. De même de la fraction $\frac{6}{2} = \frac{2 \times 3}{2}$ l'on tire $2 : 3 :: 2 : \frac{6}{2} = 3$. La fraction $\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2}$ donne $2 : 1 :: 1 : \frac{1}{2}$.

Le problême qu'on vient de résoudre, renferme la regle *de trois*, qu'on appelle aussi *regle d'or*, à cause de sa grande utilité: c'est la méthode de trouver un terme d'une proportion dont on connoît les trois autres.

EXEMPLE. Trente Grenadiers ont fait 24 toises de tranchée, combien en feront 50 Grenadiers dans un tems égal. Il est évident que, plus il y a d'hommes, plus ils doivent faire d'ouvrage dans le même tems : ainsi l'on doit dire 30 Grenadiers sont à 50 Grenadiers, comme les 24 toises faites par les premiers, au nombre de toises que feront les derniers dans le même tems ; ou $30^g : 50^g :: 24^t : x^t$: donc il faut, pour avoir la valeur de x, multiplier 50 par 24, & diviser le produit 1200 par 30, pour avoir $x = \frac{1200}{30} = 40$; c'est-à-dire, que dans le le même tems, ou dans un tems égal, 50 Grenadiers feront 40 toises de tranchée, en supposant que 30 en ont fait 24.

Lorsque les termes *homogènes*, c'est-à-dire, de même espece dans la premiere raison, sont entr'eux comme ceux de la seconde & qu'il n'y a que trois termes de connus, la regle de trois s'appelle *directe simple* ; s'il y a plus de trois termes connus, c'est alors la regle de trois *composée*. Il faut dans ce cas la réduire à trois termes connus & un inconnu.

EXEMPLE. Trois hommes en travaillant sept heures par jour, ont fait en deux jours 84 toises d'un ouvrage, combien en feront 5 hommes en trois jours, en travaillant quatre heures par jour. Arran-

gez les termes comme vous le voyez; multipliez 3

$$\begin{array}{llll} 3^{h} & : 5^{h} & & \\ 2^{\text{jours.}} & : 3^{\text{jours.}} & :: 84 & : x \\ 7^{\text{heures.}} & : 4^{\text{heures.}} & & \\ \hline 42 & : 60 & :: 84 & : x = \frac{60 \times 84}{42} = 120 \end{array}$$

par 2 & par 7, pour avoir 42; multipliez 5 par 3 & par 4, pour avoir 60 : faites ensuite la proportion $42 : 60 :: 84 : x = 120$: donc le nombre cherché est 120. La raison de ce procédé est fort simple, c'est que trois hommes, qui travaillent pendant deux jours & sept heures par jour, font le même ouvrage qu'un seul homme qui travailleroit pendant 42 heures; de même cinq hommes qui travaillent pendant 3 jours & 4 heures par jour font le même travail qu'un seul homme qui travailleroit pendant 60 heures; de sorte que le travail de ces hommes est en raison composée du nombre des hommes, du nombre des jours & des heures que ces hommes travaillent.

Lorsque les deux derniers termes ne sont pas entr'eux comme les deux premiers, c'est alors la *regle de trois inverse*.

EXEMPLE. Quatre hommes ont fait un ouvrage en trois jours; en combien de jours cinq hommes feront-ils le même ouvrage? Il est évident qu'on ne peut pas dire $4^{h} : 5^{h} :: 3^{j} : x$, autrement le terme cherché x seroit plus grand que 3, comme 5 est plus grand que 4; or cela ne peut être, parce que cinq hommes emploieront moins de tems au même ouvrage que quatre hommes. Et parce que le tems employé par 4 hommes, est au tems employé par 5 hommes, comme x est à 3, à cause que

plus il y a d'hommes, moins il faudra de tems, on doit faire $4^b : 5^b :: x : 3$; donc l'on aura $5x = 12$, & $x = \frac{12}{5} = 2$ jours $+ \frac{2}{5}$ de jour $= 2$ jours 9 heures 36 minutes.

Queſtion qui renferme ce qu'on appelle la regle de *compagnie. Trois marchands ont fait un fond de 1200 liv. ſur lequel ils ont gagné 240 liv. combien revient-il au premier, dont la miſe eſt de 200 liv. au ſecond, dont la miſe eſt de 400 liv. & au troſiéme, dont la miſe eſt de 600 livres?* Ce problême ſe réſout par autant de regles de trois, qu'il y a de miſes, en diſant le fond total eſt au gain total, comme la miſe d'un chacun eſt au gain qui lui revient : de ſorte que l'on aura ces trois proportions

	Gain
$1200 : 240 :: 200 : x =$	40 du premier.
$1200 : 240 :: 400 : x =$	80 du ſecond.
$1200 : 240 :: 600 : x =$	120 du troiſiéme.

AUTRE EXEMPLE. *Trois marchands, Pierre, Jacques & Paul, ont mis en commerce, le premier 357 liv. pour quinze mois ; le ſecond 1071 liv. pour trois mois ; le troiſiéme 153 liv. pour neuf mois : le gain total eſt de 9631 liv. Quel eſt le gain d'un chacun?* Multipliez la miſe d'un chacun par le tems que cette miſe a reſté dans le commerce, parce que plus la miſe eſt grande & plus le tems qu'elle reſte dans le commerce eſt conſidérable, plus le gain à proportion doit être grand : prenez la ſomme des produits, que vous conſidérerez comme la miſe totale, faites enſuite comme cette ſomme eſt au gain total : ainſi le produit de chaque miſe, par le tems qu'elle a reſté dans le commerce, eſt au gain correſpondant.

PROBLEME qui renferme la regle *d'escompte. Pierre achete à Jacques, à un an de terme, pour 1000 liv. de marchandises; Jacques offre à Pierre de lui remettre 10 pour 100, s'il veut le payer comptant : on demande le gain de Pierre?* Il paroît d'abord que le marchand ne doit recevoir comptant que 900 livres; mais il faut remarquer que la somme que recevra actuellement le marchand, doit à 10 pour 100 rendre 1000 liv. au bout de l'année (en comprenant ensemble le capital & ses intérêts) : ainsi il faut dire $100 + 10 : 100 :: 1000$ l. $: x =$ 909 l. 1 s. 9 d. $\frac{1}{11}$d.; de sorte que le profit de Pierre sera seulement de 90 liv. 18 s. 2 d. $\frac{2}{11}$d. Si Jacques ne recevoit comptant que 900 liv. cet argent à 10 pour 100 ne lui donneroit au bout de l'an que 990 liv: ainsi son sort seroit plus heureux d'attendre les 1000 liv. au bout de l'année. Cette pratique est celle de le Gendre & de Savari. Disons quelque chose de la regle de *fausse position.*

La regle de *fausse position* consiste à mettre à la place des termes inconnus d'autres termes à volonté, mais cependant proportionnels à ces termes inconnus, afin de trouver ces termes par des regles de trois.

EXEMPLE I. On propose de partager 1300 liv. entre Pierre, Jean & Jacques, ensorte que Pierre ait cinq fois plus que Jean & Jean deux fois plus que Jacques. Soit supposé 1 la part de Jacques, celle de Jean sera 2 & celle de Pierre 10, la somme seroit 13 : ainsi on dira si 13 donnent 10 pour Pierre, combien donneront 1300 pour le même Pierre, & ainsi des autres. On aura donc ces trois regles de trois.

	Part de
$13 : 1300 :: 10 : x = 1000$	Pierre
$13 : 1300 :: 2 : x = 200$	Jean
$13 : 1300 :: 1 : x = 100$	Jacques.

EXEMPLE II. Soit proposé de partager 173 liv. à trois personnes, de maniere que la seconde ait le double de la premiere & 10 l. de plus, & que la troisiéme ait autant que les deux autres & 3 liv. de plus. Supposons que la part de la premiere soit 1 liv. celle de la seconde, dans cette hypothèse, seroit 2 l. + 10 l. = 12 l. & celle de la troisiéme seroit 13 liv. + 3 liv. = 16 liv. La somme de ces parties seroit = 29 liv. S'il n'eût été question que de partager en parties proportionnelles à 1 liv., 2 liv., 3 liv. La premiere part seroit 1 l. la seconde 2 liv. la troisiéme 3 liv. la totalité seroit 6 liv. dont la différence avec 29 liv. est 23 liv. qu'il faut prélever sur la somme proposée 173 liv. & partager le reste 150 liv. en parties proportionnelles à 1 liv. 2 liv. 3 liv. On aura donc cette regle de trois $6 : 1 :: 150 : x = 25$ liv. premiere partie ; doublant cette partie, & ajoutant 10 liv. on aura 60 liv. pour la seconde partie ; ajoutant ces deux parties avec 3 liv. on aura 88 liv. pour la troisiéme partie : en effet ces trois parties font 173 liv. Ce second exemple renferme la regles de deux *fausses positions*.

DES PROGRESSIONS GEOMETRIQUES.

50. Nous supposerons pour plus de facilité, premiérement que les progressions sont croissantes; secondement que le quotient du premier terme divisé

deurs), on aura $Sap - apx + apx - Sa = Sa + apx - Sa - a^2$, ou (en réduisant) $Sap - Sa = apx - a^2$, divisant ces deux dernieres quantités par a, l'on aura les quotiens égaux $Sp - S = px - a$, & divisant encore par $p - 1$, on a $S = \frac{px - a}{p - 1}$, c'est-à-dire, que la somme de tous les termes d'une progression croissante, est égale au produit du plus grand terme par l'exposant de la progression, moins le plus petit terme, le tout divisé par l'exposant, diminué d'une unité.

COROLLAIRE. Donc la somme

				sera
Des moitiés	$\frac{1}{2}$,	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{8}$ ...... o	$= 1$.
Celle des tiers	$\frac{1}{3}$,	$\frac{1}{9}$,	$\frac{1}{27}$ ..... o	$= \frac{1}{2}$.
Celle des quarts	$\frac{1}{4}$,	$\frac{1}{16}$,	$\frac{1}{64}$ .... o	$= \frac{1}{3}$.
Celle des dixiémes	$\frac{1}{10}$,	$\frac{1}{100}$,	$\frac{1}{1000}$ .... o	$= \frac{1}{9}$.

Car, en regardant le premier terme comme le dernier, o sera le premier terme, p sera 2 dans la premiere progression 3 dans la seconde, 4 dans la troisiéme, 10 dans la quatriéme: donc pour la premiere $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{2 \times \frac{1}{2} - 0}{2 - 1} = \frac{1}{1} = 1$; pour la seconde $\frac{px - a}{p - a} = \frac{3 \times \frac{1}{3} - 0}{3 - 1} = \frac{1}{2}$; pour la troisiéme $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{1}{3}$; & pour la quatriéme $\frac{px - a}{p - 1} = \frac{1}{9}$ & ainsi de suite. On trouvera donc la somme de toutes parties quelconques de l'unité, dont la suite sera une progression géométrique, en retranchant l'unité du dénominateur du premier terme de la suite.

54. THÉOREME XI. *Dans une progression géométrique*

trique $\div\!\div$ a : ap : ap² : ap³ &c. *Premiérement les sommes ; secondement les différences ; troisiémement les produits des termes immédiatement consécutifs sont en progression géométrique.* Car on a

$\div\!\div a + ap : ap + ap^2 : ap^2 + ap^3$ &c.

$\div\!\div a - ap : ap - ap^2 : ap^2 - ap^3$ &c.

$\div\!\div a^2 p : a^2 p^3 : a^2 p^5$ &c.

Ce qui est évident ; car chacun des termes de ces suites, est égal à celui qui le précéde immédiatement, divisé par $\frac{1}{p}$.

55. THÉOREME XII. *Dans une progression géométrique les puissances de même nom sont en progression.* Soit toujours la progression $\div\!\div a : ap : ap^2 : ap^3$ &c. je dis que l'on aura la progression $\div\!\div a^m : a^m p^m : a^m p^{2m} : a^m p^{3m}$ &c. Ce qui est évident, car chaque terme est égal à celui qui les précéde, divisé par $\frac{1}{p^m}$. Si on suppose $m = \frac{1}{2}$, on aura $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{2}} p$ &c., c'est-à-dire, que les racines quarrées des termes consécutifs sont en progression, & il en est de même des racines cubes & autres quelconques.

56. THÉOREME XIII. *Dans une progression géométrique, le premier terme est au troisiéme, comme le quarré du premier au quarré du second ; le premier est au quatriéme, comme le cube du premier au cube du second.* Car $a^2 : a^2 p^2 :: a : ap^2$; puisque le produit des extrêmes est égal au produit des moyens. De même $a^3 : a^3 p^3 :: a : ap^3$; car le produit des extrêmes est encore égal à celui des moyens. En général le premier terme est à un terme quelconque du rang n, comme la puissance $n-1$ du premier terme à la puissance $n-1$ du second terme. En effet le terme du rang n est $= ap^{n-1}$ (51) ; or a :

ap^{n-1} :: $a^{n-1} : a^{n-1} p^{n-1}$: car le produit des extrêmes $a\, p^{n-1} = a^n p^{n-1}$, produit des moyens.

COROLLAIRE. Donc la raiſon du premier terme au troiſiéme eſt doublée, & la raiſon du premier terme au quatriéme eſt triplée de la raiſon du premier au ſecond, puiſque $\frac{a}{ap^2} = \frac{a^2}{a^2 p^2}$, & que $\frac{a}{ap^3} = \frac{a^3}{a^3 p^3}$.

57. PROBLEME. *Trouver deux moyens proportionnels* x, y, *entre deux quantités données* a & d, *c'eſt-à-dire, qu'ayant la progreſſion* ∺ a : x : y : d, *on cherche la valeur de* x & *de* y. Par le théorême précédent on a $a^3 : x^3$ :: $a : d$; donc $a^3 d = x^3 a$, & en diviſant le tout par a, il vient $a^2 d = x^3$, & en prenant la racine cubique, on a $x = \sqrt[3]{a^2 d}$, c'eſt-à-dire, que pour avoir la première moyenne proportionnelle, il faut extraire la racine cube du produit du quarré de la premiere quantité donnée a par la ſeconde d. Pour avoir y ou la ſeconde moyenne proportionnelle, on diviſera le quarré x^2 de la premiere par la premiere quantité a, parce que la proportion continue $a : x$ :: $x : y$, donne $y = \frac{xx}{a}$. Si $a = 1$ & $d = 16$, on aura $x = \sqrt[3]{4 \times 16} = \sqrt[3]{64} = 4$, & $y = 8$. Mais ſi la quantité $a^2 d$ n'étoit pas un cube parfait, on ne pourroit avoir qu'une valeur approchée de x & de y : on pourroit pour cela ſe ſervir du calcul décimal.

58. PROBLEME. *Inſérer un nombre* m *de moyens proportionnels géométriques entre deux termes* a & b. Soit x le premier moyen proportionnel cherché; puiſque le nombre de tous les termes, en y com-

prenant a & b doit être $m + 2$. On aura par le théorême précédent $a : b :: a^{m+1} : x^{m+1}$, & par conséquent $ax^{m+1} = ba^{m+1}$. Divisant de part & d'autre par a, il vient $x^{m+1} = ba^{m}$; donc en prenant la racine $m+1$, $x = \sqrt[m+1]{ba^{m}} = b^{\frac{1}{m+1}} a^{\frac{m}{m+1}}$, que je suppose $= c$. Le premier moyen proportionnel étant trouvé, pour avoir le second, on divisera le quarré du premier par la quantité a, ou ce qui revient au même, on multipliera le second par le dénominateur du quotient du premier terme a de la progression, divisé par le second terme c, de sorte que, si ce quotient est $\frac{1}{p}$, ce qui donnera dans ce cas $c = ap$, on multipliera ap par p, pour avoir ap^2, second moyen proportionnel; & en multipliant celui-ci par p, on aura le troisiéme, & ainsi de suite.

Mais, pour insérer un nombre quelconque m de moyens proportionnels entre deux termes d'une progression $\div a : aq : aq^2$ &c. $= \div aq^0 : aq : aq^2$ &c. divisez la différence 1 qui regne entre les exposans 0, 1, 2, &c. de la quantité q (exposant de la progression) par $m+1$, & vous aurez le premier moyen proportionnel cherché, en ajoutant $\frac{1}{m+1}$ au premier exposant 0 (de q); ensuite pour avoir le second moyen proportionnel cherché, vous ajouterez encore $\frac{1}{m+1}$ à l'exposant de q dans le terme précédent, & ainsi de suite. Si donc, $m = 2$, pour insérer deux proportionnels entre deux termes consécutifs de la progression ci-dessus, on fera $\div aq^0 : aq^{\frac{1}{3}} : aq^{\frac{2}{3}}$:

$aq^{1} : aq^{\frac{4}{3}}$ &c. ce qui eſt évident, puiſque chaque terme eſt égal à celui qui les précéde, diviſé par $\frac{1}{q^{\frac{1}{3}}}$.

59. Avant de paſſer aux progreſſions arithmétiques, nous allons dire un mot de ce qu'on appelle les *expoſans d'une raiſon*. Les *expoſans d'une raiſon* ſont les plus petits termes, qui aient entr'eux le même rapport que les termes de la raiſon dont ils ſont les expoſans. *Par exemple*, les expoſans de la raiſon $\frac{3}{6}$ ſont $\frac{1}{2}$, parce que 1 & 2 ſont les plus petits termes qui aient entr'eux le même rapport que 3 & 6. De-là il ſuit que ſi l'on a deux ou pluſieurs raiſons égales, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = p$, le produit de ces raiſons $\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = p^2$, ſera un nombre quarré, ſi p eſt un nombre; de même en ſuppoſant $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = p$, on aura $\frac{ace}{bdf} = \frac{a^3}{b^3} = p^3$, qui ſera un nombre cube, ſi p eſt un nombre. Donc une raiſon compoſée de deux raiſons égales, c'eſt-à-dire, une raiſon doublée ſera exprimée par un nombre quarré, & une raiſon triplée par un nombre cube, ſi une des raiſons compoſantes a pour valeur un nombre, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'une des raiſons compoſantes a pour expoſant des nombres; car la raiſon qui ſe trouve entre le quarré de l'antécédent & celui du conſéquent d'une des raiſons compoſantes égales, eſt égale à la raiſon qu'il y a entre le produit des antécédens, & celui des conſéquens des raiſons compoſantes égales; de même la raiſon qu'il y a entre le cube de l'antécédent & celui du

conséquent d'une des raisons composantes égales, est la même que la raison qu'ont entr'eux les produits des antécédens & des conséquens des trois raisons composantes, ainsi qu'il suit de ce que nous venons de dire : donc, si la raison $\frac{a^2}{b^2}$ est $= \frac{3}{5}$, la raison $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ sera $= \frac{a}{b}$; or $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ n'est pas un nombre, puisqu'il n'est pas possible d'exprimer un nombre sourd par un nombre (38) : donc la raison de $3:5$ n'est pas doublée des raisons de nombre à nombre. de même faisant $\frac{a^3}{b^3} = \frac{2}{3}$, à cause que $\frac{2}{3}$ n'est pas un cube, la raison $\frac{a}{b}$ ou $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}$, n'est pas triplée d'une raison de nombre à nombre; ces sortes de raisons sont appellées *sourdes* : ainsi, en supposant $\frac{a^3}{b^3} = 2$, la raison $\frac{a}{b}$ sera sourde, parce que 2 qui est ici p^3, en faisant $\frac{a^3}{b^3} = p^3$ & $\frac{a}{b} = p$, n'étant pas un nombre cube, p ou $\sqrt[3]{2}$ n'est pas un nombre.

DES PROPORTIONS ET PROGRESSIONS ARITHMETIQUES.

60. La raison arithmétique qui se trouve entre deux grandeurs a & b n'étant autre chose que la différence qu'il y a entre ces deux grandeurs (40), il s'ensuit qu'en appellant d cette différence, la raison arithmétique de $a \cdot b$ sera $= a \cdot a \pm d$. Le signe $+$ a lieu lorsque l'antécédent est plus petit que son conséquent, & le signe $-$, lorsque l'antécédent est plus grand que son conséquent. La raison en est facile, lorsque le conséquent est plus grand que

l'antécédent de la quantité d, il doit être égal à cet antécédent, plus à la quantité d; mais il doit être égal à cet antécédent moins la quantité d, s'il est plus petit de la même quantité d: ainsi dans la raison arithmétique de 6 à 4, le conséquent 4 est égal à l'antécédent 6, moins la différence 2; au contraire dans la raison de 4 à 6, le conséquent 6 est égal à l'antécédent 4 augmenté de la différence 2.

61. PROPOSITION FONDAMENTALE. *Toute proportion arithmétique* $a \cdot b : c \cdot f$ *peut se représenter par cette formule* $a \cdot a \pm d : c \cdot c \pm d$. Cela est évident, puisque la différence de c à f doit être la même que celle de a à b, autrement la premiere raison ne seroit pas égale à la seconde, & par conséquent il n'y auroit pas de proportion.

COROLLAIRE I. *Donc la somme des extrêmes dans une proportion arithmétique est égale à la somme des moyens.* En effet la somme des extrêmes $a + c \pm d = a \pm d + c$, somme des moyens. Si l'on a proportion continue $\div a \cdot b \cdot c$, la somme des extrêmes sera égale au double du moyen terme : en effet cette proportion revient à celle-ci $\div a \cdot a \pm d \cdot a \pm 2d$, dans laquelle la somme des extrêmes $a + a \pm 2d = 2a \pm 2d$, double du moyen terme. De même dans les nombres, si l'on a $5 \cdot 2 : 6 \cdot 3$, on aura $5 + 3 = 6 + 2$; & si l'on a $\div 6 \cdot 4 \cdot 2$, l'on aura $6 + 2 = 4 + 4 = 8$.

COROLLAIRE II. Donc, pour trouver un moyen proportionel arithmétique entre a & b, il faut prendre la moitié de la somme de a & de b. Car soit x ce terme cherché, l'on aura $\div a \cdot x \cdot b$, & $a + b = 2x$; donc $x = \frac{a+b}{2}$.

COROLLAIRE III. Pour connoître le quatriéme

terme d'une proportion arithmétique, dont on connoît les trois autres, il faut de la somme des moyens ôter l'extrême connu ; & si c'est un des moyens qu'on cherche, l'on ôtera le moyen connu de la somme des extrêmes. Car soit x le terme cherché, on aura dans le premier cas $a \cdot b : c \cdot x$, & par la proposition précédente $a + x = b + c$: donc retranchant de part & d'autre la quantité a, on aura $x = b + c - a$. Dans le second cas on a la proportion $a \cdot b : x \cdot c$, ou $a \cdot x : b \cdot c$; mais $a + c = x + b$: donc $a + c - b = x + b - b = x$. Si c'étoit un troisiéme moyen proportionnel arithmétique qu'on demandât, l'on auroit $\div a \cdot b \cdot x$, & $a + x = 2b$, & par conséquent $x = 2b - a$.

COROLLAIRE IV. *Toute progression arithmétique ascendante, (c'est-à-dire, dont les termes vont en croissant)* $\div$ a · b · c · e · *&c. peut être représentée par cette formule* $\div$ a · a + d · a + 2d · a + 3d · a + 4d *&c.* En effet il doit y avoir une même différence d entre le premier & le second terme, le second & le troisiéme, &c. sans quoi il n'y auroit point de progression ; donc la différence d étant ajoutée à chaque terme, doit donner le terme suivant, puisque nous supposons la progression croissante : donc, &c.

COROLLAIRE V. Il suit du dernier corollaire qu'un terme quelconque d'une telle progression est égal au premier, plus la différence d multipliée par le nombre des termes précédens. En effet le quatriéme terme, *par exemple*, est $= a + 3d$: donc appellant n le nombre total des termes, x le dernier terme, a le premier terme, l'on aura $x = a + d \times (n - 1)$, ou $x = a + nd - d$: ainsi, si le pre-

mier terme eſt 1, la différence 3 & le nombre des termes 5, l'on aura le cinquiéme terme $x = 1 + 15 - 3 = 13$.

COROLLAIRE VI. Donc pour inſérer un nombre quelconque m de moyens proportionnels aithmétiques entre deux termes donnés, il faut diviſer leur différence par $m + 1$, & le quotient ſera la différence cherchée d, qui ajoutée au premier terme, donnera le ſecond & ajoutée au ſecond, donnera le troiſiéme, &c. *Par exemple*, pour inſérer trois moyens arithmétiques entre a & $a + 4d$, je diviſe la différence $4d$ par $m + 1 = 3 + 1 = 4$, le quotient d eſt la différence cherchée, qui, ajoutée au premier terme, donnera le ſecond $a + d$, &c.

COROLLAIRE VII. Donc entre le premier extrême & un terme quelconque il y a la même différence, qu'entre un autre terme quelconque & le dernier extrême, pourvu que les 2 derniers termes ſoient autant éloignés l'un de l'autre, que les 2 premiers, ce qui fait que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des deux termes, également éloignés de ces extrêmes, ou au double du terme du milieu, lorſque le nombre des termes eſt impair. En effet dans la progreſſion $\div a \cdot a + d \cdot a + 2d \cdot a + 3d \cdot a + 4d$, l'on a $a \cdot a + d : a + 3d \cdot a + 4d$; or il eſt viſible que la ſomme des extrêmes de cette progreſſion, ſavoir, $2a + 4d$ eſt $= 2a + 4d$, ſomme des moyens $= 2a + 4d$ double du terme du milieu.

COROLLAIRE VIII. *Donc en multipliant la ſomme des extrêmes par la moitié du nombre des termes, l'on aura la ſomme de tous les termes.* Cela ſuit du corollaire précédent; puiſque, quand le nombre des termes eſt pair, la progreſſion contient autant

de fois la somme des extrêmes, qu'il y a de fois 2 termes ; mais quand le nombre des termes est impair, il faut ajouter la valeur du terme milieu, qui est égal à la moitié de la somme des extrêmes. C'est d'ailleurs ce qu'on voit aisément dans la progression $\div a \cdot a+d \cdot a+2d \cdot a+3d \cdot a+4d$, dont la somme est égale à la somme des extrêmes $(2a+4d) \times \frac{5}{2}$. En général, appellant S la somme de tous les termes, a le premier, x le dernier terme, n le nombre des termes d'une progression arithmétique, on aura $S=(a+x) \times \frac{n}{2} = \frac{na+nx}{2}$.

COROLLAIRE IX. Il suit de-là que si la progression arithmétique étoit celle des nombres naturels 1, 2, 4, 5, &c. & qu'elle commençat par l'unité, $S=\frac{na+nx}{2}$ seroit $S=\frac{x+x^2}{2}=\frac{n+n^2}{2}$; car alors $x=n$ & $a=1$. Si la progression des nombres naturels commençoit par 0, & qu'on eût 0, 1, 2, 3, &c. alors n seroit $=x+1$ & $S=\frac{na+nx}{2}$, seroit $=\frac{0+(x+1)\times x}{2}=\frac{x^2+x}{2}$.

DES LOGARITHMES.

62. Dans une progression géométrique, dont les termes sont affectés d'exposans, ces exposans sont en progression arithmétique. *Par exemple*, si l'on a $\div\div a^0 : a^1 : a^2 : a^3 : a^4 : a^5$ &c. A. Les exposans formeront la progression arithmétique $\div 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ &c. B. On appelle *Logarithmes* les termes d'une progression arithmétique, correspondans à ceux d'une progression géométrique : ainsi les termes de la progression B sont les logarithmes des termes correspondans de la pro-

greſſion A ; 3, *par exemple*, eſt le logarithme de a^3, o celui de $1 = a^0$.

De-là il ſuit, en ſe ſervant des progreſſions A & B, premiérement que pour avoir le logarithme du produit de deux quantités, il faut prendre la ſomme de leurs logarithmes ; *par exemple*, pour avoir le produit de a^2 par a^3, j'ajoute enſemble le logarithme du multiplicande avec celui du multiplicateur, la ſomme 5 donne le logarithme du produit a^5.

COROLLAIRE. Donc, pour multiplier deux nombres l'un par l'autre, il ſuffit de prendre la ſomme de leurs logarithmes. On voit auſſi que pour diviſer un nombre a^5 par un autre nombre a^3, il ſuffit d'ôter le logarithme du diviſeur de celui du dividende, la différence 2 ſera le logarithme du quotient a^2. Pour élever a^2, *par exemple*, à une puiſſance quelconque, il faudroit multiplier l'expoſant 2 de a par l'expoſant de la puiſſance ; or il ſuffit de multiplier le logarithme de a^2 par l'expoſant de la puiſſance, le produit donnera le logarithme de la puiſſance propoſée ; de ſorte que ſi c'eſt la troiſiéme puiſſance, en multipliant 2 par 3, on aura 6, logarithme de a^6, troiſiéme puiſſance de a^2.

Si l'on vouloit avoir la racine troiſiéme de a^6, on diviſeroit l'expoſant 6 de a par l'expoſant de la racine pour avoir l'expoſant 2 de a^2, racine troiſiéme de a^6 ; or il ſuffit de diviſer le logarithme de a^6 par l'expoſant 3 de la racine troiſiéme pour avoir le logarithme 2 de la racine cherchée a^2.

COROLLAIRE. De ce que nous venons de dire il ſuit que pour avoir la racine d'un nombre quelconque, il faut diviſer le logarithme de ce nombre

par l'exposant de la racine proposée, le résultat donnera le logarithme de la racine cherchée.

Pour faire une regle de trois directe par le moyen des logarithmes, ajoutez ensemble les logarithmes des moyens, retranchez de la somme le logarithme du premier extrême, & vous aurez le logarithme de l'extrême cherché. Ainsi, pour trouver le quatriéme terme de cette proportion $a^1 : a^3 :: a^4 : x$, j'ajoute ensemble les logarithmes de a^3, & de a^4, de leur somme 7, je retranche le logarithme 1 du prepremier terme, le reste 6 est logarithme du quatriéme terme cherché a^6; donc, pour trouver le quatriéme terme de cette proportion 341 : 428 :: 5797 : x, j'ajoute les logarithmes des moyens que je trouve dans les tables *.

2 · 631444	Log.	de	428
3 · 763203	Log.	de	5797
6 · 394647	Somme		
2 · 532754	Log.	de	341
3 · 861893	Log.	de	$x = 7276$

de leur somme je soustrais le logarithme du premier terme, il me reste le logarithme du dernier terme. Cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté 7276, nombre cherché. Tout cela est fondé sur ce que, pour avoir le quatriéme terme d'une proportion, dont on connoît les moyens & un des extrêmes, il faut diviser le produit des moyens par l'extrême connu. Si l'on connoissoit un moyen & les deux extrêmes, de la somme des logarithmes

* Les Tables sont des ouvrages, dans lesquels à côté d'un nombre on trouve son logarithme, & réciproquement : elles sont plus ou moins étendues. Je me suis servi dans cet exemple de celles de M. de la Caille.

des extrêmes on ôteroit le logarithme du moyen connu, & l'on auroit le logarithme du moyen cherché.

En supposant $a = 10$, nous aurons les progressions géométrique & arithmétique qu'on voit ici.

Prog. géom. des Tab.	Prog. arithm.
1	0 = 0·000000
10	1 = 1·000000
100	2 = 2·000000
1000	3 = 3·000000
10000	4 = 4·000000
&c.	&c. = &c.

Pour avoir les logarithmes des nombres 2, 3, 4, &c. qui se trouvent entre 1 & 10, & ceux des nombres qui se trouvent entre 10 & 100, &c. il faut prendre une puissance de 10 égale à chacun de ces nombres, l'exposant de cette puissance sera le logarithme du nombre correspondant. Or on conçoit que si l'on inséroit un grand nombre de moyens proportionnels géométriques entre 1 & 10 : *par ex.* il s'en trouveroit un égal, ou à peu près égal au nombre 2, au nombre 5, &c. Et en insérant un pareil nombre de moyens arithmétiques entre les exposans 0 & 1 ; celui qui répondroit au nombre 2, seroit l'exposant de la puissance de 10 égale au nombre 2, & seroit par conséquent le logarithme de 2 : *par exemple*, pour trouver le logarithme de 3 avec six décimales, j'ajoute douze 0 au nombre 10 ; & prenant la racine quarrée de ce résultat avec 6 décimales, à cause des 0 que j'ai ajoutés, je trouve 3·162277, moyen géométrique, auquel répond l'exposant de la racine quarrée, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, ou 0·500000, moyen arithmétique entre 0 & 1. Le moyen géométrique trouvé étant plus grand que 3, j'en cherche un autre entre celui-ci & 1, c'est-à-dire que je prends avec 6 décimales la racine du nombre

que je viens de trouver pour avoir 1·778279 < 3, le moyen arithmétique correſpondant eſt 0·250000, moyen arithmétique entre 0, logarithme de 1, & 0·500000 logarithme du premier moyen géométrique ci-deſſus. Le moyen géométrique que nous venons de trouver étant trop petit, j'en cherche un autre entre celui-ci & le premier, ce qui ſe fait en prenant la racine de leur produit (23), & ce n'eſt qu'après dix-neuf multiplications (en y comprenant les multiplications ſous-entendues que nous avons faites, en prenant le premier moyen proportionnel, auſſi-bien que le ſecond avec 6 décimales; car ajouter 12 zéros, c'eſt la même choſe que multiplier par 1 ſuivi de 12 zéros) & autant d'extractions qu'on trouve le moyen géométrique 3·000000, & le moyen arithmétique correſpondant ou le logarithme 0·477121 de 3. A la vérité on a maintenant des méthodes plus expéditives pour avoir les logarithmes; mais en voilà aſſez pour donner une idée de la méthode qu'on peut ſuivre pour conſtruire une table de logarithmes. Au reſte les logarithmes ne ſont la plupart qu'approchés, de ſorte qu'il peut y avoir une erreur d'environ une demi-unité de décimale du ſixiéme ordre *. Ayant le logarithme de 2 & de 3, il eſt aiſé d'avoir celui de leur produit 6, en ajoutant enſemble les logarithmes du multiplicande & celui du multiplicateur.

REMARQUE I. On appelle *caractériſtique* d'un logarithme le nombre qui ſe trouve devant le point. Ce nombre indique à quelle claſſe des unités, *par*

* Il y a cependant des tables dans leſquelles les logarithmes ſont exprimés par un plus grand nombre de décimales; mais celles de M. de la Caille ſont ſuffiſantes pour les uſages ordinaires.

exemple, des dixaines ou centaines appartient le nombre. On voit que la caractéristique des logarithmes des nombres, depuis 1 jusqu'à 10 est 0, 1 depuis 10 jusqu'à 100, 2 depuis 100 jusqu'à 1000, &c. En général un nombre contient autant de chiffres & un de plus qu'il y a d'unités dans la caractéristique de son logarithme *.

REMARQUE II. C'est la même chose de multiplier un nombre par 10 ou d'ajouter une unité à la caractéristique de son logarithme, & en général on multiplie autant de fois un nombre par 10, qu'on ajoute d'unités à la caractéristique de son logarithme : comme aussi l'on divise un nombre autant de fois par 10 qu'on ôte d'unités de la caractéristique de son logarithme.

Pour avoir la racine d'un nombre, on doit, selon ce que nous avons dit ci-dessus, diviser le logarithme de ce nombre par l'exposant de la racine. Soit donc proposé de prendre la racine septiéme de 128 ; cherchant ce nombre dans les tables, à côté je trouve son logarithme 2·107210, qui, étant divisé par 7, donne 0·301030 ; cherchant ce logarithme dans les tables, je trouve à côté le nombre 2, racine septiéme de 128. Pour avoir le logarithme d'une fraction, *par exemple*, de la fraction $\frac{3}{4}$, il faut retrancher le logarithme du dénominateur 4 de celui du numérateur 3, le reste $-$ 0·124939 sera le logarithme cherché ; ce qui fait voir que les logarithmes négatifs indiquent des fractions plus petites que l'unité : en effet, si l'on continue en descendant la progression $\div\!\div a^3 : a^2 : a^1 :$

* Comme 2, logarithme de 100, est l'exposant de la puissance de 10 (c'est-à-dire du quarré) qui donne 100 ; de même 0.477121 est l'exposant de la puissance de 10, qui donne 3.

$a^0 : a^{-1} : a^{-2}$, &c. les expoſans -1, -2 ſeront les logarithmes de $a^{-1} = \frac{1}{a}$, de $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

Pour trouver le logarithme d'un nombre entier joint à une fraction, *par ex.* de $3 + \frac{2}{5}$, réduiſez l'entier en fraction de même dénominateur, & vous aurez $\frac{15+2}{5} = \frac{17}{5}$; ôtez maintenant le logarithme du diviſeur 5 de celui du dividende 17, le reſte ſera le logarithme du quotient.

Propoſons-nous maintenant de trouver à quel nombre appartient un logarithme donné, ſoit qu'il excéde les limites des tables, ou qu'il tombe entre les logarithmes des tables. Dans le premier cas on retranchera de la caractériſtique autant d'unités qu'il ſera néceſſaire pour qu'on puiſſe trouver dans les tables les premiers chiffres du logarithme propoſé ainſi préparé. Si tous les chiffres ſe trouvent alors dans les tables, le nombre cherché ſera le nombre même qu'on trouve à côté; mais il faudra lui ajouter vers la droite autant de 0 qu'on a retranché d'unités à la caractériſtique; parce que, ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus, on eſt cenſé avoir diviſé le nombre par autant de fois 10, que l'on a retranché d'unités dans la caractériſtique. *Par exemple*, le logarithme 7 · 017451 ſe trouve après avoir retranché 3 unités de 7, répondre à 10410, j'en conclus que le nombre auquel appartient le logarithme propoſé eſt 10410000. Si l'on ne trouve dans les tables que les premiers chiffres du logarithme préparé, on ſe conduira comme dans l'exemple ſuivant. Pour trouver à quel nombre répond le logarithme 7 · 011499, j'ôte 3 de ſa caractériſtique, le loga-

rithme reſtant 4 · 011499 tombe entre les logarithmes des nombres 10268, 10269. Le nombre auquel il répond, eſt donc 10268 plus une fraction; pour trouver cette fraction, je retranche de mon logarithme préparé celui de 10268 ponr avoir le reſte 13. Je prends dans les tables la différence entre le logarithme de 10268 & celui de 10269, je trouve 42; après quoi je fais cette regle de trois. Si 42, différence entre les logarithmes des nombres dont nous venons de parler, donne 1 pour différence entre ces nombres, à quelle différence des nombres doit répondre la différence 13 entre mon logarithme & celui de 10268? c'eſt-à-dire, je fais $42 : 1 :: 13 : x = \frac{13}{42}$ *. Ainſi le logarithme 4 · 011499 appartient à $10268 + \frac{13}{42}$ à très-peu-près, & le logarithme 7 · 011499 à un nombre 1000 fois plus grand.

Si le logarithme propoſé tomboit entre ceux des tables, on ne retrancheroit rien à la caractériſtique, & même ſi le logarithme propoſé tomboit au-deſſous de celui de 1500. Il faudroit pour plus d'exactitude ajouter autant d'unités à ſa caractériſtique qu'on le pourroit, ſans paſſer les bornes des tables, après quoi l'on ſépareroit autant de décimales dans le nombre trouvé, qu'on auroit ajouté d'unités à la caractériſtique du logarithme.

Soit propoſé maintenant de trouver le nombre fractionnaire, auquel appartient un logarithme négatif — 1 · 532732. J'ajoute 4 à ce logarithme

* Cette proportion ſuppoſe que les différences des nombres ſont proportionnelles à celles de leurs logarithmes, ce qui n'eſt pas exactement vrai; mais ſeulement à peu-près lorſque les nombres ſont aſſez grands.

pour

pour avoir 2 · 467268 qui, dans les tables se trouve entre le logarithme de 293 & celui de 294; j'en conclus que la fraction cherchée est 0 · 0294, à moins d'un dix milliéme près. En effet ajouter 4 à un logarithme, c'est rendre le nombre auquel il répond 10 mille fois plus grand. Il faut donc, dans le nombre trouvé, séparer quatre décimales.

Soit proposé de trouver la racine cubique de 53, à moins d'un milliéme près. Le tiers du logarithme de 53 est 0 · 574758, ce logarithme étant cherché dans les tables avec une caractéristique plus forte de 3 unités, répond à 3756 à-peu-près: donc la racine demandée (en séparant 3. décimales), est 3 · 756 à-peu-près. Si l'on vouloit avoir la puissance $\frac{3}{7}$, ou, ce qui revient au même, la racine septiéme du cube de 53, on multiplieroit le logarithme de 53 par 3, divisant le produit par 7, & cherchant le résultat avec une caractéristique plus forte de sept unités, l'on sépareroit ensuite 7 décimales dans le nombre trouvé. Si le logarithme ainsi préparé se trouvoit trop grand pour être contenu dans les tables, on diminueroit sa caractéristique de quelques unités, mais ensuite on ajouteroit au nombre trouvé un pareil nombre de 0, & enfin on sépareroit 7 décimales.

Si l'on proposoit d'extraire la racine cube de 0 · 32 = 0 · 320; après avoir trouvé le logarithme de 320, je prendrois le tiers de ce logarithme, que je chercherois dans les tables avec une caractéristique plus forte de trois unités, & séparant trois décimales, j'aurois la racine cube de 320; mais comme je veux la racine cube de 0 · 320, nombre mille fois plus petit, la racine trouvée seroit dix fois trop grande, il faudroit donc séparer encore une décimale.

Puisque toute fraction ordinaire peut se réduire

en une fraction décimale (ou exactement, ou du moins à-peu-près de même valeur), ainsi que nous l'avons vu ci-devant, ce que nous venons de dire peut s'appliquer aux fractions ordinaires sans erreur sensible.

Disons un mot du complément arithmétique. On appelle *complément arithmétique* d'un nombre, la différence entre ce nombre & l'unité suivie d'autant de zeros, qu'il y a de chiffres dans le nombre. Ainsi le complément arithmétique de 357 se trouve en ôtant ce dernier nombre de 1000. Il est aisé de voir que, pour avoir ce complément, il suffit d'ôter le premier chiffre 7 de 10, & chacun des autres de 9, ou, ce qui revient au même, de regarder le premier 0 à droite, comme valant 10, & chacun des autres 9, en négligeant l'unité ou le premier chiffre de la gauche. Par-là la soustraction peut être changée en addition : *par exemple*, pour ajouter ensemble les deux nombres 352 & 523, & retrancher de leur somme les deux nombres 201 & 32, j'écris les deux pre-

1000
357
643

	523
	352
Compl. arithm. de ....201..............	799
Compl. arithm. de ....32..............	68
	1742
	642

miers nombres & le complément arithmétique des deux derniers les uns sous les autres, prenant la somme 1742, je retranche une unité du rang des mille, & une du rang des centaines, le reste 642 est le nombre cherché. Pour en voir la raison, il suffit de remarquer que, si au lieu de retrancher 201, j'ajoute son complément arithmétique, je fais en même tems la soustraction proposée & une addition de 1000 : c'est-à-dire, d'une dixaine au premier chiffre de la gauche du résultat. On voit aussi qu'en ajoutant le complément de 32, on fait une augmentation d'une dixaine au second chiffre du résultat. Si les nombres à retrancher avoient autant de chiffres que le plus grand de ceux dont on retranche, on voit qu'il faudroit retrancher du premier chiffre de la gauche du résultat, autant d'unités qu'on ajoute de complémens arithmétiques : or pour cela il n'y a qu'à ajouter vers la gauche

un nombre ſuffiſant de 0, aux nombres qu'on veut retrancher. *Par exemple*, au lieu de prendre le complément de 32, on prendra celui de 032, qui eſt 968; mais dans ce cas on retrancheroit deux unités du premier chiffre du réſultat, & l'on auroit le même nombre cherché que ci-deſſus.

Pour diviſer 436 par 109, il faudroit, en ſe ſervant des logarithmes, retrancher celui du diviſeur de celui du dividende. Au lieu de cette opération, j'écris le logarithme de 436, auquel j'ajoute le complément arithmétique du logarithme de 109. Du premier chiffre du réſultat; je retranche une unité,

2·639486	Log. de 436.
7·962574	Compl. arithm. du logarithme de 109 *.
0·602060	

le reſte 0·602060 eſt le logarithme du quotient 4 que je trouve à côté dans les tables.

Pour multiplier une fraction par une autre fraction, on ajouteroit enſemble les logarithmes des numérateurs, & les complémens arithmétiques des logarithmes des dénominateurs, en prenant ces logarithmes auſſi-bien que ceux des numérateurs, avec un même nombre de chiffres à la caractériſtique (pour cela on ajoutera, s'il eſt néceſſaire, un ou pluſieurs zeros vers la gauche), retranchant deux unités du premier chiffre à gauche de la ſomme, le réſultat donneroit le logarithme du produit.

Propoſons-nous maintenant de trouver le logarithme d'un nombre qui excede le plus grand nombre des tables, que je ſuppoſe être 10000. Soit donc propoſé le nombre 3255682, dont on demande le logarithme. Il faut retrancher de ce nombre autant de chiffres qu'il eſt néceſſaire, pour que le reſte ſe trouve dans les tables. Je retranche donc 3 chiffres, & le logarithme du reſte 3255, eſt 3·512551; je prends auſſi le logarithme du nombre 3256 plus grand d'une unité, ce logarithme eſt 3·512684. Maintenant, ajoutant autant d'unités aux caractériſtiques des loga-

* Pour avoir le complément arithmétique de 2.037426, logarithme de 109, je ſouſtrais 2.037426 de 10.000000, ou ce qui revient au même, je ſouſtrais 2037426 de 10000000, & je ſépare enſuite ſix décimales.

rithmes que je viens de trouver, que j'ai séparé de chiffres dans le nombre proposé, j'ai les logarithmes 6 · 512551, 6 · 512684, & les nombres qui leur répondent, sont 3255000 & 3256000, dont la différence est 1000 ; c'est pourquoi je fais cette regle de trois : la différence 1000 entre les nombres dont nous venons de parler, donnant 0 · 000133 pour différence entre leurs logaritgmes, combien 682, différence entre le nombre proposé & le nombre 3255000, donnera-t-il pour différence entre leurs logarithmes ? ou $1000 : 0 \cdot 000133 :: 682 : x = 0 \cdot 000090$. J'ajoute 0 · 000090 à 6 · 512551, pour avoir le logarithme du nombre proposé = 6 · 512641. Cette regle est fondée sur ce que les différences des nombres sont proportionnelles aux différences des logarithmes, du moins à peu-près, lorsque les nombres sont fort grands.

PROBLEME. *Trouver le quinzième terme d'une progression géométrique* $\div$ a : ap · ap^2 *&c. dont le premier terme* $a = 12$, *& dont l'exposant* p = 100. Soit ce terme $= x$ (je désignerai son logarithme par $l \cdot x$), $n = 15$, nous aurons (51) $x = ap^{n-1}$; donc $l \cdot x = l \cdot ap^{n-1} = l \cdot a + (n - 1) \cdot l \cdot p$ (car le logarithme d'une puissance d'un nombre est égal au produit de l'exposant de la puissance par le logarithme de ce nombre) $= l \cdot 12 + 14 \cdot l \cdot 100$. Mais $l \cdot 100 = 2$, $l \cdot 12 = 1 \cdot 079181$; donc le logarithme de x ou $l \cdot x = 1 \cdot 079181 + 28 = 29 \cdot 079181$, qui répond à 12000 000 000 000 000 000 000000 000 0, nombre cherché.

DES EQUATIONS.

63. La raison d'égalité qui se trouve entre deux quantités, s'appelle *équation*, on l'indique par le signe = ; ainsi $7 + 3 = 10$ est une équation. La quantité qui se trouve à la gauche du signe, se nomme le *premier membre de l'équation* ; celle de la droite en est le *second*. L'objet des équations est de faire connoître la valeur d'une ou de plusieurs quantités inconnues qui entrent dans l'équation : voici un principe dont on peut faire un grand usage.

64. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Deux quantités égales resteront encore égales, si on leur ajoute, ou si on en soustrait des quantités égales; si on les multiplie, ou si on les divise par des quantités égales; si on les éleve à des puissances égales; si on en extrait des racines égales, ou encore si l'on change tous les signes de l'une & de l'autre.*

Les équations sont du premier degré, lorsque l'exposant de l'inconnue (en supposant qu'il n'y en a qu'une dans l'équation) est $= 1$; elles sont dites du second degré, si le plus grand exposant de l'inconnue est 2; du troisiéme, s'il est $= 3$; &c. Mais s'il y a plusieurs inconnues, le degré de l'équation s'estime par la plus forte somme que peuvent faire les exposans des inconnues dans un même terme. Les quantités connues sont ordinairement désignées par les premieres lettres $a, b, c,$ &c. de l'alphabet; & les quantités inconnues par les dernieres $x, y, u,$ &c. Ainsi dans les équations $y + x = d + c$, $y = 6 + a$ (qui sont du premier degré), $x^2 - x = a$, $x^2 + y^2 = d$, $xy - y = 9$ (qui sont du second degré) les inconnues sont x & y.

Résoudre les équations, c'est trouver les valeurs des inconnues qu'elles contiennent: pour cela s'il n'y a qu'une équation & une inconnue, il faut faire ensorte que l'inconnue reste seule dans un membre toutes les inconnues se trouvant dans l'autre membre; par ce moyen l'inconnue deviendra connue, puisqu'elle sera égale à une quantité connue. Soit proposée cette équation $gx + a - d = f$. J'ajoute à l'un & à l'autre membre la quantité $+ d$, & j'en soustrais la quantité a (ce qui par le principe fondamental ne détruit pas l'égalité), & j'ai $gx + a - d - a + d = f + d - a$, ou, en réduisant, j'ai $gx = f + d - a$.

Maintenant je divise les deux membres par g ; & j'ai $\frac{gx}{g} = \frac{f+d-a}{g}$, ou $x = \frac{f+d-a}{g}$. Si j'avois l'équation $\frac{bx}{a} + d = g$, je multiplierois l'un & l'autre membre par a pour avoir $\frac{abx}{a} + ad = ag$, ou, en réduisant, $bx + ad = ag$. Divisant ensuite tous les termes par le multiplicateur de l'inconnue x (nous appellerons ce multiplicateur, quel qu'il soit, le *coefficient de l'inconnue*), j'ai $\frac{bx}{b} + \frac{ad}{d} = \frac{ag}{b}$, ou $x + \frac{ad}{b} = \frac{ag}{b}$. De-là nous tirons cette regle générale. *Pour faire passer une quantité positive ou négative d'un membre dans un autre, il faut l'effacer dans le membre où elle est, & l'écrire dans l'autre membre avec un signe contraire ; pour dégager une inconnue de son coefficient, il faut la laisser sans ce coefficient, & diviser les autres termes de l'équation par ce coefficient. Mais pour dégager une inconnue de son diviseur, il faut la laisser sans ce diviseur, & multiplier les autres termes de l'équation par ce diviseur.*

65. Si j'avois les deux équations $x + y = a$, $x - 2y = b$, je prendrois la valeur d'une des inconnues dans l'une des deux équations précédentes, en laissant cette inconnue seule dans un membre. Supposons, *par exemple*, que je prenne la valeur de x dans la seconde, j'aurai en transposant, $x = b + 2y$ (par la regle précédente). Substituant $b+2y$ à la place de x dans la premiere équation, il viendra $b + 2y + y = a$, ou $b + 3y = a$, ou (en transposant) $3y = a - b$, & (en divisant) $y = \frac{a-b}{3}$. Substituant cette valeur de y dans l'une des

deux équations données (il est indifférent dans quelle des deux on substitue), *par exemple*, dans la premiere on aura $x + \frac{a-b}{3} = a$, transposant $\frac{a-b}{3}$; on trouvera $x = a - (\frac{a-b}{3}) = \frac{3a - a + b}{3} = \frac{2a + b}{3}$.

Si l'on avoit trois inconnues & trois équations, on prendroit la valeur d'une de ces inconnues dans une des trois équations, & la sustituant dans les deux autres, il en résulteroit deux équations avec deux inconnues tout au plus. Or, par le moyen de ces deux équations, l'on trouveroit aisément la valeur de ces inconnues; & substituant ces valeurs dans une des trois équations qui renfermeroit les trois inconnues, on auroit facilement la valeur de la troisiéme inconnue. Si l'on avoit quatre inconnues & quatre équations, en prenant la valeur d'une des inconnues dans la premiere, & la substituant dans les trois autres, on auroit tout au plus trois équations & trois inconnues, dont on trouveroit la valeur par le moyen de ces trois équations. Substituant cette valeur dans une des quatre premieres équations, l'on auroit la valeur de la quatriéme inconnue; & ainsi de suite pour un plus grand nomd'équations & d'inconnues.

Si j'avois l'équation $\sqrt[2]{x} = a^2 + d$, en élevant au quarré les deux membres de cette équation, j'aurois $x = \overline{a^2 + d}^2 = a^4 + 2a^2d + d^2$. Si j'avois cette autre équation $x^2 = 25$; en prenant les racines quarrées, j'aurois $\sqrt{x^2} = \pm \sqrt{25}$ (V. le n°. 36) $= \pm 5$. En effet $+5 \times +5 = -5 \times -5 =$

25. Mais si j'avois l'équation $x^2 + 2ax = b^2$, il faudroit compléter le premier membre, c'est-à-dire, rendre le premier membre un quarré parfait, ce qui se fait en lui ajoutant le quarré de la moitié du coefficient de x; mais il faut faire la même addition au second membre, afin que l'égalité ne soit point détruite. Ainsi nous aurons $x^2 + 2ax + a^2 = b^2 + a^2$; or il est visible que le premier membre est un quarré, savoir, celui de $x + a$. Prenant donc la racine quarrrée de part & d'autre, j'ai $x + a = \pm \sqrt{b^2 + a^2}$, & en transposant, $x = -a \pm \sqrt{b^2 + a^2}$. Si $a = 3$ & $b = 4$, l'on aura $x = -3 \pm \sqrt{25}$, ou $x = -3 \pm 5$, ou $x = 2$ & $x = -8$. Ce qui fait voir que toute équation du second degré a deux racines; mais on entend ici par racines les valeurs de l'inconnue. Si j'avois l'équation $- ax^2 + 2a^2x = b$, je dégagerois x^2 de son coefficient, ce qui me donneroit $- x^2 + 2ax = \frac{b}{a}$. En second lieu je rendrois x^2 positif en changeant tous les signes de l'équation, ce qui (64) ne détruit point l'égalité, pour avoir $+ x^2 - 2ax = - \frac{b}{a}$; ajoutant maintenant de part & d'autre le quarré de la moitié de $- 2a$, coefficient de x, c'est-à-dire, le quarré de $- a$ qui est a^2, j'aurois $x^2 - 2ax + a^2 = - \frac{b}{a} + a^2$. Prenant maintenant la racine quarrée de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - a = \pm \sqrt{(- \frac{b}{a} + aa)}$. Si $\frac{b}{a}$ est plus petit que a^2, les deux racines sont réelles, si $\frac{b}{a}$

eſt plus grand que a^2, les deux racines ſont imaginaires; car ſoit $-\frac{b}{a}+aa=-cc$, on aura $x=+a\pm\sqrt{-cc}$; or $\sqrt{-cc}$ eſt (36) une quantité imaginaire. Si $\frac{b}{a}=aa$, alors $-\frac{b}{a}+aa=0$, & $x=+a\pm\sqrt{0}$, ou $x=+a\pm 0$, c'eſt-à-dire, qu'alors les deux racines ſont égales chacune à la quantité a.

66. Faiſons maintenant l'application de ce que nous venons de dire à quelques problêmes; mais auparavant diſons un mot de la maniere de mettre une queſtion en équation. Pour mettre un problême en équation, il faut le traduire en langage algébrique; or pour cela il faut exprimer, par le moyen de l'algebre, les quantités ſoit connues, ſoit inconnues, qui entrent dans le problême, & les rapports que ces quantités ont entr'elles.

PROBLEME I. *Etant donnée la ſomme 100 de deux nombres, & leur différence 30, trouver ces deux nombres.* Soient x le plus grand de ces nombres, y le plus petit, $a=100$, $30=b$. Par la nature du problême nous aurons la ſomme $x+y=a$, & la différence de ces mêmes nombres, ſavoir, $x-y=b$. Si nous ajoutons le premiet membre de la premiere équation avec celui de la ſeconde, le ſecond membre de la premiere avec le ſecond de l'autre, ce qui eſt très-permis, puiſqu'on ne fait qu'ajouter des quantités égales à des quantités égales, nous aurons $x+y+x-y=a+b$, ou $2x=a+b$, & (en diviſant les deux membres de cette équation par 2) $x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$. Mais ſi on retranche la ſeconde équation $x-y=b$ de la

premiere $x + y = a$, le premier membre du premier membre le second du second, il viendra $x + y - x + y = a - b$, ou $2y = a - b$, ou (en divisant par 2) $y = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$. *C'est-à-dire, qu'étant donnée la somme & la différence de deux quantités, la plus grande de ces quantités est égale à la moitié de la somme plus la moitié de la différence, la plus petite étant égale à la moitié de la somme moins la moitié de la différence* : ainsi dans le cas du problême le plus grand nombre x est $= \frac{100}{2} + \frac{30}{2} = 50 + 15 = 65$, & le plus petit nombre y est $= \frac{100}{2} - \frac{30}{2} = 50 - 15 = 35$.

PROBLÊME II. *Pierre, Jean & Jacques ont chacun un certain nombre de louis; Pierre & Jean en ont ensemble vingt; Pierre & Jacques en ont quarante; mais Jean & Jacques n'en ont que trente à eux deux. On demande le nombre de louis de chacun en particulier.* Soit x la somme des louis de Pierre, de Jean & de Jacques. Si de cette somme l'on retranche le nombre $20 = a$, il restera $x - a$ pour les louis de Jacques. De même si de x on retranche $40 = b$ on aura $x - b$ pour les louis de Jean; enfin, si de x nous retranchons $30 = c$, nous aurons $x - c$ nombre de louis de Pierre. Mais ces trois nombres doivent valoir autant que la somme x; donc nous aurons l'équation $(x - a) + (x - b) + (x - c) = x$, ou $x - a + x - b + x - c = x$, ou $3x - a - b - c = x$, ou, en transposant, $3x = x + a + b + c$, & en transposant encore $3x - x = a + b + c$, ou $2x = a + b + c$, ou $x = \frac{a+b+c}{2} = \frac{20+40+30}{2} = 45$; donc le nombre $x - a$ des louis de Jacques sera $= 45 - 20 = 25$, le

nombre $x - b$ des louis de Jean étant $= 5$; mais celui des louis de Pierre, savoir $x - c$, sera $= 15$.

PROBLEME III. *Titius voulant donner une certaine somme à un nombre déterminé de pauvres, a remarqué qu'il lui manquoit 8 sols pour que chacun en reçût 3; mais il a remarqué aussi qu'il en avoit 3 de reste, s'il se contentoit d'en donner 2 à chacun. On demande le nombre de sols & celui des pauvres?* Soit x le nombre des pauvres; puisqu'en voulant donner 3 sols à chacun, il en manque 8, le nombre des sols est donc $3x - 8$; mais à cause qu'en donnant 2 sols à chaque pauvre, il y en a 3 de reste, le nombre des sols est évidemment $2x + 3$; donc $3x - 8 = 2x + 3$; transposant $- 8$ dans le second membre & $2x$ dans le premier, il vient $3x - 2x = + 11$, ou $x = 11$. Il y avoit donc 11 pauvres; & par conséquent le nombre de sols $2x + 3$ est $= 25$.

PROBLEME IV: *Un chien voit partir un lievre à 100 toises de distance, on demande à quel point il le prendra: on sait seulement qu'il parcourt trois toises dans le tems que le lievre en parcourt deux.* Soit $a = 100$, $m = 3$, $n = 2$, x le chemin que fera le lievre avant d'être pris; il est visible que le chemin que doit faire le chien est $a + x$. D'un autre côté le chemin que fait le chien doit être à celui que fait le lievre dans le même tems, comme la vîtesse du chien est à celle du lievre, ou comme $m : n$; donc $a + x : x :: m : n$; & en faisant le produit des extrêmes & celui de moyens, $mx = na + nx$, ou $mx - nx = na$, & en divisant, $x = \frac{na}{m - n}$, c'est-à-dire, que le chemin que doit faire le lievre avant d'être pris, est égal au produit de la distance qui s'est trouvée au commencement de la course entre



lui & le chien, multipliée par la vîtesse du lievre, en divisant ce produit par la différence des vîtesses.

Ainsi dans le cas supposé le lievre sera pris après avoir parcouru le chemin $x = \frac{na}{m-n} = \frac{200}{1} = 200$ toises.

Si on supposoit $m = n$, il est visible que le chien ne pouroit jamais atteindre le lievre, à plus forte raison cela arriveroit si m étoit plus petit que n.

PROBLEME V. *Un pere ayant le triple de l'âge de son fils s'en chagrinoit, le fils pour le consoler lui dit : cher pere, attendez encore 20 ans, & vous n'aurez que le double de mon âge. On demande l'âge du pere & celui du fils.* Soit $a = 20$, x l'âge du fils ; donc, par la nature du problême, l'âge du pere qui doit être triple de celui du fils, sera $3x$; au bout de 20 ans, celui du fils sera $x + a$, & celui du pere $3x + a$; mais alors celui du pere doit être double de celui du fils : donc $3x + a = 2$ fois $(x + a) = 2x + 2a$. On a donc l'équation $3x + a = 2x + 2a$. En transposant a dans le second membre, & $2x$ dans le premier, on trouve $3x - 2x = 2a - a$, ou $x = a = 20$; ainsi le fils avoit 20 ans, & le pere 60. En effet dans 20 ans l'âge du fils sera 40, & celui du pere 80, double de celui du fils.

PROBLEME VI. *Un pere faisant son testament veut que l'aîné de ses fils reçoive 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le second 2000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; le troisiéme 3000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste ; & ainsi de suite. On demande le nombre des enfans, la part de chacun & le bien du pere, on sait seulement que les enfans recevront autant l'un que l'autre.* Soit x le bien du pere, $a = 1000$ liv. Lorsque l'aîné aura pris 1000 liv. le reste

du bien sera $x - a$, dont le $\frac{1}{7}$ sera $\frac{x-a}{7}$, qui, ajouté à a, donnera $\frac{x-a}{7} + a = \frac{x-a}{7} + \frac{7a}{7} = \frac{x-a+7a}{7} = \frac{x+6a}{7}$, part de l'aîné. Otant cette quantité de x, l'on aura $x - \frac{x+6a}{7} = \frac{7x-x-6a}{7} = \frac{6x-6a}{7}$, reste du bien du pere, le premier fils partagé. Le second doit prendre $2a$ sur ce reste, & de plus le $\frac{1}{7}$ du reste. Otant donc $2a$ de $\frac{6x-6a}{7}$, on a $\frac{6x-6a}{7} - 2a = \frac{6x-6a-14a}{7} = \frac{6x-20a}{7}$. Le $\frac{1}{7}$ de cette derniere quantité est $\frac{6x-20a}{7}$ divisé par 7, ou $\frac{6x-20a}{49}$. Ajoutant $2a$ l'on aura la part du second $= 2a + \frac{6x-20a}{49} = \frac{98a+6x-20a}{49} = \frac{78a+6x}{49}$. Mais la portion du premier doit être égale à celle du second. Donc $\frac{x+6a}{7} = \frac{78a+6x}{7\times7}$. Multipliant les deux membres de l'équation par 7×7 & réduisant, l'on a $7x + 42a = 78a + 6x$. Transposant $42a$ du premier membre dans le second & $6x$ du second dans le premier, il vient $7x - 6x = 78a - 42a$, ou $x = 36a = 36000$ liv. bien du pere. Le premier fils prend 1000 liv. & le $\frac{1}{7}$ du reste, c'est-à-dire 1000 liv. + $\frac{35000}{7}$ liv. ou 1000 liv. + 5000 l. = 6000 l.; donc la part du premier & celle de chacun des autres est = 6000 liv. Divisant le bien

du pere 36000 liv. par une des portions = 6000 liv., le quotient 6 fera connoître le nombre des enfans.

PROBLEME VII. *Quel est le nombre qui multiplié par 10 donne le tiers de son quarré?* Soit x ce membre, $a = 10$, $b = 3$. On aura par la nature du problême, $ax = \frac{xx}{b}$. Multipliant l'un & l'autre nombre par b, & divisant par x, on trouve $ab = x = 30$.

PROBLEME VIII. *Partager 5 en deux parties, en sorte que le quotient de la plus grande par la plus petite soit = 5.* Supposant $a = 5$, x la plus grande partie, $a - x$ sera la plus petite. Par la nature du problême $\frac{x}{a-x} = a$; donc (en ôtant la fraction) $x = a \times (a - x) = a^2 - ax$. Transposant $-ax$ dans le premier membre, il vient $x + ax = a^2$, ou $x \times (1 + a) = a^2$; donc $x = \frac{a^2}{a+1}$. Pour avoir la seconde partie $a - x$, je substitue la valeur de x, ce qui me donne $a - \frac{a^2}{a+1} = \frac{a^2 + a - a^2}{a+1}$ (en réduisant a en une fraction, dont le dénominateur soit $a + 1$) $= \frac{a}{a+1}$; donc la premiere partie $= \frac{25}{6}$, & la seconde $= \frac{5}{6}$. On voit donc que dans tous les cas semblables on trouvera la plus grande des deux parties en divisant le quarré du nombre proposé par ce nombre lui-même augmenté de l'unité, & la plus petite en divisant le nombre proposé par ce nombre augmenté de l'unité.

PROBLEME IX. *Si l'on doubloit le nombre de mes écus*, disoit un bon homme, *j'en donnerois 3, ce qui fut fait; on continua de même jusqu'à la troisié-*

me fois qu'il ne lui resta rien. Quel étoit le nombre de ses écus ? Soit x le nombre cherché, en doublant l'on aura $2x$, d'où ôtant 3, il restera $2x - 3$. En doublant ce premier reste, & ôtant 3, il viendra $4x - 6 - 3 = 4x - 9$. Doublant encore & ôtant 3, il vient enfin $8x - 18 - 3$, ou $8x - 21$ qui, par la nature du problême, doit être $= 0$; donc $8x - 21 = 0$, ou (en transposant) $8x = 21$ & (en divisant) $x = \frac{21}{8} = 2 + \frac{5}{8}$; c'est-à-dire qu'il avoit 2 écus & $\frac{5}{8}$ d'un écu, ce qu'il est facile de vérifier.

PROBLEME X. *Un oncle dit à son neveu, j'ai dans ma main un certain nombre d'écus que je te donnerai, si tu devine combien il y en a. Le quarré de ce nombre — 4 fois ce nombre est = 5.* Soit x le nombre cherché, son quarré sera x^2, le quadruple de ce nombre sera $4x$. On aura donc $x^2 - 4x = 5$. Prenant le quarré de la moitié du coefficient de x (65) & l'ajoutant de part & d'autre, j'aurai $x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 = 9$. Prenant la racine de l'un & de l'autre membre, j'ai $x - 2 = \pm \sqrt{9} = \pm 3$, & (en transposant) $x = 2 \pm 3$, c'est-à-dire, $x = 5$, & $x = -1$. Il est évident que la premiere racine donne la solution du problême dans le sens qu'il est proposé; car le quarré de 5, moins 4 fois 5 est $= 5$. Mais la seconde racine -1 résout cette question implicitement renfermée dans l'équation, qu'elle est le nombre négatif dont le quadruple étant retranché de ce nombre, le résultat sera 5. Si l'on avoit demandé que le reste fût $= -13$, on auroit trouvé $x = 2 \pm \sqrt{(-13 + 4)}$, ou $x = 2 \pm \sqrt{-9}$. La racine de -9 étant imaginaire; puisqu'il n'y a aucun nombre qui, multiplié par lui-même, puisse donner -9 (car $+3 \times +3 = +9 = -3$

$x - 3$), il s'ensuit que le problême est impossible. Mais on est censé avoir résolu un problême, quand on a démontré qu'il est impossible.

PROBLEME XI. *Etant données deux quantités, en trouver une troisiéme qui soit en proportion harmonique avec les deux premieres.* Soient a & b les quantités données, & x la quantité cherchée. Par la nature de la proportion harmonique (40) la différence de la premiere quantité à la seconde doit être à la différence de la seconde à la troisiéme, comme la premiere est à la troisiéme; donc $a - b : b - x :: a : x$, si est $a > b$; mais si les quantités vont en augmentant, l'on a $b - a : x - b :: a : x$. Donc en prenant le produit des extrêmes & celui des moyens, on aura dans le premier cas $ax - bx = ab - ax$, & dans le second $bx - ax = ax - ab$: mais l'une & l'autre équation donne $2ax - bx = ab$, & en divisant les deux membres par $2a - b$, on trouvera $x = \frac{ab}{2a - b}$.

Si les deux nombres a & b sont 4 & 6, le nombre cherché x sera $= \frac{24}{2} = 12$. Si $a = 35$ & $b = 21$, on trouvera $x = 15$. On continueroit une progression harmonique, dont on connoîtroit les 2 premiers termes, en cherchant d'abord le troisiéme, & ensuite le quatriéme, par le moyen du second & du troisiéme, & ainsi de suite. On trouvera même que si on divise successivement une même quantité a par les termes d'une progression arithmétique $\div b \cdot b + d \cdot b + 2d$ &c. Les quotients $\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b+d}$, $\frac{a}{b+2d}$, &c. seront en progression harmonique.

PROBLEME XII. *Etant donnée la somme de deux nombres*

nombres avec leur produit, trouver ces nombres. Soit la somme des nombres $= a$, leur différence $= x$; le plus grand sera $\frac{a}{2} + \frac{x}{2}$, & le plus petit $\frac{a}{2} - \frac{x}{2}$ (problême I). Leur produit étant supposé $= b$, nous aurons $\frac{a^2}{4} - \frac{x^2}{4} = b$; donc $a^2 - x^2 = 4b$, $a^2 - 4b = x^2$, prenant les racines & transposant, il vient $x = \pm \sqrt{(aa - 4b)}$. Si $a = 14$ & $b = 48$, on aura $x = \pm 2$, & les deux nombres seront $7 + 1$ & $7 - 1$, c'est-à-dire, 8 & 6. Si $a = 4$ & $b = 5$, on aura $x = \pm \sqrt{-4}$, quantité imaginaire qui fait voir qu'il ne peut y avoir deux nombres réels dont la somme soit 4 & le produit 5.

PROBLEME XIII. *Un Marchand ayant placé* 100000 *livres dans un commerce où il perd, a trouvé la seconde année son argent diminué des* $\frac{4}{25}$ *du total de ce qu'il étoit après la premiere année, on demande à combien pour* 100 *se monte la perte par an.* Soit 100000 liv. $= a$, $\frac{4a}{25} = b$, & x le nombre cherché. En faisant cette proportion $100 : 100 - x :: a : a \times \frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100})$, ce quatriéme terme exprimera ce que devient la somme après la premiere année. Si l'on fait maintenant $100 : 100 - x :: a \cdot (1 - \frac{x}{100}) : \frac{100 - x}{100} \times a \times \frac{100 - x}{100} = a \times (1 - \frac{x}{100}) \cdot (1 - \frac{x}{100}) = a \times \frac{(100 - x)^2}{10000}$ $= a \times \frac{(d - x)^2}{d^2}$ en faisant $d = 100$, la quantité $a \times \frac{(d - x)^2}{d^2}$ exprimera ce qui devient la somme a après la seconde année. Mais par la nature du problême, cette quantité est égale à $a \times \frac{(100 - x)}{100}$ diminué de b, c'est-à-dire, qu'on a l'équation $a \times \frac{(d - x)^2}{d^2} = a \times \frac{(d - x)}{d} - b$, ou

$\frac{ad^2 - 2adx + ax^2}{d^2} = \frac{ad - ax - bd}{d}$ (en réduisant b en fraction) $= \frac{add - adx - bdd}{dd}$ (en multipliant le numérateur & le dénominateur par d, ce qui évidemment ne change point la valeur de la fraction). Donc ôtant le diviseur commun dd, ce qui ne peut altérer l'égalité, transposant tous les termes affectés de x dans le premier membre & tous les autres dans le second, on aura $axx - 2adx + adx = add - add - bdd = - bdd$; donc réduisant le premier membre & divisant par a, $x^2 - dx = - \frac{bdd}{a}$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de x, on a $x^2 - dx + \frac{dd}{4} = - \frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}$; & prenant les racines de part & d'autre, $x - \frac{d}{2} = \pm \sqrt{- \frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}}$, & en transposant, $x = + \frac{d}{2} \pm \sqrt{- \frac{bdd}{a} + \frac{dd}{4}} = \frac{d}{2} \pm \sqrt{\left(\left(- \frac{4b}{a} + 1\right) \times \frac{dd}{4}\right)} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{4b}{a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{1 - \frac{16a}{25a}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \times \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{d}{2} \pm \frac{d}{2} \times \frac{3}{5}$, ou en remettant les nombres à la place des lettres, $x = 50 \pm 50 \times \frac{3}{5}$. Donc $x = 50 + 30 = 80$, & $x = 50 - 30 = 20$. Ainsi il y a deux solutions, c'est-à-dire, que la somme pouvoit perdre 80 pour 100, ou seulement 20 *. Mais si l'on supposoit $b = \frac{a}{3}$, on trouveroit $x = 50 \pm 50 \sqrt{-\frac{1}{3}}$, quantité imaginaire, c'est-à-dire, que les deux valeurs de x seroient imaginaires. Il est donc impossible que la somme soit altérée

* Dans le second cas la somme devient 8000 l. aprés la premiere année; & 64000 l. aprés la seconde; mais 80000 l. — 16000 l. = 80000 — $\frac{4a}{25}$. Dans le premier cas la somme devient 20000 liv. à la premiere année, & 20000 l. — $\frac{4a}{25}$ = 4000 liv. à la seconde année.

d'une année à l'autre dans une proportion qui soit telle que de la premiere à la seconde année, la diminution soit le tiers du total. En effet lorsque dans une équation du second degré l'on trouve pour résultat des quantités imaginaires, c'est une marque le problême est impossible.

PROBLEME XIV: *Deux sources coulant uniformement, ont rempli un bassin de 90 muids, la premiere en coulant pendant 3 jours & la seconde pendant 5 jours. Les mêmes fontaines ont rempli un bassin de 64 muids, la premiere en coulant pendant 2 jours & la seconde pendant 4, quelle est la dépense de chacune par jour?* Soit x la dépense journaliere de la premiere, y celle de la seconde. Par la premiere condition du problême l'on a $3x + 5y = 90$, & par la seconde condition $2x + 4y = 64$. Transposant $4y$ dans cette seconde équation, il vient $2x = 64 - 4y$, ou $x = \frac{64-4y}{2}$. Transposant $5y$ dans la premiere équation, on trouvera $3x = 90 - 5y$, & $x = \frac{90-5y}{3}$, & en substituant dans cette derniere équation la valeur de x trouvée dans la seconde, l'on a $\frac{64-4y}{2} = \frac{90-5y}{3}$. Otant les fractions, il vient $192 - 12y = 180 - 10y$, ou (en transposant) $192 - 180 = 12y - 10y$, ou $12 = 2y$ & $y = \frac{12}{2} = 6$. Substituant cette valeur de y dans une des valeurs de x déja trouvées, dans la derniere, *par exemple*, l'on a $x = \frac{90 - 5 \times 6}{3} = \frac{90-30}{3} = \frac{60}{3} = 20$; donc $x = 20$. C'est-à-dire, que la premiere fournit 20 muids d'eau par jour, & la seconde 6.

Si l'on supposoit que la premiere coulant pendant

3 jours, & la seconde pendant 5, remplissent un bassin de 30 muids, & que la premiere coulant pendant 2 jours, & la seconde pendant 4 remplissent un bassin de 16 muids, l'on auroit alors les deux équations suivantes $3x + 5y = 30$, $2x + 4y = 16$. La premiere donne $x = \frac{30 - 5y}{3}$, la seconde donne $x = \frac{16 - 4y}{2}$. Pour trouver la valeur de y, j'égale ces deux valeurs de x * afin d'avoir $\frac{30 - 5y}{3} = \frac{16 - 4y}{2}$. Faisant disparoître les fractions, il vient $60 - 10y = 48 - 12y$, & faisant passer tous les termes connus d'un côté & les inconnus de l'autre, l'on a $12y - 10y = 48 - 60 = -12$. Donc $2y = -12$, & $y = -\frac{12}{2} = -6$. Substituant la valeur de y dans une des valeurs trouvées de x, dans la derniere, *par exemple*, l'on aura $x = \frac{16 - 4 \times -6}{2} = \frac{16 + 24}{2} = \frac{40}{2} = 20$; donc $x = 20$ & $y = -6$, c'est-à-dire que tandis que la premiere source fournit 20 muids d'eau par jour, la seconde en tire 6 du bassin. En effet la premiere doit fournir soixante muids d'eau dans 3 jours, & puisque la seconde en tire 6 par jour, ou 30 dans 5 jours, les deux fontaines ensemble rempliront un bassin de 30 muids, l'une en coulant pendant 3 jours & l'autre en tirant de l'eau pendant 5 jours. Ce qui fait voir que les quantités négatives doivent se prendre dans un sens contraire aux positives.

* C'est une autre méthode de résoudre les équations : Elle consiste à égaler les valeurs d'une même inconnue prises dans deux équations différentes. Cette méthode porte avec elle sa démonstration.

PROBLEME XV. *Trouver deux nombres tels que le plus petit étant retranché du plus grand, il reste 5 & que le quotient du plus grand par le plus petit, soit aussi = 5.* Soit $a = 5$, x le plus grand, y le plus petit nombre cherché. Par la premiere condition du problême $x - y = a$, par la seconde $\frac{x}{y} = a$; donc $x = ay$. Substituant cette valeur de x dans la premiere équation, l'on aura $ay - y = a$, ou $(a - 1) \times y = a$, ou $y = \frac{a}{a-1}$. Substituant la valeur de y dans l'équation $\frac{x}{y} = a$ ou $x = a \times y$, on trouvera $x = a \times \frac{a}{a-1} = \frac{a^2}{a-1}$; donc $y = \frac{5}{4}$ & $x = \frac{25}{4}$; & parce que a peut désigner toutes sortes de nombres, il est évident en général que pour trouver deux nombres tels que la différence du plus grand au plus petit soit égale à un nombre quelconque donné, & que le quotient du plus grand par le plus petit soit aussi égal au même nombre donné, il faut prendre pour le plus grand nombre le quarré du nombre donné divisé par ce même nombre diminué de l'unité, & pour le plus petit nombre, le nombre donné, divisé par ce nombre diminué de l'unité.

PROBLEME. XVI. *On demande deux nombres* x & y *tels que le plus petit* y *soit au plus grand comme* 2 : 7, *& que le quotient du plus grand par le plus petit soit* = 10. Par la premiere condition $2 : 7 :: y : x$; donc (en faisant le produit des extrêmes & celui des moyens) $2x = 7y$ ou $x = \frac{7y}{2}$. Par la seconde condition $\frac{x}{y} = 10$, ou $x = 10y$, substi-

tuant cette valeur de x dans l'équation $2x = 7y$, ou plutôt dans l'équation $x = \frac{7y}{2}$, l'on a $10y = \frac{7y}{2}$, & en ôtant la fraction, $20y = 7y$; & en divisant les 2 membres de l'équation par y, $20 = 7$, ce qui est absurde; ainsi le problême est impossible. En général toutes les fois qu'on parvient à une équation absurde, on est sûr que le problême proposé est impossible, pourvu que d'ailleurs on ait bien exprimé algébriquement les conditions du problême, & que l'on n'ait pas fait de faute dans la suite des opérations qui ont conduit à une équation absurde. Au reste on est censé avoir résolu un problême, lorsqu'on a fait voir qu'il est impossible.

PROBLEME XVII. *On veut mêler ensemble du vin à 8 sols & du vin à 12 sols la bouteille, pour avoir un mêlange à 10 sols la bouteille, combien doit-on prendre de chacun de ces vins pour 30 bouteilles du mêlange?* Soit $q = 30$, $a = 12$, $b = 8$, $c = 10$, & x ce qu'il faut prendre du vin le plus cher; donc $q - x$ sera ce qu'il faut prendre du vin le moins cher. En multipliant le prix a par le nombre des bouteilles x, ax exprimera la valeur du vin le plus cher; par la même raison $bq - bx$ sera la valeur du second vin. Et parce que ces deux valeurs prises ensemble doivent valoir autant que 30 bouteilles du mêlange, c'est-à-dire 30 fois 10 f. $= qc$, on aura $ax + bq - bx = cq$, ou (en transposant) $ax - bx = cq - bq$, ou $x \times (a - b) = q \times (c - b)$, ou (en divisant par $a - b$) $x = q \times \frac{(c-b)}{a-b}$. Ainsi $q - x = q - q \times \frac{(c-b)}{a-b} = \frac{qa - qb - qc + bq}{a-b} = \frac{qa - qc}{a-b} = q \times \frac{(a-c)}{a-b}$, quantité

du vin au plus bas prix. L'on aura donc $x = 30 \times \frac{(10-8)}{12-8} = \frac{30 \times 2}{4} = \frac{60}{4} = 15$. De même $q \times \frac{(a-c)}{a-b}$ se réduit à 15, c'est-à-dire, qu'on doit prendre 15 bouteilles de chaque espece de vin.

REMARQUE I. De l'équation $x = q \times \frac{(c-b)}{a-b}$, on tire $a - b : c - b :: q : x$. Et faisant $= y$ la quantité du vin ou autre marchandise au plus bas prix, nous aurons $q \times \frac{(a-c)}{a-b} = y$, & $a - b : a - c :: q : y$. Donc si on propose de faire un mêlange de 20 livres à 30 s. la livre, avec du caffé à 50 s. & du caffé à 12 s., je dirai la différence du plus haut prix au plus bas prix, est à la différence du moyen prix (c'est-à-dire, du prix du mêlange) au plus bas prix, comme la quantité du mêlange à la quantité du caffé à 50 s., ou $38 : 18 :: 20 : x = \frac{18 \times 20}{38} = 9 + \frac{9}{19}$, ôtant cette quantité de 20, on aura la quantité qu'il faut prendre du caffé à 12 s. qu'on peut aussi trouver par la proportion $a - b : a - c :: q : y$, qui dans ce cas devient $38 : 20 :: 20 : y = \frac{400}{38} = 10 + \frac{10}{19}$. C'est-à-dire, qu'on doit prendre 9 livres & $\frac{9}{19}$ de livre du premier caffé, & 10 livres $+ \frac{10}{19}$ de livre du caffé à 12 sols.

REMARQUE II. Si on donnoit la quantité d'une des marchandises qui doivent entrer dans le mêlange avec la quantité du mêlange, l'on trouveroit facilement ce qu'on doit prendre de l'autre marchandise, en ôtant de la quantité q, qui représente la quantité du mêlange, la quantité que l'on prend de la premiere marchandise. Mais si on demandoit de faire un mêlange qui contînt, *par exemple*, 10 mesures de vin à 10 s. la mesure, & qu'on proposât de trois-

ver combien il faudroit de mesures à 30 ſ. pour avoir un mêlange à 15 ſ. la mesure ; on chercheroit par le Problême précédent combien il faudroit prendre du vin à 10 ſ. & du vin à 30 ſ. pour un certain nombre de mesures à volonté, pour 4, *par exemple* ; on trouveroit qu'il faut prendre 3 mesures du premier vin & 1 du second, après quoi l'on feroit cette regle de trois : trois mesures de vin à 10 ſ. répondent à 4 mesures du mêlange, à combien de mesures du mêlange répondront 10 mesures à 10 ſ., ou $3 : 4 :: 10 : x = \frac{40}{3} = 13 + \frac{1}{3}$; c'est-à-dire, que le mêlange seroit de 13 bouteilles & $\frac{1}{3}$, dont 10 du vin à 10 ſ. & par conséquent $3 + \frac{1}{3}$ du vin à 30 ſ.

REMARQUE III. Si l'on donnoit la quantité du mêlange, la quantité & le prix de chacune des marchandises qui entrent dans le mêlange, on trouveroit le prix du mêlange en divisant la somme des prix de toutes les marchandises qui entrent dans le mêlange par le nombre des mesures du mêlange. Ainsi si l'on demande combien vaudra la mesure d'un mêlange de 30 mesures de vin, dont 12 à 1 liv. 10 ſ., 10 à 1 liv. & 8 à 5 ſ. Le prix des 12 premieres est = 18 liv., le prix des 10 secondes est = 10 liv. & celui des 8 dernieres est = 2 liv. La somme donne 30 liv. ; donc le prix du mêlange $= \frac{30}{30} = 1$ liv., ce qui est évident.

PROBLEME XVIII. *D'un Tonneau qui contient* 100 *bouteilles de vin, j'en tire une & je remets une bouteille d'eau, je tire de même une seconde bouteille & je remets autant d'eau & ainsi de suite, on demande combien il restera de vin dans le tonneau quand on aura tiré de cette maniere un certain nombre de bouteilles*, par exemple, 50 *bouteilles*. Soit $a = 100$ bouteilles, $b = 1$ bouteille, $d = 50$ bouteilles & n le nombre cherché. Après avoir tiré la premiere bouteille de vin, il reste dans le

tonneau la quantité de vin $a-b$, après la seconde bouteille il reste $\frac{(a-b)^2}{a}$, après la troisiéme bouteille il reste $\frac{(a-b)^3}{a^2}$, & après le nombre des bouteilles n, il reste $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$. En effet la mesure b que l'on puise la seconde fois n'est pas de vin pur, elle n'en contient que $\frac{99}{100}=\frac{(a-b)}{a}$; donc cette mesure b en contiendra $\frac{b\cdot(a-b)}{a}$, & $(a-b)-b\frac{(a-b)}{a}$ sera ce qui reste de vin après la seconde bouteille; or cette quantité se réduit à $[\frac{(a-b)^2}{a}]$. La troisiéme bouteille b ne doit donc contenir de vin que $\frac{b}{a}[\frac{(a-b)^2}{a}]=b\times\frac{(a-b)^2}{a^2}$; donc ce qui restera de vin après la troisiéme bouteille sera $\frac{(a-b)^2}{a}-b\times\frac{(a-b)^2}{a^2}=\frac{(a-b)^3}{a^2}$. En général après avoir puisé le nombre n de bouteilles, il doit rester une quantité de vin $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}=d$ (par supposition). Comme la quantité n inconnue se trouve être un exposant, il faut avoir recours aux logarithmes : ainsi nous aurons $L\cdot[\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}]=L\cdot d$ (L désigne le logarithme de la quantité qui est à sa droite), ou parce que le logarithme du quotient se trouve en ôtant le logarithme du diviseur de celui du dividende, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus en parlant des logarithmes, & que celui de la puissance d'une quantité se trouve en multipliant le logarithme de cette quantité par l'exposant de la puissance, nous aurons $L\cdot(a-b)^n-L\cdot a^{n-1}=L\cdot d$, ou $nL\cdot(a-b)-(n-1)L\cdot a=L\cdot d$, ou $nL\cdot(a-b)-nL\cdot a+L\cdot a=L\cdot d$, ou (en transposant) $L\cdot a-L\cdot d=n[L\cdot a-L\cdot(a-b)]$; donc (en divisant) $\frac{L\cdot a-L\cdot d}{L\cdot a-L\cdot(a-b)}=n$, ou $\frac{L\cdot 100-L\cdot 50}{L\cdot 100-L\cdot 99}=n$, ou $\frac{2.000000-1.698970}{2.000000-1.995635}=\frac{0.301030}{0.004365}=69$ à peu près, c'est-à-dire qu'il restera environ 69 bouteilles de vin, quand on aura puisé 50 bouteilles.

Pour savoir combien de vin contiendra la cinquantiéme bou-

teille, *par exemple*, il faudroit ſuppoſer $n = 49$, & l'expreſſion $\frac{(a-b)^n}{a^{n-1}}$ marqueroit alors ce qui reſte de vin dans le tonneau après la quarante-neuviéme bouteille. Faiſant donc cette proportion, la capacité 100 du tonneau eſt au vin reſtant, comme la bouteille qu'on puiſe eſt à la quantité de vin que cette bouteille doit contenir; ou $a : \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} :: b : \frac{b}{a} \times \frac{(a-b)^n}{a^{n-1}} = \frac{b}{a^n} \times (a-b)^n = x$, on a par les logarithmes, $L \cdot b +$, $n L \cdot (a-b) - n L \cdot a = L \cdot x$, ou (parce que $L \cdot 1 = 0$ ainſi que nous l'avons dit en parlant des logariſhmes) $0 + 49 L \cdot 99 - 49 L \cdot 100 = L \cdot x$, ou $-0 \cdot 213885 = L \cdot x$. Pour avoir le nombre fractionnaire qui répond à ce logarithme négatif, j'ajoute trois unités à ſa caractériſtique (c'eſt comme ſi j'ajoutois à ce logarithme $3 \cdot 000000$). Cherchant donc le nouveau logarithme $2 \cdot 786115$, je trouve que le nombre le plus approchant auquel il répond eſt 611; donc (à cauſe des trois unités ajoutées à la caractériſtique) $0 \cdot 611$ exprime ce que la cinquantiéme bouteille contient de vin à très-peu-près.

PROBLEME XIX. *Un uſurier prête 1000 liv. à condition qu'on lui en payera l'intérêt compoſé, c'eſt-à-dire, non-ſeulement l'intérêt, mais encore les intérêts des intérêts, à raiſon de 4 pour 100 par an. Au bout d'un certain tems l'emprunteur n'ayant rien payé, ſe libere en donnant 1800 liv. On demande combien d'années ſe ſont écoulées depuis l'emprunt.* Soit s la ſomme empruntée, r l'intérêt ſimple, c'eſt-à-dire, le nombre par lequel il faut multiplier la ſomme pour avoir l'intérêt de la premiere année, il eſt viſible que cet intérêt ſera rs, & que la ſomme qu'exigera l'uſurier au bout de cette année eſt $s + rs = s \cdot (1+r)$. Par la même raiſon la ſomme exigée au bout de la ſeconde année ſera $s \cdot (1+r) \cdot (1+r) = s \cdot (1+r)^2$. Au bout de la troiſiéme année cette ſomme deviendra $s(1+r)^3$ & en général au bout d'un nombre n d'années, cette ſomme ſera $\cdot s(1+r)^n$. Si donc on fait cette ſomme égale à d, on aura $s \cdot (1+r)^n = d$; donc en déſignant par L le logarithme, il eſt viſible que l'on aura $L \cdot s(1+r)^n = L \cdot d$ (car les quantités égales doivent avoir des logarithmes égaux); donc (parce que le logarithme d'un produit eſt égal à la ſomme des logarithmes du multiplicande & du multiplicateur, & que celui d'une puiſſance d'une quantité eſt égal au produit de l'expoſant de cette quantité par le logarithme de cette même quantité)

$L\cdot s + L\cdot(1+r)^n = L\cdot d$, ou $L\cdot d = L\cdot s + L\cdot(1+r)^n = L\cdot s + n\cdot L\cdot(1+r)$; d'où l'on tire $L\cdot d - L\cdot s = n \times L\cdot(1+r)$, & enfin $n = \frac{L\cdot d - L\cdot s}{L\cdot(1+r)}$. Ainsi prenant dans les tables les logarithmes de d, de s, de $(1+r)$, & faisant les opérations qu'indique la formule, on trouvera le nombre des années n. Nous avons $d = 1800$, & $L\cdot d = 3\cdot 255273$, $s = 1000$, $L\cdot s = 3\cdot 000000$, $L\cdot d - L\cdot s = 0\cdot 255273$, $r = \frac{4}{100}$, $1 + r = \frac{104}{100}$, $L\cdot(1+r) = 0\cdot 017033$. Divisant donc $0\cdot 255273$, par $0\cdot 017033$, on a 15 à peu de chose près. Ainsi on dira qu'il y a 15 années depuis l'emprunt. Si nous regardons successivement les quantités s, r, n, d comme inconnues l'équation $s(1+r)^n = d$, dônnera $s = \frac{d}{(1+r)^n}$ & $d = s\cdot(1+r)^n$ la même équation donne $(1+r)^n = \frac{d}{s}$, $1 + r = \sqrt[n]{\frac{d}{s}}$, & $r = \sqrt[n]{\left(\frac{d}{s}\right)} - 1$. Formules par lesquelles on résoudra la plûpart des questions qu'on peut faire sur les intérêts composés.

PROBLEME XX. *Il y a 10000 hommes dans une ville dont la population va en augmentant dans un rapport constant, au bout d'un certain tems, par exemple, au bout de 15 ans la population est de 20000 hommes, on demande l'acroissement annuel.* Soit $10000 = a$, $20000 = b$, $n = 15$, x le nombre des habitans à la fin de la premiere année. Donc si on fait $a : x :: x : \frac{xx}{a}$, on aura évidemment le nombre des habitans après les deux premieres années; & faisant ensuite $a : x :: \frac{xx}{a}$ à un 4e. terme $\frac{x^3}{a^2}$, on aura le nombre d'hommes à la fin de la troisiéme année. En général $\frac{x^n}{a^{n-1}}$ indiquera le nombre d'habitans après le nombre n d'années. Faisant donc ce nombre $= b$, on aura $\frac{x^n}{a^{n-1}} = b$, $x^n = a^{n-1}b$, $L\cdot x^n = L\cdot a^{n-1}b$, ou $n\cdot L\cdot x = (n-1)$, $L\cdot a + L\cdot b$, & $L\cdot x = \frac{(n-1)\, L\cdot a + L\cdot b}{n}$. Mais $L\cdot a = 4$, $L\cdot b = 4\cdot 30103$ (en s'en tenant à 5 décimales); donc $L\cdot x = \frac{60\cdot 30103}{15} = 4\cdot 0200687$, logarithme qui répond à 10472. Si de ce nombre l'on retranche 10000, on aura 472 pour l'accroissement de la premiere année, ce qui ne donne pas la $\frac{1}{21}$

partie du tout. Ainsi l'accroissement annuel est plus petit que la partie $\frac{1}{11}$ de 10000.

PROBLEME XXI. *Si le nombre* a *des habitans d'une ville augmente tous les ans de la trentiéme partie, quel sera ce nombre au bout d'un siécle?* Après la premiére année ce nombre sera évidemment $a + \frac{a}{30} = a(1 + \frac{1}{30}) = a(\frac{31}{30})$. Si l'on fait $a : a(\frac{31}{30}) :: a(\frac{31}{30}) : a(\frac{31}{30})^2$, on aura le nombre des habitans après la seconde année, & en général après le nombre n d'années, ce nombre sera $a(\frac{31}{30})^n$. En faisant $n = 100$, nous aurons $a(\frac{31}{30})^{100} = x$, nombre cherché; donc $L\,a + 100\,L \cdot (\frac{31}{30}) = L \cdot x$; mais $L \cdot \frac{31}{30} = L \cdot 31 - L \cdot 30 = 0 \cdot 014240439$ (en employant les tables d'Ulacq). Si donc on suppose $a = 100000$, nous aurons $L\,x = 6 \cdot 4240439$, & $x = 2654874$. Tel sera le nombre des habitans après 100 ans, en supposant qu'il ait été de 100000 au commencement du siecle.

PROBLEME XXII. *Le monde ayant été peuplé après le déluge par six personnes, les trois enfans de Noë & leurs femmes, de quelle partie a dû croître le genre humain, pour qu'il y ait eu un million d'hommes après 200 ans. Soit* n *cette partie*; Après la premiere année le nombre des hommes auroit éte (sans y comprendre Noë) $= 6 + \frac{6}{n} = 6(1 + \frac{1}{n})$ $= 6(\frac{n+1}{n})$, & au bout de 200 ans il aura été $6(\frac{n+1}{n})^{200} =$ 1000000 par supposition; donc $\frac{n+1}{n} = (\frac{1000000}{6})^{\frac{1}{200}}$; donc $L \cdot (\frac{n+1}{n}) = \frac{1}{200} L \cdot (\frac{1000000}{6}) = \frac{1}{200}(5 \cdot 2218487) = 0 \cdot 0261092$, logarithme qui répond au nombre $\frac{1061963}{1000000} = \frac{n+1}{n}$; ôtant les fractions, transposant & réduisant, il vient $1000000 = 61963 \cdot n$, & enfin $n = \frac{1000000}{61963} = 16$ à-peu-près. Ainsi l'accroissement annuel auroit été d'un $\frac{1}{16}$ de la population, ce que la santé robuste & la longue vie des hommes de ce tems-là rendent très-possible.

PROBL. XXIII. *A quelle puissance faut-il élever le nombre* $10 = a$ *pour le rendre égal au nombre* b. Soit y l'exposant cherché, on aura $a^y = b$, $L \cdot a^y = L \cdot b$,

ou $y \cdot \mathrm{L}\,a = \mathrm{L} \cdot b$ ou $y = \frac{\mathrm{L} \cdot b}{\mathrm{L}\,a}$. Si on demande à quelle puissance on doit élever le nombre 10 pour le rendre égal à 10000, nous aurons $y = \frac{\mathrm{L}.10000}{\mathrm{L} \cdot a} = \frac{4}{1} = 4$. Ainsi en élevant 10 à la quatriéme puissance, on aura 10000.

PROBLEME XXIV. *Huit chevaux ont mangé en 7 semaines les herbes d'un pré de 4 arpens *, tant celles qui étoient crûes, que celles qui ont dû croître pendant que les chevaux paissoient; 9 chevaux ont mangé de la même maniere celles d'un pré de 5 arpens en 8 semaines. Combien faut-il de chevaux pour manger, selon les mêmes conditions, les herbes d'un pré de 6 arpens en 12 semaines?* Avant de passer plus loin, nous prévenons que la solution que nous allons donner (par une méthode dont nous ne sommes pas les inventeurs) n'est pas bien exacte, pour les raisons que nous dirons bientôt; cependant comme elle est ingénieuse, nous croyons devoir la rapporter. Je fais le nombre des chevaux qui ont mangé les herbes du premier pré $= a = 8$, le nombre des semaines qu'ils ont employé à manger ces herbes $= c$, l'étendue du premier pré ou 4 arpens $= b$, $9 = d$, $e = 5$, $f = 8$ (je désigne les 8 semaines employées par les 9 chevaux pour manger les herbes du second pré, par f & non par a, afin de rendre la solution générale), $g = 6$, $h = 12$, & le nombre de chevaux cherché $= x$. Cela posé, imaginons que les chevaux qui mangent les herbes de chaque pré sont partagés en deux bandes, dont l'une mange l'herbe contenue au premier instant dans chaque pré, & l'autre mange l'herbe qui croît pendant que les chevaux paissent. Soit y la premiere bande du premier pré; la seconde sera $a - y$. Si nous faisons $= z$ la premiere bande des chevaux du second pré, la seconde sera $d - z$; & si la premiere bande des chevaux du troisiéme pré est $= t$, la seconde sera $x - t$.

Cette supposition (que je ferai voir un peu plus bas n'être pas exacte) une fois admise, il est clair que les premieres ban-

* L'arpent, suivant l'Ordonnance de 1669 pour les Eaux & Forêts, est de 100 perches quarrées, la perche étant supposée de 22 pieds; mais on ne suit pas par tout cette mesure.

des des chevaux sont entr'elles comme les étendues des prés (dans lesquels on suppose la quantité d'herbe en raison des surfaces) divisées par les tems correspondans. Car il est visible que si l'on a deux quantités d'herbes, l'une de 12, l'autre de 48 quinteaux, & que six chevaux puissent manger la premiere quantité dans 4 jours, 12 chevaux mangeront la seconde quantité dans 8 jours, & les premiers chevaux seront aux seconds comme $\frac{12}{4} : \frac{48}{8} :: 3 : 6 :: 6 : 12$. Revenant donc à notre problême, nous aurons ces deux proportions $y : z :: \frac{b}{c} :: \frac{e}{f}$; $y : t :: \frac{b}{c} : \frac{g}{h}$. La premiere en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, donne $\frac{y \cdot e}{f} = \frac{b \cdot z}{c}$, ou $c \cdot ey = bf \cdot z$ équation que je désignerai par I. La seconde proportion donnera l'équation $cgy = bht$ que je désigne par II.

Les secondes bandes $a - y$, $d - z$, $x - t$, qui mangent journellement les herbes qui croissent pendant que les chevaux paissent sont entr'elles comme les étendues des prés, parce que nous supposons que les herbes (tant celles qui étoient d'abord dans les prés, que celles qui répoussent à chaque instant à proportion que les chevaux paissent) croissent uniformement dans tous les prés, & proportionnellement à leur étendue. Nous avons donc les deux proportions $a - y : d - z :: b : e$; $a - y : x - t :: b : g$. Desquelles en égalant le produit des extrêmes à celui des moyens, il est aisé de tirer les deux équations $ae - ey = bd - bz$ (que je désigne par III), & $ag - gy = bx - bt$ (que je désigne par IV), les équations I & II donnent $z = \frac{cey}{bf}$, $t = \frac{cgv}{bh}$. Substituant la valeur de z dans l'équation III, nous trouverons $y = \frac{afe - bdf}{fe - ce}$. Cette valeur de y étant substituée dans l'équation $t = \frac{cgy}{bh}$, il vient $t = \frac{cg\,(afe - bdf)}{bh\,(fe - ce)}$. la même valeur de y substituée dans l'équation $z = \frac{cey}{bf}$ donne $z = \frac{ce\,(afe - bdf)}{bf\,(fe - ce)}$. Mettons les valeurs de y & de t dans l'équation IV, & nous trouverons après les opérations ordinaires, $x = \frac{aceg \cdot (f - h) + bdfg \cdot (h - c)}{beh\,(f - c)}$. Sustituant main-

tenant les valeurs numériques de a, b, c, d, e, f, g, h, il vient $x = 8$. ainsi le nombre des chevaux cherché est 8, si la méthode qu'on vient d'employer est exacte.

Mais nous avons supposé que les herbes des trois prés croissoient uniformement & proportionnellement à l'étendue de ces prés pendant que les chevaux paissoient, supposition qu'on ne sauroit admettre ; car il n'y a pas d'apparence que l'herbe qui a 6 pouces, *par exemple*, croisse en grosseur & en longueur comme celle qui en a 8, ou 3, ou 5, &c. D'autre côté selon que le tems est plus ou moins favorable les herbes croissent plus ou moins dans un jour, dans une heure, &c. De sorte qu'il pourroit arriver que les chevaux qui suffisoient pour manger la quantité d'herbe qui étoit crûe hier dans un pré d'une certaine étendue, ne suffiroient pas pour manger dans le même espace de tems l'herbe qui pourra croître demain dans le même pré. Il est donc visible qu'on ne doit pas regarder la solution que nous venons de donner comme bien rigoureuse, & il n'arrive que trop souvent que les Géométres donnent des solutions fausses de certains problêmes, parce qu'ils partent des principes peu exacts, & quils n'ont pas bien approfondis : cela peut arriver bien facilement à ceux qui n'ont pas fait une certaine étude de la métaphysique, & de la physique.

DES PROBLEMES INDÊTERMINÉS, Sémidéterminés & plus que Déterminés.

67. Les *problêmes déterminés* sont ceux pour la solution desquels il y a autant d'équations que d'inconnues. Tels sont les problêmes que nous avons résolus jusqu'ici. On appelle *problême indéterminé*, un problême pour la solution duquel il y a moins d'équations que d'inconnues, parceque, pour la résoudre, il est nécessaire de déterminer arbitrairement une ou plusieurs inconnues. Si, *par exemle*, on demandoit deux nombres x & y, dont la somme fût 10, l'on auroit l'équation $x + y = 10$, ou $x = 10 - y$. Pour résoudre ce problême, supposons $y = 9$, afin d'avoir $x = 10 - 9 = 1$. Si

l'on ſuppoſe $y = 8$, l'on aura $x = 2$. En général on voit que ce problême a une infinité de ſolutions: car on peut ſuppoſer y égal à un nombre négatif ou poſitif, entier ou fractionnaire; de ſorte que l'on peut faire une infinité de ſuppoſitions arbitraires. Mais ſi l'on exigeoit que les deux nombres x & y fuſſent entiers & poſitifs, il eſt évident qu'il n'y auroit que 9 ſolutions poſibles, & qu'on pourroit ſeulement ſuppoſer $y = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Dans le cas où l'on ajoute des conditions aux problêmes indéterminés (ces conditions peuvent quelque fois rendre le nombre des ſolutions déterminé, ou faire voir que dans certains cas le problême n'a point de ſolution), ces problêmes prennent le nom de *ſémi-déterminés*. Si le nombre des équations d'un problême ſurpaſſe celui des inconnues, le problême eſt plus que déterminé & la ſolution en eſt ſouvent impoſſible, tel ſeroit celui-ci : trouver deux nombres x & y, dont la ſomme $= 8$, la différence $= 2$ & le produit $= 12$. On aura donc ces trois équations, $x + y = 8$, $x - y = 2$, $xy = 12$. La ſeconde donne $x = 2 + y$; cette valeur de x ſubſtituée dans la premiere donne $2 + y + y = 8$, ou $2 + 2y = 8$, ou $2y = 8 - 2 = 6$, & $y = 3$. Subſtituant cette valeur de y dans la ſeconde, l'on a $x - 3 = 2$, ou $x = 5$; donc $xy = 5 \times 3 = 15$. Mais xy doit être $= 12$, par la troiſiéme condition; donc le problême eſt impoſſible. Si l'on avoit exigé que le produit des nombres cherchés fût 15, la ſolution du problême auroit été poſſible; mais cette troiſiéme condition qui ſuit des deux premieres auroit été ſuperflue. On connoît qu'il y a des conditions ſuperflues exprimées par les équations, lorſqu'on parvient à une *équation identique*, c'eſt-à-dire,

c'eſt-à-dire, à une équation telle que les quantités qui compoſent le premier membre, ſont les mêmes que celles qui compoſent le ſecond. *Par exemple*, dans le problême ci-deſſus nous avons $x+y=8$, $x-y=2$; & ſuppoſant que la troiſiéme condition exige que xy ſoit $=15$, nous aurons par les deux premieres équations, $x=5$, & $y=3$; ces valeurs ſubſtituées dans la troiſiéme $xy=15$, donnent $15=15$. La raiſon en eſt que les conditions identiques doivent donner des expreſſions identiques, comme les conditions différentes donnent des expreſſions différentes. En général il y aura autant d'équations identiques qu'on aura employé d'équations inutiles. Lorſque dans la ſolution d'un problême, après avoir rempli toutes les conditions, l'on arrive à une équation identique, c'eſt une marque que toutes les quantités du genre de celles dont on parle, ont les conditions requiſes, & que c'eſt un théorême & non un problême qu'on propoſe. Suppoſons, *par exemple*, qne dans la ſérie des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, &c. on demande quatre nombres de ſuite, tels que la ſomme des extrêmes ſoit égale à celle des moyens. Appellons ces nombres x, y, z, p; par la nature de la ſérie, $x+1=y$, $y+1=z$, & $z+1=p$; par la condition du problême, $x+p=y+z$; par les deux premieres équations, $x+2=z$; par celle-ci & la troiſiéme, $x+3=p$. Subſtituant dans la quatriéme les valeurs de y, z, p, il vient $2x+3=2x+3$, équation identique qui fait voir que quatre nombres quelconques ſucceſſifs de la ſérie 1, 2, 3 &c. ſont toujours tels que la ſomme des extrêmes eſt égale à la ſomme des moyens: ainſi c'eſt un théorême & non un problême.

Si l'on parvient à une équation identique, sans avoir exprimé toutes les conditions du problême, c'est une marque d'erreur, ou que l'on a pris une condition superflue, & obmis quelque condition nécessaire. On peut encore remarquer que les conditions superflues peuvent faire paroître un problême déterminé, quoique réellement il soit indéterminé. *Par exemple*, qu'on demande quatre nombres x, y, z, u dont la somme des moyens soit égale à celle des extrêmes, que celle des extrêmes soit 5, & le triple de celle des moyens 15. Par la premiere condition $x + u = y + z$; par la seconde & la premiere $y + z = 5$, & $x + u = 5$; par la troisiéme $3y + 3z = 15$. Nous avons autant d'équations que d'inconnues, & l'on pourroit croire le problême déterminé ; mais si dans la premiere équation, à la place du premier & du second membre, on sustitue leurs valeurs prises dans les autres équations, il vient $5 = 5$. De même si dans la quatriéme on substitue la valeur de $y + z$ prise dans la seconde, on aura $15 = 15$. Ainsi il y a quelque condition superflue, & en effet celle-ci $y + z = 5$ suit évidemment de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$; de même $3y + 3z = 15$ suit de $x + u = y + z$, & de $x + u = 5$. Et parce qu'il n'y a aucun moyen de trouver deux autres équations réellement différentes, le problême est indéterminé. Il faut donc faire beaucoup d'attention, afin de trouver les équations nécessaires pour la solution d'un problême, sans en introduire de superflues.

Dans les problêmes sémi-déterminés que nous allons résoudre, nous supposerons à l'égard de ceux du premier degré, qu'on demande des nombres entiers & positifs.

PROBLEME I. *On demande deux nombres* x, y, *tels que* $3x - 5y = 9$. Donc $3x - 9 = 5y$, & $y = \frac{3x - 9}{5}$, qui doit être un nombre entier & positif; ainsi $3x > 9$ & $x > 3$, autrement y seroit négatif. En second lieu pour que y soit un nombre entier, il faut que $3x - 9$ soit exactement divisible par 5; mais parce que les seuls nombres terminés en 0, ou en 5, sont divisibles par 5, il faut que $3x - 9$ soit un nombre terminé en 0 ou en 5; or pour que $3x - 9$ soit terminé en 0, il est nécessaire que $3x$ soit terminé en 9, & pour que $3x - 9$ soit terminé en 5, $3x$ doit être terminé en 4; desorte qu'aucun nombre ne peut être admis pour la valeur de x excepté ceux qui, multipliés par 3, se terminent en 9 ou en 4. Ainsi le plus petit possible est 8, viennent ensuite 13, 18, &c. auxquels répondent $y =$ 3, 6, 9, &c. comme on le voit $x = 8$, $y = 3$ dans la table. On peut remarquer que les nombres qui représentent x, forment une progression arithmétique dont la différence est 5;

13	6
18	9
23	12
&c.	&c.

mais la différence de la progression des nombres qui représentent y, est seulement 3; de sorte qu'en continuant les deux progressions à l'infini, l'on aura une infinité de solutions. Si l'on prend 13 pour x, on prendra pour y la valeur correspondante 6, & l'on aura $3x - 5y = 39 - 30 = 9$. Si l'on suppose $x = 18$, il faudra prendre 9 pour la valeur de y, & l'on aura de même $3x - 5y = 54 - 45 = 9$, & ainsi de suite.

PROBLEME II. *On demande deux nombres* x & y *tels que le triple du premier joint au double du second donne 20, ou tels que* $3x + 2y = 20$. Donc $x =$

$\frac{20-2y}{3}$. Pour que x ſoit entier & poſitif il faut que $20 > 2y$ & $10 > y$. De même il faut que $x < 7$, autrement $y = \frac{20-3x}{2}$ ne ſauroit être un nombre entier & poſitif. L'équation $x = \frac{20-2y}{3}$ ſe réduit à celle-ci $x = 6 + \frac{2-2y}{3} = 6 + 2 \times \frac{1-y}{3}$. Pour que la fraction donne un entier, en ſuppoſant $y < 10$. Il eſt facile de voir que y ne peut avoir d'autres valeurs que 7, 4 & 1, auxquelles répondent les valeurs de $x = 2, 4, 6$. On peut remarquer qu'il importe peu que le nombre entier qui doit réſulter de la fraction, ſoit négatif, pourvu que y ne paſſe pas les limites preſcrites. Ici, *par exemple*, y ne doit pas être au-deſſous de 1, ni au-deſſus de 9.

$y=7$	$x=2$
4	4
1	6

PROBLEME III. *On demande deux nombres* x *&* y *tels que* $33x = 76 + 59y$. *Donc* $x = \frac{76+59y}{33}$.
Parce que l'un & l'autre terme de la fraction peut être diviſé par le dénominateur, on aura en faiſant cette diviſion, $x = 2 + y + \frac{10+26y}{33}$. Voyons maintenant ſi les termes du numérateur n'ont pas un facteur commun, ils en ont un $= 2$: ainſi réduiſant la fraction, nous aurons $\frac{2 \times (5+13y)}{33}$. Faiſant $\frac{5+13y}{33} = p$, nombre entier ; le double de cette fraction ſera auſſi un nombre entier. Nous appellerons *fractions réduites* les fractions pures (*ce ſont celles qu'on ne peut plus réduire*) dans leſ-

quelles les termes du numérateur ſont premiers entr'eux. De l'équation $\frac{5+13y}{33}=p$, on tire $y=\frac{33p-5}{13}$, ou en réduiſant la fraction, $y=2p+\frac{7p-5}{13}$. Faiſons maintenant $\frac{7p-5}{13}=q$ nombre entier, on trouvera $p=\frac{13q+5}{7}$, & en réduiſant la fraction, $p=q+\frac{6q+5}{7}$. Suppoſons $\frac{6q+5}{7}=r$ nombre entier, on aura $q=r+\frac{r-5}{6}$. Soit enfin $\frac{r-5}{6}=t$ (nombre entier); donc $r-5=6t$ & $r=5+6t$. Cette équation donne pour r un nombre entier, puiſque t par ſuppoſition eſt un nombre entier. En rétrogradant nous avons $q=7t+5$, $p=13t+10$, $y=33t+25$. Cette valeur de y étant ſubſtituée dans l'équation $x=\frac{76+59y}{33}$ donne $x=47+59t$, équation qui fait voir qu'en ſubſtituant à la place de t un nombre entier poſitif, x ſera toujours un nombre entier poſitif. Si l'on ſuppoſe $t=1$, 106 ſera le plus petit nombre qui puiſſe repréſenter x.

Suppoſons $a=5$, $d=13$, $c=33$; la premiere fraction réduite devient $p=\frac{a+dy}{c}$. Si l'on fait attention à la ſuite des opérations précédentes, on pourra voir dans quel cas on peut ſubſtituer des valeurs de y qui rendent x entier & poſitif; car dans la nouvelle fraction qui réſulte de la premiere on diviſe c par d (d repréſente le coefficient de l'inconnue y, p, &c. dans chaque fraction réduite, &

c le dénominateur de chaque fraction réduite), & l'on a pour reste une nouvelle fraction réduite, dans laquelle on divise encore c par d, premier reste, ensuite celui-ci par le second reste, &c. (On entend ici par reste le multiplicateur de l'inconnue dans la fraction réduite). Si d & c sont premiers entr'eux, on doit arriver à la fin à un reste égal à l'unité (14.) ; ce qui étant fait, l'on a ce que l'on cherche. Car faisant la derniere fraction égale à une nouvelle inconnue, on pourra assigner à cette inconnue une valeur en nombres entiers & positifs. Mais si d & c ne sont pas premiers, il est impossible d'arriver à un reste $= 1$. Soit la fraction réduite $\frac{a+dy}{c}$, a & d étant premiers entr'eux, d & c ne l'étant pas. Supposons que leur diviseur commun soit n, il est clair que n ne divisera pas a, autrement a & d ne seroient pas premiers entr'eux. Faisons $d = nf$, $c = ng$, notre fraction deviendra $\frac{a+nfy}{ng} = p$; donc $\frac{a}{n} + fy = gp$ (nombre entier), & parce que fy est aussi un nombre entier, $\frac{a}{n}$ feroit un nombre entier & a feroit divisible par n, ce qui est impossible ; donc, &c. En effet supposons la fraction réduite $\frac{5+11y}{33}$ dans laquelle d & c, c'est-à-dire 11 & 33 ne sont pas premiers entr'eux. Faisons $\frac{5+11y}{33} = p$; donc $y = 3p - \frac{5}{11}$; mais y & p étant des nombres entiers, il est évident que cette équation ne peut jamais avoir lieu. On peut donc connoître par-là dans quel cas une fraction réduite peut, ou ne peut pas être un entier,

en supposant y entier, ou dans quel cas la méthode précédente peut réussir.

PROBLÊME VI. *Un Cuisinier a acheté des perdrix & des lapins ; il a payé chaque perdrix 31 sols, & chaque lapin 20 sols. Il se trouve que les lapins lui ont coûté 7 sols de plus que les perdrix, combien a-t-il acheté de perdrix & de lapins ?* Supposons que x est le nombre des lapins, & que y désigne celui des perdrix. Par la nature du problême on aura $20x = 31y + 7$, & $x = \frac{31y + 7}{20} = y + \frac{11y + 7}{20}$ $= y + r$ (en faisant la fraction $= r$); donc $20r = 11y + 7$, & $y = \frac{20r - 7}{11} = r + \frac{9r - 7}{11} = r + s$; donc $11s = 9r - 7$, & $r = \frac{11s + 7}{9} = s + \frac{2s + 7}{9} = s + t$; ainsi $9t = 2s + 7$, & $s = \frac{9t - 7}{2}$ $= 4t + \frac{t - 7}{2} = 4t + u$. C'est pourquoi $2u = t - 7$, & $t = 2u + 7$; donc $s = 4t + u = 9u + 28$; $r = s + t = 11u + 35$; $y = r + s = 20u + 63$ nombre des perdrix ; & $x = y + r = 31u + 98$ nombre des lapins.

$x =$	$y =$
5	3
36	23
67	43
98	63
129	83
160	103
&c.	&c.

Il est visible que les plus petites valeurs positives de x & de y se trouvent en faisant $u = -3$; celles qui sont plus grandes se suivent en progression arithmétique comme le fait voir la table.

PROBLEME. *Un orfevre a trois lingots d'or, le premier contient 7 onces d'or par marc, le second $5\frac{1}{2}$, & le troisiéme $4\frac{1}{2}$; il veut faire un alliage de 30 marcs, de maniere que le marc de cet alliage con-*

tienne six onces d'or. Comment doit-il s'y prendre ? Qu'il prenne x marcs du premier lingot, y marcs du second, & z marcs du troisiéme, pour avoir 1°. l'équation $x+y+z=30$; 2°. il est visible que $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z$ exprimera la quantité d'or qui doit se trouver dans l'alliage, c'est-à-dire, 30 fois 6 onces d'or, ou 180 onces; donc $7x+5\frac{1}{2}y+4\frac{1}{2}z=180$. multipliant la premiere équation par 9 & la retranchant ensuite de celle-ci multipliée par 2, il vient $5x+2y=90$; d'où l'on tire $2y=90-5x$, $y=45-\frac{5x}{2}=45-5u$, en faisant $\frac{x}{2}=u$. Mais $z=30-x-y$: donc $z=3u-15$; ainsi u doit être plus grand que 4, & plus petit que 10. Cependant il ne peut pas être $=5$, autrement z seroit $=0$, il ne peut pas non plus être $=9$, parce que dans ce cas y seroit $=0$; de sorte que le problême admet les solutions qu'indique la table.

$u=6$,	$x=12$,	$y=15$,	$z=3$
7	14	10	6
8	16	5	9

PROBLEME. VI. *Les faisans se vendant deux écus, les perdrix un écu & les cailles $\frac{1}{2}$ écu, un seigneur ordonne à son maître-d'hôtel de lui acheter cent de ces oiseaux ne lui donnant pour cela que 70 écus, comment pourra s'y prendre le maître-d'hôtel ?* Par la nature du problême en faisant le nombre des faisans cherché $=x$, celui des perdrix $=y$, & celui des cailles $=z$, on aura ces deux équations $x+y+z=100$, $2x+y+\frac{1}{2}z=70$. De la seconde

multipliée par 2, retranchez la première, pour avoir $3x + y = 40$; ainsi il est visible que x est $< \frac{40}{3}$ ou < 14, & $y < 40$. Considérons maintenant la formule $y = 40 - 3x$. Si l'on fait $x = 13$, on trouve $y = 1$, & $z = 86$. Si $x = 12$, y sera $= 4$, & $z = 84$, & ainsi de suite. La table fait voir qu'il y a treize solutions.

x	y	z
$x=13$,	$y=1$,	$z=86$
12	4	84
11	7	82
10	10	80
9	13	78
8	16	76
7	19	74
6	22	72
5	25	70
4	28	68
3	31	66
2	34	64
1	37	62

PROBLEME VII. *Trente bêtes ont coûté 75 écus; les moutons coûtent 5 écus, les brebis 3, & les agneaux 2; on demande le nombre des moutons* x, *celui des brebis* y, *& celui des agneaux* z. Il est évident par la nature du problême, que les moutons ont coûté $5x$, les brebis $3y$, & les agneaux $2z$. Donc on a l'équation $5x + 3y + 2z = 75$. De plus, puisqu'il y a 30 bêtes, on a $x + y + z = 30$. Multipliant la seconde équation par 2, & la retranchant ensuite de la premiere, le premier membre du premier membre, le second du second (ce qui évidemment ne détruit point l'égalité, puisque de quantités égales on ôte seulement des quantités égales), il vient $3x + y = 15$, ce qui fait connoître que $y < 15$, & $x < 5$. Multipliant la seconde équation par 3, & du produit ôtant la premiere, l'on a $-2x + z = 15$; mais $2x < 10$, puisque $x < 5$; donc $z < 25$. Parce que la limite de x est plus petite que celle de y, servons nous de l'équation $3x + y = 15$, qui nous donne $y = 15 - 3x$. Faisant usage de cette premiere équation & de $z = 15 + 2x$, si nous supposons $x = 4$, nous aurons $y = 3$ & $z = 23$. La table fait voir les solutions qu'admet le problême, où l'on voit aussi les séries & les différences des séries des valeurs correspondantes de x, y, z.

x	y	z
$x=4$,	$y=3$,	$z=23$
3	6	21
2	9	19
1	12	17

PROBLEME VIII. *On a acheté 30 bouteilles de différens vins*

75 liv. Le vin de Bourgogne coûte 5 liv. la bouteille, celui de Champagne 3 liv. & celui de Cahors 2 liv. On demande le nombre des bouteilles de chaque espece de vin? Il est visible qu'en appellant x le nombre des bouteilles du premier vin, y le nombre des bouteilles du second, & z celui des bouteilles du troisieme, on aura les équations suivantes $x + y + z = 30$; $5x + 3y + 2z = 75$, desquelles on tirera les mêmes valeurs numériques de x, y & z que dans le problême précédent.

PROBLEME IX. *Supposant qu'un voyageur n'a que trois especes de monnoie, les pieces de la premiere espece valent 5 liv. celle de la seconde 3 liv. & celle de la troisiéme 2 liv. Il a dépensé 75 liv. qu'il veut payer en 30 pieces, combien de pieces doit-il donner de chaque espece?* Soit x le nombre cherché des des pieces de la premiere espece, y celui des pieces de la seconde espece, z celui des pieces de la troisiéme espece; il est évident que nous aurons les deux équations $x + y + z = 30$; $5x + 3y + 2z = 75$, d'où nous tirerons les mêmes valeurs numériques de x, y & z que dans l'avant dernier problême: ainsi ce voyageur peut payer sa dépense de quatre manieres différentes.

PROBLEME X. *Trois marchands ont chacun un certain nombre d'écus, de maniere que si on multiplie le nombre des écus du premier par 3, le nombre des écus du second par 5, & le nombre des écus du troisiéme par 7, la somme des produits est = 560; mais si l'on multiplie le premier nombre par 9, le second par 25, & le troisiéme par 49, la somme des produits sera 2920, on demande le nombre des écus de chacun.* Soit x le nombre des écus du premier marchand, y le nombre des écus du second, & z le nombre des écus du troisiéme. On aura donc les deux équations $3x + 5y + 7z = 560$; $9x + 25y + 49z = 2920$. Multipliant la premiere par 3 & la retranchant ensuite de la seconde, il restera $10y + 28z = 1240$; donc $5y + 14z = 620$; d'où l'on tire $y = 124 - \frac{14z}{5}$. Il est donc nécessaire que z soit divisible par 5. Ainsi faisant $u = \frac{z}{5}$ ou $5u = z$, nous aurons $y = 124 - 14u$; c'est pourquoi la premiere équation deviendra $3x - 35u + 620 = 560$, ou $3x = 35u - 60$, & $x = \frac{35u}{3} - 20$. Si l'on fait $u = 3t$, on trouvera $x = 35t$

— 20, $y = 124 - 42t$, &c. $z = 15t$. Or il est visible que t doit être < 3, autrement y seroit négatif ; de maniere que l'on est borné aux deux solutions qu'on voit dans la table.

$t = 1$,	$x = 15$,	$y = 82$,	$z = 15$
2	50	40	30

PROBELME XI. *Disposer 20 chevaux dans cinq écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune.* Soit s le nombre des chevaux qu'il doit y avoir dans la premiere écurie, t celui de la seconde, x celui de la troisiéme, y celui de la quatriéme, & z celui de la cinquiéme. Comme s & t doivent être des nombres impairs, leur somme $s + t$ sera évidemment un nombre pair que je fais $= p$. Par la même raison $x + y$ sera un nombre pair que je suppose $= q$; mais $p + q$, somme de deux nombres pairs est aussi un nombre pair que je fais $= n$. Si au nombre n j'ajoute z, nombre impair, la somme $n + z$ des deux nombres, dont l'un est pair, & l'autre impair, sera évidemment un nombre impair ; donc le nombre des chevaux devroit être impair. Mais ce nombre est 20 nombre pair ; donc le problême est impossible. On prouvera de même qu'il n'est pas possible de placer 100 chevaux dans sept écuries de maniere qu'il y en ait un nombre impair dans chacune, parce qu'alors sept nombres impairs donneroient un nombre pair, c'est-à-dire, que la somme d'un nombre impair de nombres impairs donneroit un nombre pair, ce qui est impossible.

Il arrive souvent qu'on ne parviendroit jamais à la solution d'un problême, si l'on ne faisoit attention à quelques propriétés singulieres des quantités qui peuvent le résoudre ; c'est ce qu'on peut facilement remarquer dans l'exemple suivant.

PROBLEME XII. *Trouver un nombre parfait, c'est-à-dire, un nombre égal à la somme de ses diviseurs e[illegible].* Parmi ces diviseurs nous ne comptons pas le nombre lui-même, autrement le problême seroit absurde. Je remarque que lorsqu'une progression géométrique commence par l'unité & que son second terme est un nombre premier, aucun de ses termes ne peut être divisé exactement que par quelqu'un de ceux qui le précédent, comme il est facile de s'en appercevoir dans la progression $\div\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 &c. (A). Je fais encore attention que dans la progression A, 1°. Chaque terme est égal à la somme des termes précédens augmentée de l'unité ; 2°. Que si on multiplie un des termes par un nombre premier, le produit

ne peut être divisé que par le terme qu'on a pris, par ceux qui le précédent, par le multiplicateur premier, & par les produits de ce multiplicateur par les termes précédens de la progression. Soit $d = 2$, la progression A deviendra $\div d^0 : d : d^2$ &c. Soit encore d^n le terme cherché, x le multiplicateur premier par lequel on doit multiplier le terme d^n pour avoir $d^n x$ nombre parfait cherché. Tous les diviseurs de ce produit sont $d^0 = 1, d, d^2, d^3 \cdots d^n, x, dx, d^2x \cdots d^{n-1}x$; & parce que d^n est égal à la somme de tous ses diviseurs, on aura $d^n x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n + x + dx + d^2x \cdots + d^{n-1}x$. D'où l'on tirera aisément $d^n x - x - dx - d^2x \cdots - d^{n-1}x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n$, & $x = \frac{1 + d + d^2 \cdots\cdots + d^n}{d^n - 1 - d - d^2 \cdots - d^{n-1}}$. Mais $d^n = (1 + d + d^2 \cdots + d^{n-1}) + 1$; donc $d^n - 1 - d \cdots - d^{n-1} = 1$, c'est-à-dire, que le dénominateur de la valeur de x est l'unité, & par conséquent $x = 1 + d + d^2 \cdots + d^n$. D'autre côté x doit être un nombre premier; ainsi si on ajoute les uns avec les autres les termes de la progression $\div 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$ &c. jusqu'à ce que la somme donne un nombre premier, & qu'on multiplie cette somme par le dernier terme qu'on a pris, le produit sera un nombre parfait, & l'on pourra de cette maniere en trouver tant qu'on voudra. En prenant les deux premiers termes 1 & 2, on a 3 nombre premier, & multipliant ce nombre par 2 dernier terme pris, on a 6 nombre parfait; car il est égal à la somme de tous ses diviseurs, 1, 2, 3. De même prenant les trois premiers termes 1, 2, 4, on trouve 7 nombre premier qui, étant multiplié par 4, donne 28, autre nombre parfait égal à tous ses diviseurs 1, 2, 4, 7, 14; & ainsi de suite.

68. Venons maintenant à une autre espece de problêmes dans lesquels nous supposerons que les quantités inconnues ne sont pas sourdes ou incommensurables : comme seroit, *par exemple*, la quantité $\sqrt{3}$.

PROBLEME I. *Trouver deux nombres dont la somme des quarrés soit un nombre quarré.* Si au quarré $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$, on ajoute un autre quarré $4x^2y^2$, la somme sera $= x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, quarré de

$x^2 + y^2$; donc les nombres cherchés sont $x^2 - y^2$ & $2xy$, dont la somme des quarrés égale le quarré de $x^2 + y^2$. Ainsi l'on peut donner à x & à y telles valeurs que l'on voudra, pourvu que ces valeurs ne soient point des quantités sourdes ou irrationnelles. Si l'on suppose $x = 3$ & $y = 2$, on aura $x^2 - y^2 = 9 - 4 = 5$, $2xy = 12$, & $25 + 144 = 169$, quarré de $x^2 + y^2 = 13$.

PROBLEME II. *Trouver deux nombres quarrés dont la différence soit un quarré.* Soit $x + y$ l'un de ces nombres, $x - y$ l'autre nombre, leurs quarrés sont $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$, dont la différence $4xy$ doit être un nombre quarré ; mais la racine $2\sqrt{xy}$ est nécessairement un nombre pair (parce que le double d'un nombre pair ou impair est nécessairement pair). Soit donc $2n$ cette racine, l'on aura $4xy = 4nn$, & $xy = nn$; ce qui fait voir que xy est un nombre quarré. Ainsi si l'on divise un quarré quelconque nn en deux facteurs, dont l'un soit pris pour x, & l'autre pour y, le problême sera résolu. Soit supposé $nn = 4$, si l'on fait $x = 4$ & $y = 1$, les nombres cherchés $x + y$, $x - y$ seront 5 & 3, dont les quarrés sont 25 & 9 ; or la différence de ces quarrés est $= 16$ nombre quarré.

PROBLEME III. *Trouver deux nombres* x *&* y *tels que le quarré du premier joint au second soit égal au quarré du second joint au premier.* On aura donc $x^2 + y = y^2 + x$, ou $x - y = x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y)$; donc en divisant par $x - y$, $1 = x + y$; & partant si l'on partage l'unité en deux parties quelconques, ces deux parties résoudront le problême. Ainsi si l'une des parties est $\frac{2}{3}$ & l'autre $\frac{1}{3}$, on aura $\frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{2}{3}$.

PROBLEME IV. *Diviser un nombre quarré* aa *en deux*

autres quarrés x^2 & y^2. Par la nature du problême l'on aura $a^2 = x^2 + y^2$ (A), $a^2 - x^2 = y^2 = (nx - a)^2$, en faisant $y = nx - a$; donc l'équation A deviendra $a^2 = x^2 + nnxx - 2anx + a^2$, ou en transposant & effaçant les termes qui se détruisent, $2nax = xx + nnxx$, ou $2na = (1 + nn)x$; donc $x = \frac{2na}{1+nn}$. Si on prend donc pour x & pour n des nombres rationnels, y sera aussi rationnel. Soit $n = 2$, x sera $= \frac{4a}{5}$. C'est pourquoi si on suppose $a = 5$, & par conséquent $a^2 = 25$, on aura $x = 4$ & $y = nx - a$ sera $= 3$: ainsi les nombres cherchés x & y seront 4 & 3, & la somme $16 + 9$ de leurs quarrés sera égale au quarré $a^2 = 25$.

PROBLEME V. *Etant donnés deux nombres quarrés* aa, bb *partager leur somme* aa + bb *en deux autres quarrés*. Soit $x - a$ la racine d'un des quarrés cherchés, $nx - b$ la racine de l'autre; nous aurons donc $(x - a)^2 + (nx - b)^2 = a^2 + b^2$, ou $x^2 - 2ax + a^2 + n^2x^2 - 2nbx + b^2 = a^2 + b^2$; & en transposant & effaçant les quantités qui se détruisent, $x^2 + n^2x^2 = 2nbx + 2ax$, & en divisant par x, $x + n^2x = 2nb + 2a$; d'où l'on tire $x = \frac{2nb + 2a}{1 + n^2}$. On pourra donc satisfaire à la question proposée, en prenant pour n un nombre rationnel, excepté l'unité; car si on faisoit $n = 1$, on auroit $x = b + a$, & le nombre $x - a$ seroit $= b$; de sorte que dans ce cas la somme $a^2 + b^2$ ne seroit pas partagée en deux quarrés différens de a^2 & b^2. Si on suppose $n = 2$, l'on a $x = \frac{4b + 2a}{5}$. Si donc on suppose encore $b = 2$, $a = 3$, il viendra $x =$

$\frac{14}{5}$, $x - a = -\frac{1}{5}$, & $nx - b = \frac{28}{5} - 2 = \frac{18}{5}$. Les quarrés de ces nombres $\frac{1}{25}$ & $\frac{324}{25}$ étant ajoutés ensemble donnent $\frac{325}{25} = 13$, somme de deux quarrés $4 + 9 = a^2 + b^2$.

PROBLEME VI. *On demande un nombre* x, *qui ajouté à deux nombres donnés* a & b, *les rende quarrés*. Par la nature du problême $a + x$ sera un quarré parfait, aussi-bien que $b + x$. Soit $m + n$ la racine du premier quarré & supposons que $m - n$ soit celle du second, nous aurons,

$$a + x = mm + 2mn + nn. \quad A$$
$$b + x = mm - 2mn + nn. \quad B$$
$$a - b = 4mn.$$

Ainsi si on prend le quart mn de la différence des nombres donnés, & qu'on le divise en deux facteurs m & n, les racines des quarrés qui résoudront le problême, seront $m + n$ & $m - n$. Or l'un quelconque de ces quarrés suffira pour trouver la valeur de x par le moyen des équations A ou B. Soit $a = 17$, $6 = 5$, on aura $a - b = 12$ & $mn = 3$. Ayant donc pris $m = 3$ & $n = 1$, pour avoir $m + n = 4$, $m - n = 2$, il viendra $a + x = 16$ & $x = -1$ (l'équation $b + x = 4$ donne aussi $x = -1$) & il est visible que $17 - 1 = 16$, & $5 - 1 = 4$ sont des nombres quarrés.

PROBLEME VII. *Titius & Alexandre ont chacun un certain nombre de louis, de maniere que si l'on ajoute le produit de ces nombres à leur somme, le résultat donne 79; quel est le nombre des louis de chacun?* Soit x le nombre des louis de Titius, y le nombre des louis d'Alexandre. Par la nature du problême $xy + x + y = 79$; donc $xy + y = 79 - x$, & $y = \frac{79 - x}{x + 1} = -1 + \frac{80}{x+1}$. Il faut donc que $x + 1$ soit un diviseur de

80. Si l'on veut que x & y soit des nombres entiers positifs ou o, on aura les solutions indiquées par la table.

Diviseurs de 80	1	2	4	5	8	10	16	20	40	80
$x =$	0	1	3	4	7	9	15	19	39	79
$y =$	79	39	19	15	9	7	4	3	1	0

PROBLEME VIII. m, a, b & c *étant des nombres donnés, on demande la valeur de* x *&* de y *en nombres entiers, lorsqu'on a l'équation* mxy = ax + by + c. On aura donc $y = \frac{ax+c}{mx-b}$, $my = \frac{max+mc}{mx-b} = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$, & par conséquent le numérateur de cette fraction doit être divisible par le dénominateur; c'est pourquoi en faisant le numérateur $= fg$, & $mx - b = f$ ou $x = \frac{f+b}{m}$, $f+b$ doit être divisible par m. Ainsi parmi les facteurs de $mc+ab$ on ne peut employer que ceux qui, étant ajoutés à b, donnent une somme divisible par m.

PROBLEME IX. *Alexandre a un nombre* x *de louis & Titius un nombre* y *tels que* 5xy = 2x + 3y + 18, *quel est le nombre des louis d'Alexandre & celui de Titius?* On aura $y = \frac{2x+18}{5x-3}$ & $5y = \frac{10x+90}{5x-3} = 2 + \frac{96}{5x-3}$. Il ne s'agit donc que de trouver parmi les diviseurs de 96 ceux qui, ajoutés à 3, donnent des nombres divisibles par 5; mais les diviseurs de 96 étant 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48, 96, il est facile de voir qu'il n'y a que 2, 12, 32 qui aient la condition requise. Si l'on fait $5x - 3 = 2$, on aura $x = 1$ & $y = 10$; l'équation $5x - 3 = 12$ donne $x = 3$ & $y = 2$. Enfin la supposition de $5x - 3 = 32$ donnera $x = 7$ & $y = 1$.

REMARQUE. Comme dans la solution générale l'on a $my = a + \frac{mc+ab}{mx-b}$, il n'est pas difficile de voir que si un nombre de la forme $mc + ab$ est divisible par $mx - b$, le quotient est nécessairement renfermé dans la forme $my - a$. Ainsi l'on peut représenter $mc + ab$ par $(mx - b) \cdot (my - a)$. Si l'on avoit $m = 12$, $b = 7$, $a = 5$ & $c = 15$, on trouveroit $12y - 5 =$

$= \frac{215}{12x - 7}$. Les diviseurs de 215 sont 1, 5, 43, 215, parmi lesquels il faut choisir ceux qui sont compris dans la formule $12x - 7$. Le seul diviseur 5 satisfaisant à cette condition, on a $12x - 7 = 5$, & $12y - 5 = 43$; donc $x = 1$ & $y = 4$.

PROB. X. *Titius a un nombre* x *& Alexandre un nombre* y *de chevaux, de maniere que* $xx + xy = 2x + 3y + 29$; *quel est le nombre des chevaux de chacun*? On aura $y = \frac{2x - xx + 29}{x - 3}$ $= - x - 1 + \frac{26}{x - 3}$; $x - 3$ doit donc être un diviseur de 26, & la division étant supposée faite, le quotient sera $y + x + 1$; mais les diviseurs de 26 sont 1, 2, 13, 26 : Ainsi nous aurons les solutions suivantes, si $x - 3 = 1$, ou si $x = 4$, on aura $y + x + 1 = y + 5 = 26$, & $y = 21$, Si $x - 3 = 2$, on aura $x = 5$ & $y = 7$. Si $x - 3 = 13$, on aura $x = 16$ & $y = - 15$. Cette derniere valeur étant négative ne peut pas servir, & c'est pour la même raison qu'on ne peut pas supposer $x - 3 = 26$.

PROBLEME XI. *On demande de rendre rationelle la quantité* $\surd(a + bx)$. Soit $a + bx = yy$, on aura $x = \frac{yy - a}{b}$, & quelque nombre que l'on substitue à la place de y, il en résultera toujours pour x une valeur telle que $a + bx$ sera un quarré, & par conséquent $\surd(a + bx)$ une quantité rationelle.

PROBLEME XII. *Rendre rationelle la formule* $\surd(1 + xx)$. Il est clair que les valeurs de x ne peuvent être des nombres entiers; il faut donc se borner à chercher des nombres fractionnaires. Soit $1 + xx = x + t$; donc $1 + x^2 = xx + 2tx + t^2$; d'ou l'on tire $2tx + tt = 1$, & $x = \frac{1 - tt}{2t}$. Si à la place de t on substitue un nombre entier ou fractionnaire, il en résultera pour x une valeur qui résoudra le problême. Soit $t = \frac{m}{n}$, on aura $x = \frac{1 - \frac{mm}{nn}}{\frac{2m}{n}} = \frac{nn - mm}{2mn}$ (en multipliant les deux termes de la fraction par nn). Donc $1 +$

$xx = \frac{n^4 + 2mmnn + m^4}{4mmnn}$, & $\sqrt{(1+xx)} = \frac{nn+mm}{2mn}$. Si $n = 2$, & $m = 1$, on a $x = \frac{3}{4}$; si $n = 3$, & $m = 1$, il vient $x = \frac{4}{3}$; si $n = 3$ & $m = 2$, x sera $= \frac{5}{12}$; &c.

PROBLEME XIII. *z étant un nombre entier, on propose de rendre rationelle la formule* $\sqrt{(2zz+1)}$. Soit supposée cette quantité $= z + p$, l'on aura $2zz + 1 = zz + 2zp + pp$; ainsi $zz = 2zp + pp - 1$, & $z = p + \sqrt{(2pp - 1)}$. Il est donc visible que si $p = 1$, z sera une quantité rationelle $= 2$ & $\sqrt{(2zz+1)}$ sera $= 3$.

PROBLEME XIV. *z étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(3zz+1)}$. Supposant cette quantité $= z + p$, nous aurons $3zz + 1 = zz + 2zp + pp$ & $2zz = 2zp + pp - 1$, d'où l'on tire $z = \frac{p + \sqrt{(3pp-2)}}{2}$; z sera donc rationel en supposant $p = 1$, ce qui donnera $z = 1$, & $\sqrt{3zz+1)} = 2$.

PROBLEME XV. *z étant encore un nombre entier, on demande de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(5zz+1)}$ *qui est plus grande que* $2z$. Je suppose cette quantité $= 2z + p$ pour avoir $5zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$; d'où je tire $zz = 4zp + pp - 1$, & $z = 2p + \sqrt{(5pp-1)} = 2 + 2$, en supposant $p = 1$; donc $z = 4$ & $\sqrt{(5zz+1)} = 9$.

PROBLEME. *z étant toujours un nombre entier, on propose de rendre rationelle la forme* $\sqrt{(6zz+1)}$ *dont la valeur est entre* $2z$ *&* $3z$. Je fais donc cette quantité $= 2z + p$ pour avoir $6zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$, ou $2zz = 4zp + pp - 1$. Donc par la méthode des équations du second degré, j'aurai $z = p + \frac{\sqrt{(6pp-2)}}{2}$; donc $z > 2p$, du moins en supposant $p > 1$. Si en conséquence je suppose $z = 2p + q$, nous aurons en substituant cette valeur dans l'équation précédente, & ôtant la fraction, nous aurons, dis-je, $4p + 2q = 2p + \sqrt{(6pp-2)}$, ou $2p + 2q = \sqrt{(6pp-2)}$ ou, en prenant les quarrés $4pp + 8pq + 4qq = 6pp - 2$. Il est donc facile de voir que $2pp = 4qq + 8pq + 2$, $pp = 2qq + 4pq + 1$, & $p = 2q + \sqrt{(6qq+1)}$. Cette formule ressemblant à la premiere, je fais $q = 0$, donc $p = 1$, $z = 2$, & $\sqrt{(6zz+1)} = 5$.

PROBLEME XVI. *z étant encore un nombre entier, comment*

peut-on rendre rationelle la formule $\sqrt{(7zz+1)} = m$? Il eſt facile de voir que $m > 2z$; je fais donc $m = 2z + p$ pour avoir $7zz + 1 = 4zz + 4zp + pp$, ou $3zz = 4zp + pp - 1$; donc $z = \frac{2p + \sqrt{(7pp - 3)}}{3}$. Maintenant, puiſque $z > \frac{4p}{3}$, & par conſéquent plus grand que p, je ſuppoſerai $z = p + q$, & j'aurai $p + 3q = \sqrt{(7pp - 3)}$, ou $pp + 6pq + 9qq = 7pp - 3$; donc $6pp = 9qq + 6pq + 3$, ou $2pp = 3qq + 2pq + 1$, & par conſéquent $p = \frac{q + \sqrt{(7qq + 2)}}{2}$. Or on a ici $p > q$; c'eſt pourquoi je fais $p = q + r$, pour avoir $q + 2r = \sqrt{(7qq + 2)}$. De là je tire d'abord $qq + 4rq + 4rr = 7qq + 2$; enſuite $6qq = 4qr + 4rr - 2$, ou $3qq = 2qr + 2rr - 1$; & enfin $q = \frac{r + \sqrt{(7rr - 3)}}{3}$. Et parce que $q > r$, je fais $q = r + s$, pour avoir $2r + 3s = \sqrt{(7rr - 3)}$, ou $4rr + 12rs + 9ss = 7rr - 3$, ou $3rr = 12rs + 9ss + 3$, ou $rr = 4rs + 3ss + 1$, & $r = 2s + \sqrt{(7ss + 1)}$, formule par laquelle en faiſant $s = 0$, on obtient $r = 1$, $q = 1$, $p = 2$, $z = 3$, & $m = 8$.

On peut auſſi réſoudre plus facilement ce problême de la maniere ſuivante. Puiſque $7zz + 1 = mm$, il eſt viſible que $m < 3z$. Je ſuppoſe donc $m = 3z - p$ pour avoir $7zz + 1 = 9zz - 6zp + pp$, ou $2zz = 6zp - pp + 1$. Réſolvant cette équation du ſecond degré, en regardant z comme l'inconnue, je trouve $z = \frac{3p + \sqrt{(7pp + 2)}}{2}$. Ainſi $z < 3p$. Je fais $z = 3p - 2q$ pour avoir, en prenant les quarrés, $9pp - 12pq + 4qq = 7pp + 2$, d'où il eſt aiſé de tirer $pp = 6pq - 2q^2 + 1$, & $p = 3q + \sqrt{(7qq + 1)}$. Donc en faiſant $q = 0$, il viendra $p = 1$, $z = 3$, & $m = 8$, comme nous l'avons déjà trouvé par la premiere méthode.

PROBLEME XVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(8zz + 1)} = m$. Je fais $m = 3z - p$, pour avoir $8z^2 + 1 = 9z^2 - 6zp + pp$, ou $zz = 6zp - pp + 1$; d'où je tire $z = 3p + \sqrt{(8pp + 1)}$. Comme $\sqrt{(8pp + 1)}$ eſt ſemblable à la forme propoſée, je puis faire $p = 0$: ainſi $z = 1$, & $m = 3$.

PROBLEME XVIII. *g étant un nombre entier poſitif & non quarré, rendre rationelle la forme* $\sqrt{(gzz + 1)}$. En ſuivant

la méthode qu'on vient d'employer dans le dernier & l'avant dernier problême, on parviendra à la fin à une quantité radicale de la forme $\sqrt{(guu+1)}$ qui sera semblable à la proposée, dans laquelle en supposant $u=0$ & retournant sur ses pas, on trouvera pour z une valeur qui rendra rationelle la forme proposée. Si g étoit un nombre quarré, entier & positif, il est visible que gzz seroit un quarré, car z est supposé un nombre entier. Mais un quarré augmenté d'une unite ne peut demeurer quarré; donc $gzz+1$ ne sauroit dans ce cas être un quarré. Si g étoit négatif & entier, la formule proposée seroit imaginaire; ainsi il seroit absurde de vouloir la rendre rationelle.

PROBLEME XIX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa+bx+cx^2)}$. Je fais cette quantité $=a+\frac{mx}{n}$ pour avoir $aa+bx+cxx=aa+\frac{2am}{n}x+\frac{mm}{nn}\cdot xx$. Effaçant les termes qui se détruisent & divisant le reste par x, il vient $b+cx=\frac{2am}{n}+\frac{mm}{nn}x$; d'où il est aisé de tirer $x=\frac{2amn-bnn}{nnc-mm}$. En substituant cette valeur de x, nous aurons $a+\frac{mx}{n}=a+\frac{2mma-mnb}{nnc-mm}=\frac{nnac+amm-bnm}{nnc-mm}=\sqrt{(aa+bx+cxx)}$.

Si $a=0$, la forme $\sqrt{(bx+cx^2)}$ deviendra rationelle en supposant $\sqrt{(bx+cxx)}=\frac{mx}{n}$, ce qui donnera $bx+cxx=\frac{mmxx}{nn}$; donc $bnn+cnnx=mmx$, & $x=\frac{nnb}{mm-cnn}$. Soit $b=c=2$, $m=3$, & $n=2$, nous aurons $x=8$ & $\sqrt{(2x+2xx)}=12$.

PROBLEME XX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(a+bx+ccx^2)}$ *dans laquelle le coefficient de* x^2 *est un quarré.* Je fais cette formule $=cx+\frac{m}{n}$, pour avoir $a+bx+ccxx=ccxx+\frac{2mx}{n}+\frac{mm}{nn}$. En multipliant par nn, & faisant les opérations ordinaires, on trouvera $x=\frac{mm-ann}{bnn-2cmn}$. Ainsi en substituant cette valeur de x, nous aurons $\sqrt{(a+bx+ccxx)}=\frac{cmm-acnn}{bnn-cmn}+\frac{m}{n}$, les nombres m & n sont arbitraires.

PROBLEME XXI. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ *lorsque la quantité sous le signe est le produit de deux facteurs rationels* $(f+gx)\cdot(h+kx)$. Soit $\sqrt{[(f+gx)\times(h+kx)]}=\frac{m\ (f+gx)}{n}$, on aura $(f+gx)\cdot(h+kx)=\frac{mm\cdot(f+gx)^2}{nn}$; d'où l'on tire $hnn+knnx=mm\cdot(f+gx)$, & $x=\frac{fmm-hnn}{knn-gmm}$: cette valeur de x résout le problême.

Si l'on demande, *par exemple* de trouver un nombre tel que du double de son quarré retranchant 2, le reste soit un quarré; $2xx-2$ sera donc un quarré; or $2xx-2=2\cdot(x+1)\times(x-1)$. Si donc on suppose $\sqrt{[(2x+2)(x-1)]}=\frac{m\cdot(x+1)}{n}$, on aura $2\cdot(x+1)\cdot(x-1)=\frac{mm(x+1)^2}{nn}$ Multipliant par nn & divisant par $x+1$, il viendra $2nnx-2nn=mmx+mm$; d'où l'on tire $x=\frac{mm+2nn}{2nn-mm}$. Si l'on fait $m=n=1$, il vient $x=3$, & $2xx-2=16$. Si $m=3$, & $n=2$, l'on trouvera $x=-17$; mais parce que le quarré de x & de $-x$ est toujours le même on peut faire $x=17$, & l'on aura également $2xx-2=576$ quarré de 24.

PROBLEME XXII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt{(a+bx+cx^2)}$ *lorsque la quantité sous le signe peut se décomposer en deux parties dont l'une soit un quarré, la seconde étant le produit de deux facteurs.* Dans ce cas la quantité $a+bx+cxx$ pourra donc être représentée par la forme $pp+qr$, les lettres p, q, r indiquant des quantités de la forme $f+gx$. L'on fera $\sqrt{(pp+qr)}=p+\frac{mq}{n}$, pour avoir $pp+qr=pp+\frac{2mpq}{n}+\frac{mmqq}{nn}$. Effaçant pp de part & d'autre, & divisant par q, on trouvera $r=\frac{2mp}{n}+\frac{mmq}{nn}$; donc $nnr=2mnp+mmq$, formule par laquelle on peut facilement déterminer x.

Supposons qu'on demande un nombre x, tel que si du double de son quarré l'on retranche 1, le reste soit un quarré, ou tel que $2xx-1$ soit un quarré. Cette formule peut être représentée par $xx+(xx-1)=xx+(x-1)\cdot(x+1)$. Ainsi elle est dans le cas du problême. Supposant donc sa racine $=x+$

$\frac{m \cdot (x+1)}{n}$, on aura $xx + (x-1) \cdot (x+1) = xx + \frac{2m(x+1)}{n} + \frac{mm(x+1)^2}{nn}$; ainsi, en effaçant xx de part & d'autre, divisant ensuite par $x+1$ & ôtant les fractions, on aura $nnx - nn = 2mnx + mmx + mm$; donc $x = \frac{mm+nn}{nn-2mn-mm}$; & puisque dans la formule $2xx - 1$ le quarré de x s'y trouve seul, il est indifférent de prendre pour x des valeurs positives ou négatives. On peut de même écrire $-m$ au lieu de $+m$, afin d'avoir $x = \frac{mm+nn}{nn+2mn-mm}$. Si on fait $m = 1 = n$, on aura $x = 1$ & $2xx - 1 = 1$.

Si l'on demandoit de trouver un nombre x tel que $2xx + 2$ fût un quarré; on auroit $2xx + 2 = 4 + 2(x+1) \cdot (x-1)$, qui est dans le cas du problême précédent. Supposons sa racine $= 2 + \frac{m(x+1)}{n}$ nous trouverons $x = \frac{4mn+mm+2nn}{2nn-mm}$. Le calcul qu'il faut faire pour cela n'ayant rien de difficile, je le laisse aux Commençans. Si dans la valeur de x on fait $m = 1$ & $n = 1$, on trouvera $x = 7$, & $2xx + 2 = 100$.

PROBLEME XXIII. *On demande la valeur de x qui peut rendre la quantité $5xx + 3x + 7$ un quarré parfait.* Si je fais $x = z - 1$, la formule proposée devient $5zz - 7z + 9$, dont je suppose la racine quarrée $= 3 - \frac{mz}{n}$. Donc $5zz - 7z + 9 = 9 - \frac{6mz}{n} + \frac{mmzz}{nn}$. Donc en effaçant 9 de part & d'autre, divisant ensuite par z & ôtant les fractions, $5nnz - 7nn = -6mn + mmz$, d'où il est aisé de tirer $z = \frac{7nn-6mn}{5nn-mm}$, & enfin $x = \frac{2nn-6mn+mm}{5nn-mm}$. Si $m = 2$, & $n = 1$, on aura $x = -6$, & par conséquent $5xx + 3x + 7 = 169$ quarré de 13.

PROBLEME XXIV. *Titius & Alexandre ont chacun un certain nombre de louis qu'il s'agit de trouver : on sait que la somme des quarrés de ces nombres est égale à la somme des quar-*

rés des nombres de louis de Pierre & de Jacques. Soit a le nombre de louis de Pierre, b le nombre de louis de Jacques. La somme des quarrés de ces nombres sera $a^2 + b^2$. Supposons que le nombre des louis de Titius est $mx - a$, celui des louis d'Alexandre étant $nx - b$. La somme des quarrés de ces nombres sera donc $mm\,xx - 2max + aa + nnxx - 2nbx + bb = aa + bb$, & $x = \frac{2ma + 2nb}{mm + nn}$. Cette valeur substituée dans les nombres $mx - a$ & $nx - b$ résoudra le problême.

Si l'on demandoit en général deux nombres dont la somme des quarrés fût égale à la somme de deux autres quarrés qui ne sont pas donnés. Les nombres cherchés seroient $mm + 2bmn - ann$ & $- bmm + 2amn + bnn$, dont la somme des quarrés donne $\begin{matrix} a^2 m^4 + 2a^2 m^2 n^2 + a^2 n^4 \\ + b^2 m^4 + 2b^2 m^2 n^2 + b^2 n^2 \end{matrix}$; or cette quantité est égale à la somme des quarrés des nombres $(mm + nn)a$, & $(mm + nn)b$; mais il faut remarquer que m ne doit pas être $= n$, autrement les nombres trouvés seroient égaux aux nombres supposés, & la solution du problême seroit illusoire. Si l'on fait $m : n :: a : b$, le premier des nombres supposés sera égal au premier des nombres trouvés, & le second des supposés au second, des trouvés.

PROBLEME XXV. *Trouver deux nombres tels que la différence de leurs quarrés soit donnée, & = a.* Supposons que les nombres cherchés sont $mx + n$, & $mx - n$, la différence $4mnx$ de leurs quarrés doit être $= a$; donc $x = \frac{a}{4mn}$. Ainsi les nombres qui résolvent le problême, sont $\frac{a}{4n} + n$, $\frac{a}{4n} - n$. Si la différence donnée a est supposée $= 2$, ces nombres seront $\frac{1}{2n} + n$ & $\frac{1}{2n} - n$. Si donc on fait $n = 1$ les nombres cherchés seront $\frac{3}{2}$, & $- \frac{1}{2}$, ou $\frac{3}{2}$ & $\frac{1}{2}$; car le quarré d'un nombre négatif $- \frac{1}{2}$ est le même que celui de $+ \frac{1}{2}$. Si $n = 2$, ces nombres seront $\frac{9}{4}$ & $- \frac{7}{4}$, ou $\frac{9}{4}$ & $\frac{7}{4}$, &c.

PROBLEME XXVI. *On demande 1°. un nombre x qui étant ajouté à son quarré, donne un quarré; 2°. on demande aussi un nombre qui étant retranché de son quarré donne aussi un quarré.* Donc $x^2 + x$ sera un quarré que je fais $= p^2 x^2$; d'où l'on tire

$x = \frac{1}{pp - 1}$. Si je fais $x^2 - x = q^2 x^2$, j'aurai $x = \frac{1}{1 - qq}$.
Cette derniere solution suppose $xx > x$; mais si $x < 1$, on fera $x - x^2 = qqxx$, & l'on aura dans ce cas $x = \frac{1}{qq + 1}$; & $x - x^2$ sera un nombre quarré.

PROBLEME XXVII. *Trouver un nombre dont le quarré d'une des parties multiplié par* aa, *& ajouté à l'autre partie multipliée par* b *donne un quarré.* Soit x le nombre cherché, y la premiere partie, $x - y$ la seconde; par la nature du problême, $aayy + bx - by$ ou $yy + \frac{bx}{a} - \frac{by}{aa}$ doit être un quarré. Or cela aura lieu si $\frac{bx}{aa} = \frac{bb}{4a^4}$, ou si $x = \frac{b}{4aa}$.

PROBLEME XXVIII. *Trouver trois nombres tels que la somme de ces trois nombres, & de deux quelconques d'entr'eux donne un nombre quarré.* Soient les trois nombres $4x$, $xx - 4x$, $2x + 1$. La somme des trois est $x^2 + 2x + 1$; la somme du premier & du second est x^2; celle du second & du troisiéme est $x^2 - 2x + 1$. Or tous ces nombres sont des nombres quarrés. Pour satisfaire donc parfaitement au problême, il faut que la somme $6x + 1$ du premier & du troisiéme soit un quarré. Je fais $6x + 1 = p^2$: donc $x = \frac{p^2 - 1}{6}$. Ainsi nos trois nombres sont $\frac{2pp - 2}{3}$, $\frac{p^4 - 26p^2 + 25}{36}$, $\frac{p^2 + 2}{3}$.

PROBLEME XXIX. *Trouver trois nombres* x, y, z, *tels que si au produit de deux quelconques de ces nombres on ajoute un nombre donné* a, *il en résulte toujours un quarré.* Par la nature du problême ces trois quantités $xy + a$, $xz + a$, $yz + a$ doivent être des quarrés. Je fais $xy + a = p^2$, ou $xy = pp - a$, $x = p + m$, & $y = p - n$; donc $xy = p^2 + pm - np - mn = p^2 - a$, & $p = \frac{mn - a}{m - n}$. Ainsi $x = \frac{mn - a}{m - n} + m = \frac{mm - a}{m - n}$, & $y = \frac{mn - a}{m - n} - n = \frac{nn - a}{m - n}$. Si donc x & y ont les valeurs que nous venons de trouver, $xy + a$ sera un quarré. Or il est visible que si l'on multiplie les valeurs de x & de y par $m - n$ & qu'on leur ajoute ensuite la quantité a, elles donne-

ront m^2, n^2, donc si on fait $z = m - n$, $xz + a$ & $yz + a$ seront aussi des quarrés.

PROBLEME XXX. *On demande deux nombres* x *&* y, *dont la somme soit un quarré tel que sa racine soit égale à la somme faite du second ajouté au quarré du premier.* On aura donc $x + y = (xx + y)^2$. Je fais chaque membre de cette équation $= p^2 x^2$ pour avoir $(xx + y)^2 = p^2 x^2$, $xx + y = px$, & $y = px - xx$. Mais $x + y = p^2 x^2$; donc en substituant la valeur de y, $x + px - xx = p^2 x^2$, ou $x = \frac{p+1}{pp+1}$; donc $y = \frac{(p+1) \cdot p}{(pp+1)} - \frac{(p+1)^2}{(pp+1)^2}$, ou $= y$
$\frac{(pp+1) \cdot (p+1) \cdot p - (p+1)^2}{(pp+1)^2} = \frac{p^4 + p^3 - p - 1}{(pp+1)^2}$
$= \frac{(p^3 - 1) \cdot (p+1)}{(pp+1)^2}$.

LEMME. *Soit* a $>$ b, *si l'on multiplie la somme* a + b *de deux quantités* a *&* b *par leur différence* a — b, *le produit sera* $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$, *& la demi-somme des facteurs donnera la racine* a *du plus grand quarré, la demi-différence de ces mêmes facteurs donnant la racine* b *du plus petit quarré.*

PROBLEME XXXI. *On demande trois nombres tels [illegible] quarré de chacun de ces nombres ajouté à la somme des deux autres, donne un quarré.* Puisque $xx + 2x + 1$ est un quarré, si les trois nombres cherchés sont x, $2x$, 1, le premier satisfera au problême. Pourque les autres aient les conditions requises, il est nécessaire que $4xx + x + 1$, & $3x + 1$ soient des nombres quarrés. Je retranche le quarré $3x + 1$ du quarré $4xx + x + 1$, il reste $4xx - 2x = (4x - 2) \cdot x$. La demi somme de ses facteurs est $\frac{5x}{2} - 1$, la demi-différence étant $\frac{3x}{2} - 1$; donc (par le lemme précédent) $\frac{5x}{2} - 1$ est la racine de $4xx + x + 1$, & $\frac{3x}{2} - 1$, la racine de $3x + 1$. On aura donc $\frac{25xx}{4} - 5x + 1 = 4xx + x + 1$ (d'où l'on tire $25xx = 16xx + 24x$, ou $9x = 24$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$), & $\frac{9xx}{4} - 3x + 1 = 3x + 1$; donc $9xx - 12x$

$+4 = 12x + 4$, $9x^2 = 24x$, $x = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$. Ainſi les nombres cherchés ſont $\frac{8}{3}$, $\frac{16}{3}$, 1.

PROBLEME XXXII. *Titius achete deux eſpeces de vins, le premier lui coûte huit louis la meſure, & le ſecond cinq louis la meſure. La ſomme des louis dépenſés eſt un nombre quarré qui, ajouté à 60, donne encore un nombre quarré, dont la racine eſt la ſomme des prix de l'un & de l'autre vin. Quel eſt le nombre total des meſures ?* Soit x ce nombre ; par la nature du problême $xx - 60$ eſt le nombre des louis dépenſés, qui doit être un quarré. Si Titius n'avoit acheté avec cet argent que du vin à cinq louis la meſure, le nombre des meſures ſeroit $\frac{xx - 60}{5}$, nombre qui eſt certainement plus grand que $xx - 60 > 5x$. Il eſt viſible auſſi qu'en ſuppoſant que Titius n'eût acheté que du vin à huit louis la meſure, $\frac{xx - 60}{8}$ exprimeroit la nombre des meſures de ce vin, & il eſt aiſé de voir que $xx - 60 < 8x$. Donc $xx - 5x > 60$, & $xx - 8x < 60$; donc (en ajoutant les quarrés de la moitié du coefficient de x) $x^2 - 5x + \frac{25}{4} > \frac{265}{4}$, $xx - 8x + 16 < 76$. Suppoſons que le premier quarré eſt plus grand que $\frac{289}{4}$, & que le ſecond eſt plus petit que 64. Donc, en extrayant les racines, nous aurons $x - \frac{5}{2} > \frac{17}{2}$, $x - 4 < 8$; & partant $x > 11$, & $x < 12$. On auroit pu à la vérité trouver des limites moins étroites, mais celles-là ſuffiſent pour notre objet.

Voyons maintenant de quelle maniere, en retenant les mêmes limites, $xx - 60$ peut être un quarré. Nous ſavons que x doit être un des termes de la racine de ce quarré ; faiſons l'autre $= y$, & ſuppoſons $xx - 60 = (y - x)^2$, ou $xx - 60 = x^2 - 2xy + yy$, ou $2xy = yy + 60$, ou $x = \frac{yy + 60}{2y}$, mais x doit être > 11 & < 12 : donc $(y - 11)^2 > 121 - 60 = 61$. Je ſuppoſe $(y - 11)^2 > 64$, donc $y - 11 > 8$, & $y > 19$.

L'on a auſſi $(y - 12)^2 < 144 - 60 = 84$; donc en ſuppoſant $(y - 12)^2 < 81$; l'on aura $y - 12 < 9$ & $y < 21$. Les valeurs de y ſe trouvant entre 19 & 21, voyons ſi la ſuppoſition de $y = 20$ réſout le problême. On aura donc $xx - 60 = (20 - x)^2 = x^2 - 40x + 400$, ou $x = \frac{460}{40} = 11\frac{1}{2}$; ainſi le nombre total des meſures ſera $11\frac{1}{2} = \frac{23}{2}$. Si du quar-

ré de ce nombre l'on retranche $60 = \frac{240}{4}$, il reste $\frac{289}{4}$, quarré de $\frac{17}{2}$: ainsi le nombre des louis dépensés est $= 72 \frac{1}{4}$.

Pour trouver le nombre des mesures de chaque espece de vin, je suppose que z exprime le nombre des mesures de la seconde espece ; il est visible que $5z$ sera le prix du vin à 5 louis la mesure, & que $11 \frac{1}{2} - z$ sera le nombre des mesures de l'autre, dont le prix est $92 - 8z$ & par conséquent le prix de tout le vin sera $92 - 3z$; donc $92 - 3z = 72 \frac{1}{4}$; d'où l'on tire $3z = 19 \frac{3}{4}$ & $z = 6 \frac{7}{12}$, nombre des mesures au plus bas prix. Donc $11 \frac{1}{2} - 6 \frac{7}{12} = 4 \frac{11}{12}$ sera le nombre des mesures de l'autre vin.

PROBLEME XXXIII. *Trouver deux nombres* x & y, *dont la somme soit à celle de leurs quarrés, comme* a : b. Par la nature du problême $x + y : xx + yy :: a : b$; ainsi l'on a l'équation $bx + by = axx + ayy$. Je fais $y = xz$, & j'ai $bx + bxz = axx + axxzz$; d'où l'on tire $b + bz = ax + axzz$, & $x = \frac{b + bz}{a + azz}$. Ainsi en prenant pour z tel nombre rationel que l'on voudra, l'on aura une valeur rationelle de x, & de $y = xz$. Si, *par exemple*, a est $= 1$, $b = 4$ & $z = 4$, on aura $x = 4$ & $y = 16$.

PROBLEME XXXIV. *Trouver deux nombres* x & y, *tels qu'en ajoutant le quarré de l'un avec le produit du quarré de l'autre par un nombre donné* a, *positif ou négatif, la somme soit un nombre quarré* $= bb$. L'on aura $xx + ayy = bb$. Supposant $x = zy - b$, & $xx = (zy - b)^2$, nous aurons $(zy - b)^2 + ay^2 = bb$; ou $zzyy - 2bzy + bb + ayy = bb$. En effaçant bb de part & d'autre, transposant, divisant par y, & ensuite par $a + zz$; il vient $y = \frac{2bz}{a + zz}$. Mais $x^2 = bb - ay^2$; donc $x = \pm \frac{b \cdot (a - zz)}{a + zz}$. Ainsi en prenant pour z un nombre rationel quelconque, on aura aussi pour x & y des nombres rationels. Ce problême renferme comme un cas particulier celui dans lequel on demanderoit deux nombres quarrés, dont la différence fût un quarré donné : car il suffit de supposer $a = -1$; il renferme encore le Problême (IV).

PROBLEME XXXV. *Trouver deux nombres rationels* x & y, *tels que si, du quarré du premier, l'on retranche celui du second multiplié par un nombre quarré* bb, *il reste un nombre donné* a. Par la nature du problême $xx - bbyy = a$. Si l'on

suppose $x = z - by$, notre équation deviendra en substituant la valeur de x & réduisant, $zz - 2bzy = a$; ainsi l'on aura $y = \frac{zz - a}{2bz}$, $x = \frac{zz + a}{2z}$, & quelque nombre rationel qu'on substitue à la place de z, il en résultera des valeurs de x & de y qui résoudront le problême.

PROBLEME XXXVI. a, b, c, d, e, f *étant des nombres entiers & rationels, on demande des nombres rationels* t & u, *qui satisfassent à cette équation* $att + btu + dt = -cuu - eu - f$. Regardant t comme la seule quantité inconnue, & résolvant cette équation par la méthode du second degré, il vient $t = \frac{-(bu + d) \pm \sqrt{[(bu + d)^2 - 4a(cuu + eu + f)]}}{2a}$.

Pour que t soit un nombre rationel, il est nécessaire que la quantité sous le signe soit un quarré parfait : or cette quantité étant développée devient $bbuu + 2bdu + dd - 4acuu - 4aeu - 4af$. Faisons pour abréger, $bb - 4ac = g$, $2bd - 4ae = h$, $dd - 4af = m$, & nous aurons $t = \frac{-(bu + a) \pm \sqrt{(guu + hu + m)}}{2a}$. Supposons maintenant que $guu + hu + m$ est $= xx$, pour avoir $guu + hu = xx - m$, $uu + \frac{h}{g} \cdot u = \frac{xx - m}{g}$, $uu + \frac{h}{g}u + \frac{hh}{4gg} = \frac{xx - m}{g} + \frac{hh}{4gg} = \frac{4gxx + hh - 4gm}{4gg}$, & $u = \frac{-h \pm \sqrt{[4g(xx - m) + hh]}}{2g} = \frac{-h \pm \sqrt{(Axx + B)}}{2g}$, en faisant $4g = A$ & $-4gm + hh = B$. Si nous supposons maintenant $yy = Axx + B$, la question se réduira à trouver pour y & x des nombres rationels qui satisfassent à cette derniere équation ; car, en remontant, on trouvera ensuite facilement des nombres rationels pour u & t. Or il est facile de résoudre dans une infinité de cas l'équation $y = \sqrt{(Axx + B)}$ en nombres entiers.

Si B seul est un nombre quarré, on employera la méthode du Problême XXXIV. Si A seul est quarré, on fera usage de la méthode du Problême XXXV.

PROBLEME XXXVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cxx + dx^3)}$ *dans laquelle le premier terme est le quarré d'un nombre* a. Si b, c, d étoient o en même tems, la formule deviendroit $\sqrt{aa} = a$; ainsi ce cas n'a aucune difficulté.

Nous ne nous proposons pas de parcourir tous les cas dans lesquels cette formule peut devenir rationelle, il suffira pour notre objet de parler de quelques-uns. Supposons que $a^2 = 1$, $b = 2$, $c = -1$, & $a = 1$; donc $1 + 2x - xx + x^3$ doit être un quarré. Le premier terme étant un quarré, je choisis pour la racine cherchée une quantité telle que les deux premiers termes puissent s'évanouir. Soit donc cette racine cherchée $= 1 + x$, on aura $1 + 2x - x^2 + x^3 = 1 + 2x + x^2$, ou les deux premiers termes disparoissent; de maniere que l'on a $xx = - xx + x^3$, ou $2xx = x^3$, ou en divisant par xx, $2 = x$. Ainsi la formule devient $\sqrt{(1 + 4 - 4 + 8)} = \sqrt{9} = 3$.

Pour faire un quarré de la formule $4 + 6x - 5xx + 3x^3$ dont le premier terme est un quarré, je supposerai la racine cherchée $= 2 + px$ pour avoir $4 + 6x - 5xx + 3x^3 = 4 + 4px + ppxx$. Pour que les deux premiers termes disparoissent de part & d'autre, il est nécessaire que $6x = 4px$, ou que $6 = 4p$; donc $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$. Ainsi l'on aura l'équation $- 5xx + 3x^3 = \frac{2}{4} xx$, ou $3x^3 = \frac{29}{4} x^2$, & $x = \frac{29}{12}$. Ainsi $\sqrt{(4 + 6x - 5xx + 3x^2)} = 2 + \frac{3}{2}$.

Il y a une autre méthode dont on peut faire usage, lorsque le premier terme de la quantité sous le signe est un quarré: elle consiste à donner trois termes à la racine cherchée, qu'on peut faire $= a + gx + hxx$; de maniere que dans l'équation les premiers termes s'évanouissent.

Soit, *par exemple*, la formule $\sqrt{(1 - 4x + 6xx - 5x^3)}$. Je suppose cette quantité $= 1 - 2x + hxx$ pour avoir l'équation $1 - 4x + 6xx - 5x^3 = 1 - 4x + 4xx + 2hxx - 4hx^3 + hhx^4$. Les deux premiers termes se détruisent de deux côtés; & pour faire disparoître xx, il suffit de supposer $6xx = 4xx + 2hxx = (4 + 2h)\ xx$, ou $6 = 4 + 2h$, & $2h = 2$ ou $h = 1$; par ce moyen l'on trouve $- 5x^3 = - 4x^3 + x^4$, ou $- 5 = - 4 + x$, ou $+ 4 - 5 = x$, ou $x = - 1$ *.

La forme $\sqrt{(1 + x^3)}$ deviendra un quarré, en faisant $x = 0$, ou bien $x = 2$. La formule $\sqrt{(1 + 3x^3)}$ devient rationelle si $x = 0$, ou si $x = 1$, ou si $x = 2$. Maintenant 1 étant une des valeurs qui satisfont, supposons x égal à cette valeur augmentée de y, pour avoir $x = 1 + y$ & $1 + 3x^3 = 4 + 9y +$

* Ces méthodes supposent que b & c ne sont pas 0.

$9yy + 3y^3$. Que la racine de cette nouvelle formule soit supposée $2 + py$, de maniere que $4 + 9y + 9yy + 3y^3 = 4 + 4py + ppyy$; il faudra supposer $9 = 4p$, ou $p = \frac{9}{4}$, & alors l'on aura $9 + 3y = pp = \frac{81}{16}$, ou $y = -\frac{21}{16}$. Ainsi x sera $= -\frac{5}{16}$; & $\sqrt{(1 + 3x^3)} = \pm \frac{61}{64}$. En supposant $x = -\frac{5}{16} + z$, nous aurions une nouvelle valeur, &c. Cependant la méthode que l'on vient d'employer dans ce dernier cas est encore fort défectueuse.

Si l'on vouloit rendre rationelle la forme $\sqrt{(1 - x - xx + x^3)}$ il suffiroit de faire $x = pp - 1$, en donnant à p telles valeurs rationelles que l'on voudra. Si $p = 3$, notre formule donnera 21.

Pour rendre rationelle la forme $\sqrt{(cx^2 + dx^3)}$, il est nécessaire que $cxx + dx^3 = x^2(c + dx)$ soit un quarré; mais x^2 est un quarré : donc $c + dx$ doit aussi être un quarré. Si donc on fait $c + dx = pp$, on aura $x = \frac{pp - c}{d}$, valeur qui qui résoudra toujours la question.

PROBLEME XXXVIII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(a a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4)}$ *dans laquelle le premier terme est un nombre quarré*, b, c, d, e, *étant des nombres réels*, *& non* 0. Nous ferons cette forme $= a + px + qxx$, nous déterminerons ensuite p & q, de maniere qu'il ne reste que deux termes dans la quantité sous le signe; ce qui fera trouver une valeur rationelle de x. Nous aurons donc $aa + bx + cxx + dx^3 + ex^4 = aa + 2apx + (2aq + pp)xx + 2pqx^3 + qqx^4$. Les premiers termes disparoissent d'eux-mêmes; les seconds disparoîtront en faisant $b = 2ap$ & $p = \frac{b}{2a}$. Pour faire disparoître cx^2, il faudra supposer $c = 2aq + pp$, ou $q = \frac{c - pp}{2a}$. Cela posé, on aura $dx^3 + ex^4 = 2pqx^3 + qqx^4$; donc en divisant par x^3, $d + ex = 2pq + qqx$, équation qui donne $x = \frac{d - 2pq}{qq - e}$, ou (en changeant les signes du numérateur & du dénominateur) $x = \frac{2pq - d}{e - qq}$.

PROBLEME XXXIX. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}$ *dans laquelle* gg *est un nombre quarré*. Supposant cette quantité $= q + px + gx^2$, on aura $a + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = qq + 2pqx + ppxx + (2gq + pp)$

$\times xx + 2gpx^3 + ggx^4$. Les cinquiémes termes se détruisant d'eux-mêmes, & il faut faire ensorte que les quatriémes disparoissent aussi; ce qu'on obtiendra en supposant $2gp = d$, ou $p = \frac{d}{2g}$. Il faut encore faire disparoître cx^2, en faisant $2gq + pp = c$, ou $q = \frac{c - pp}{2g}$. Les deux premiers termes donneront alors l'équation $a + bx = qq + 2pqx$; d'où il est facile de tirer $x = \frac{qq - a}{b - 2pq}$.

PROBLEME XL. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt{(aa + bx + cxx + dx^3 + ggx^4)}$. Comme le premier terme est un quarré, nous pourrions employer la méthode qui convient à ce cas, & parce que le coefficient du cinquiéme terme est aussi un quarré, nous pourrions nous servir de la méthode du problême précédent; de cette maniere nous trouverions deux valeurs de x, dont chacune résoudroit le problême. L'on peut aussi supposer la quantité donnée égale à $a + px + gxx$, en déterminant p de maniere que les quatriémes termes disparoissent dans l'équation $aa + bx + cxx + dx^3 + ggx^4 = aa + 2apx + (pp + 2ag)xx + 2gpx^3 + ggx^4$, dans laquelle $(pp + 2ag)xx$ est considéré comme un seul terme. Mais il est visible qu'en faisant $p = \frac{d}{2g}$, les quatriémes termes disparoissent; & puisque les premiers & les derniers se détruisent d'eux-mêmes, on aura en divisant par x, $b + cx = 2ap + 2agx + ppx$, équation d'où l'on tire $x = \frac{b - 2ap}{2ag + pp - c}$. Comme le quarré aa se trouve seul dans la formule, je veux dire sans que a s'y trouve seul, on pourra supposer que sa racine a le signe $-$, & écrire $-a$ au lieu de a; ainsi l'on a aussi $x = \frac{b + 2ap}{pp - 2ag - c}$.

PROBLEME XLI. *Trouver une valeur de* x *qui puisse rendre* a + ex⁴ *un quarre parfait.* Je suppose qu'en faisant $x = h$, on satisfait au problême, & qu'on a l'équation $a + eh^4 = kk$. Si l'on veut trouver d'autres valeurs de x qui aient la propriété demandée, on supposera $x = h + y$, de maniere que la forme $a + eh^4 + 4eh^3y + 6ehhyy + 4ehy^3 + ey^4$ soit un quarré; donc en substituant la valeur de $a + eh^4$, la forme kk

$+ 4eh^3y + 6chhyy + 4ehy^3 + ey^4$ sera un quarré. Or cette derniere forme est la premiere des trois especes que nous avons résolues ; ainsi en procédant par la méthode qui convient à ce cas, supposant la racine cherchée $= k + py + qyy$; & faisant les opérations nécessaires, nous trouverons $p = \frac{2eh^3}{k}$, & $6ehh = 2kq + pp$, ou $q = \frac{6ehh - pp}{2k} = \frac{3ehhkk - 2ee\cdot h^6}{k^3} = \frac{ehh(3kk - 2eh^4)}{k^3}$; ou parce que $eh^4 = kk - a$, $q = \frac{ehh(kk + 2a)}{k^3}$. On trouvera aussi $y = \frac{4eh - 2pq}{qq - e}$.

Si l'on demandoit donc de rendre rationelle la forme $\sqrt{(2x^4 - 1)}$, nous aurions ici $a = -1$, $e = 2$, & il est visible qu'en supposant $h = 1$, cette forme donneroit 1; donc $k = 1$, & $kk = 1$, $p = 4$, $q = -2$, $y = 12$, & $x = h + y = 13$; ainsi l'on auroit $\sqrt{(2x^4 - 1)} = \sqrt{(57121)} = 239$. Regardant maintenant ceci comme le cas connu, & faisant $h = 13$ & $k = 239$, on trouveroit une nouvelle valeur de x qui satisferoit ; & ainsi de suite.

PROBLEME XLII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a + bx)}$. Je fais $\sqrt[3]{(a + bx)} = p$, pour avoir $a + bx = p^3$, ou $bx = p^3 - a$, & $x = \frac{p^3 - a}{b}$.

PROBLEME XLIII. *Rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a^3 + bx + cx^2 + dx^3)}$ *dans laquelle le premier terme est un cube.* Je fais cette quantité $= a + px$; donc $a^3 + bx + cx^2 + dx^3 = a^3 + 3a^2px + 3ap^2xx + p^3x^3$. Comme les premiers termes se détruisent, il faut déterminer p de maniere à faire disparoître les seconds termes, ce qui arrivera si $3aap = b$, ou si $p = \frac{b}{3aa}$. L'on aura donc $cx^2 + dx^3 = 3ap^2x^2 + p^3x^3$, & en divisant par xx, $c + dx = 3app + p^3x$; ainsi $x = \frac{c - 3app}{p^3 - d}$.

PROBLEME XLIV. *Trouver la valeur de* x *qui peut rendre rationelle la formule* $\sqrt[3]{(a + bx + cx^2 + gx^3)}$ *dans laquelle*

laquelle le coefficient du dernier terme est un cube. Faisant cette quantité $= p + gx$, pour avoir $a + bx + cxx + g^3 x^3 = p^3 + 3p^2 gx + 3pg^2 x^2 + g^3 x^3$, je vois que les derniers termes des deux membres de cette équation se détruisent d'eux-mêmes; & pour déterminer p de maniere que les pénultiémes se détruisent aussi, je fais $3pg^2 = c$, ou $p = \frac{c}{3g^2}$. Maintenant puisque les termes restans donnent $a + bx = p^3 + 3p^2 gx$, l'on aura $x = \frac{a - p^3}{3gpp - b}$.

Si le premier terme a avoit été $= 0$, on auroit pu faire $\sqrt{}(bx + cx^2 + g^3 x^3) = gx$, pour avoir $bx + cxx + g^3 x^3 = g^3 x^3$, ou $bx = - cx^2 + g^3 x^3 - g^3 x^3 = - cx^2$, & $b = - cx$ ou $x = - \frac{b}{c}$.

PROBLEME XLV. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{}(a^3 + bx + cxx + g^3 x^3)$ *dans laquelle le premier & le dernier termes sont des cubes.* Il est visible qu'on peut la traiter comme l'une & comme l'autre des deux especes qu'on a résolvées dans les deux problêmes précédens. On peut aussi faire la racine cherchée $= a + gx$, pour avoir $a^3 + bx + cx^2 + g^3 x^3 = a^3 + 3a^2 gx + 3ag^2 x^2 + g^3 x^3$, équation dans laquelle les premiers & les derniers termes des deux membres se détruisent d'eux-mêmes, puisqu'ils sont égaux & qu'ils ont les mêmes signes. Donc $bx + cxx = 3aagx + 3aggxx$, ou $b + cx = 3aag + 3ag^2 x$; d'où l'on tire $x = \frac{b - 3aag}{3agg - c}$.

PROBLEME XLVI. *Quelle valeur de x peut rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{}(3 + 3x^3)$? Il est clair que cela arrivera si on fait $x = 2$, & l'on aura alors $\sqrt[3]{}(3 + 3x^3) = 3$. Pour avoir une nouvelle valeur de x qui résolve le problême, je fais $x = h + y$ ou en faisant $h = 2$, $x = 2 + y$, pour avoir $3 + 3x^3 = 27 + 36y + 18yy + 3y^3$, & comme 27 est un cube, cette formule est de la même espece que celle que nous avons déja traitée. Faisons sa racine $= 3 + py$, dont le cube est $27 + 27py + 9ppyy + p^3 y^3 = 27 + 36y + 18yy + 3y^3$. Les premiers termes se détruisent mutuellement, & il faut faire ensorte que les seconds disparoissent de même, ce qu'on obtiendra en supposant $27p = 36$, ou $p = \frac{36}{27} = \frac{4}{3}$. L'on aura mainte-

nant $9ppyy + p^3y^3 = 18yy + 3y^3$, ou $9pp + p^3y = 18 + 3y$, ou $p^3y - 3y = 18 - 9pp$, ou $y = \frac{18 - 9pp}{p^3 - 3} = -\frac{54}{17}$; donc $x = \frac{-20}{17}$, & $\sqrt[3]{(3 + 3x^3)} = 3 + py = -\frac{27}{17}$: cette solution fournira une nouvelle valeur, & ainsi de suite.

PROBLEME XLVII. *Rendre rationelle la forme* $\sqrt[3]{(a \cdot (b + cx)^2)}$. Faisant cette quantité $= \frac{b + cx}{q}$, on aura l'équation $a \cdot (b + cx)^2 = \frac{(b + cx)^3}{q^3}$; d'où l'on tire (en divisant par $(b + cx)^2$ l'équation $a = \frac{b + cx}{q^3}$. Donc $aq^3 = b + cx$, $aq^3 - b = cx$, & $x = \frac{aq^3 - b}{c}$, valeur dans laquelle q est un nombre arbitraire.

Si l'on demandoit la valeur de x qui peut rendre rationelle la forme $\sqrt[3]{(2xx - 5)}$, on n'auroit qu'à supposer $x = 4$, & l'on auroit $2xx - 5 = 27$, dont la racine cube est 3.

PROBLEME XLVIII. a & b *étant des nombres inégaux, on demande un troisieme nombre* x *tel que son cube ajouté à la somme des cubes de* a & *de* b *donne un cube parfait*. Par la nature du problême $a^3 + b^3 + x^3$ doit être un cube ; or il est visible que cela aura lieu, si l'on suppose $x = -a$: car alors $a^3 + b^3 + x^3 = a^3 + b^3 - a^3 = b^3$, cube de b. Pour trouver une autre valeur de x qui satisfasse, je fais $x = y - a$. Substituant la valeur de x^3 que donne cette supposition, la formule $a^3 + b^3 + x^3$ devient $b^3 + 3a^2y - 3ayy + y^3$, formule dans laquelle le premier terme est un cube aussi-bien que le dernier. Pour résoudre celle-ci, je fais sa racine $= b + py$, afin d'avoir $b^3 + 3aay - 3ayy + y^3 = b^3 + 3b^2py + 3bp^2yy + p^3y^3$. Les premiers termes se détruisent d'eux-mêmes, & les seconds disparoîtront, si l'on fait $3aa = 3bbp$, ou $p = \frac{aa}{bb}$. L'on aura donc $-3ayy + y^3 = 3bppy + p^3y^3$, ou $y - 3a = 3bpp + p^3y = \frac{3a^4}{b^3} + \frac{a^6}{b^6} \cdot y$, équation qui, multipliée par b^6, donne $b^6y - 3ab^6 = 3a^4b^3 + a^6y$, & $y =$

$$\frac{3a^4b^3+3ab^6}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{b^6-a^6}=\frac{3ab^3(a^3+b^3)}{(b^3+a^3).(b^3-a^3)}$$
$=\frac{3ab^3}{b^3-a^3}$; donc $x=y-a=a\left(\frac{2b^3+a^3}{b^3-a^3}\right)$. Ainsi les deux cubes a^3 & b^3 étant donnés, nous connoissons la racine du cube cherché; or cette racine sera positive en supposant $b>a$.

PROBLEME XLIX. *Trouver deux nombres entiers & positifs* x & y, *tels que leur somme soit égale au quarré du second.* Par la nature du problême, nous aurons $x+y=y^2$, $x=y^2-y=y\cdot(y-1)$; ainsi $x=y\cdot(y-1)$. Si donc l'on prend pour y un nombre quelconque entier & positif plus grand que 1, on trouvera une valeur de x qui résoudra le problême. Soit, *par exemple*, $y=5$, nous aurons $x=5\cdot(5-1)=5\times4=20$. Or $x+y=20+5$ est $=25$ quarré de 5. Mais on ne peut pas supposer $y=1$, parce que $x=y\cdot(y-1)$, seroit alors $=1\cdot(1-1)=1\times0=0$.

PROBLEME L. *Trouver deux nombres* x & y *tels que la somme* x^2+y^2 *de leurs quarrés soit égale au cube* y^3 *du second.* Par la nature du problême $x^2+y^2=y^3$ ou $x^2=y^3+y^2=yy\cdot(y-1)$, & $x=y\cdot\sqrt{(y-1)}$. Si donc on prend pour y un nombre quarré quelconque augmenté de l'unité, le problême sera résolu, & la valeur de x sera rationelle. Soit, *par exemple*, $y=9+1=10$, nous aurons $x=10\cdot\sqrt{(9)}=10\cdot3=30$, & $x^2+y^2=900+100=1000$, cube de y ou de 10.

PROBLEME LI. *Trouver deux nombres* x & y *tels que la somme de leurs cubes soit égale à la quatrieme puissance du second.* Par la nature du problême nous avons $x^3+y^3=y^4$, ou $x^3=y^4-y^3=y^3\cdot(y-1)$, & enfin $x=y\cdot\sqrt[3]{(y-1)}$. Ainsi en prenant pour y un nombre cube quelconque augmenté de l'unité, le radical $\sqrt[3]{(y-1)}$ donnera un nombre rationel, & la valeur de x sera aussi rationelle. Soit $y=9$, $y-1$ sera $=8$, & $\sqrt[3]{(y-1)}=2$; donc $x=9\cdot2=18$. Ainsi en ajoutant le cube de 18 avec celui de 9, on aura la quatrieme puissance de 9; ce qu'il est facile de vérifier.

PROBLEME LII. *On demande deux nombres* x & y *tels que la somme de leurs puissances du degré* m, *soit égale à la puissance du degré* m + 1 *de* y. L'on aura $x^m+y^m=y^{m+1}$,

$x^m = y^{m+1} - y^m = y^m \cdot (y-1)$, & $x = y \cdot \sqrt[m]{(y-1)}$. Si donc on prend pour y une puissance parfaite du degré m & qu'on lui ajoute l'unité, le problême sera résolu. Si $m = 5$, & $y = 32 + 1 = 33$ (32 est la cinquieme puissance de 2), on aura $x = 33 \cdot \sqrt[5]{33 - 1} = 33 \cdot \sqrt[5]{32} = 33 \cdot 2 = 66$, & la somme des cinquiémes puissances de 66 & de 33 sera égale à la sixieme puissance de ce dernier nombre.

Des Equations du second degré à plusieurs inconnues.

69. Lorsqu'on a deux équations & deux inconnues, si dans l'une de ces équations une des inconnues ne passe pas le premier degré, on en prendra la valeur, qu'on substituera dans l'autre équation, & l'on aura une équation à une seule inconnue. *Exemple*, soient les équations $dx - y^2 = a$, $x^2 + y^2 = b$. De la premiere je tire $x = \frac{a + y^2}{d}$, substituant cette valeur dans la seconde, l'on a $\frac{a^2 + 2ay^2 + y^4}{d^2} + y^2 = b$, ou $y^4 + 2ay^2 + ddy^2 + aa = bd^2$, équation à une seule inconnue, mais qui est du quatriéme degré. Si les deux inconnues se trouvent élevées au quarré dans chaque équation, prenez dans chaque équation la valeur du quarré d'une des inconnues ; & égalant ces valeurs, vous aurez une nouvelle équation, de laquelle on tirera aisément la valeur d'une des inconnues. Cette valeur étant substituée dans l'une ou l'autre des équations données, il en résultera une équation qui ne contiendra qu'une inconnue.

Soyent les équations

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + l.$$

$$x^2 + fxy + gx = hy^2 + iy + k.$$

La premiere donne $x^2 = cy^2 + dy + l - axy - bx$, & la seconde donne $x^2 = hy^2 + iy +$

$k - fxy - gx$. Egalant ces deux valeurs de x^2, & faisant passer tous les termes affectés de x dans le premier membre de l'équation, on aura $fxy + gx - axy - bx = hy^2 - cy^2 - dy + iy - l + k$, & en divisant par le multiplicateur de x, il vient $x = \frac{(h-c) \times y^2 + (i-d) \times y + k - l}{fy + g - ay - b.}$ quantité que je fais $= p$, & qui ne contient point x. Substituant cette valeur dans l'une des équations données dans la premiere, *par exemple*, j'ai $p^2 + apy + bp = cy^2 + dy + l$, équation où x ne se trouve point. En mettant au lieu de p^2 & de p, leurs valeurs en y & constantes, on aura l'équation cherchée, dans laquelle y ne montera tout au plus qu'au quatriéme degré, comme on s'en convaincra aisément par l'opération.

Si les équations surpassent le second degré, voici une méthode générale qu'on pourra suivre. En supposant que tous les termes du second membre d'une équation soyent transposés dans le premier, toute équation à deux inconnues x & y pourra être mise sous cette forme $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots + p = 0$. Si x^{m-2}, *par exemple*, ne se trouvoit dans aucun terme, on supposeroit le coefficient c de ce terme $= 0$. Les coefficients a, b, c peuvent représenter des fonctions de y ou des constantes (nous entendons par fonction de y une expression dans laquelle entre y de quelle maniere que ce soit). Cela posé, soient les deux équations $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} \dots + p = 0$

$$a'x^m + b'x^{m-1} + c'x^{m-2} \dots + p' = 0$$

desquelles on veut chasser x. Supposons-les du même degré, on multipliera la premiere par a', & la seconde par a; retranchant le second produit

du premier, il eſt évident que x^m ne ſe trouvera pas dans la nouvelle équation, qui ſera par conſéquent tout au plus du degré $m - 1$. Multipliant la premiere par $a'x + b'$, & la ſeconde par $ax + b$, & retranchant encore le ſecond produit du premier, il en réſultera une nouvelle équation du même degré, par rapport à x, que celle qu'on vient de trouver. Multipliant de même la premiere par $a'x^3 + b'x + c'$, & la ſeconde par $ax^2 + bx + c$; & retranchant encore le ſecond produit du premier, il en réſultera une troiſiéme équation du même degré par rapport à x; & continuant ainſi jusqu'à ce que le multiplicateur ſoit devenu du degré $m - 1$, on aura $m - 1$ équations du même degré $m - 1$ par rapport à x, & conſidérant dans ces équations les quantités x^{m-1}, x^{m-2}, x^{m-3}, &c. comme des inconnues ſimples, on déterminera les valeurs de ces inconnues. Subſtituant donc ces valeurs dans la derniere équation, on aura une équation qui contiendra x linéaire & dont il ſera aiſé d'avoir la valeur. Cette valeur étant ſubſtituée dans la premiere ou dans la ſeconde équation, on aura une équation qui ne contiendra que la ſeule inconnue y avec des quantités connues. Si dans la premiere équation x étoit du degré m, & dans l'autre du degré n, on multiplieroit la ſeconde par x^{m-n}, & alors les deux équations ſe trouveroient du même dégré par rapport à x; ainſi l'on pourroit s'y prendre comme nous venons de le dire.

Si l'on avoit trois équations & trois inconnues x, y & z, on négligeroit d'abord une des inconnues, z, *par exemple*, qu'on regarderoit comme connue, & par le moyen de deux premieres équations propoſées on parviendroit à une équation (que j'appelle-

rai B) qui ne contiendroit que l'inconnue négligée & une des autres, x, *par exemple.* Par le moyen de la premiere & de la troisiéme ou bien encore par le moyen de la seconde & de la troisiéme, on trouveroit une autre équation (que je nommerai D) qui ne contiendroit que les mêmes deux inconnues x & z. Et par le moyen des équations B & D, on parviendroit à une équation qui ne contiendroit qu'une seule inconnue. Si l'on avoit quatre équations & quatre inconnues; par le moyen des deux premieres en négligeant d'abord deux inconnues, on parviendroit à une équation qui ne contiendroit que x & les deux inconnues négligées; par le moyen de la premiere & de la troisiéme, on parviendroit à une seconde équation qui ne contiendroit que x & les inconnues négligées; enfin par le moyen de la premiere & de la derniere, on parviendroit à une autre équation qui auroit les mêmes conditions. L'on auroit donc trois équations & trois inconnues, cas que nous venons de résoudre, & ainsi des autres.

PROBLÊME I. *Trouver deux nombres* x *&* y *dont la somme* $x+y$ *soit* $=1=a$, *& la somme des quarrés* $x^2+y^2=25=b^2$. Par la premiere condition $x+y=a$; donc en prenant le quarré de part & d'autre, $x^2+2xy+y^2=a^2$. De cette équation retranchant la seconde, il vient $2xy=a^2-b^2$. Retranchant cette derniere équation de la seconde, on trouve $x^2-2xy+y^2=2b^2-a^2$; & en prenant la racine quarrée de chaque membre, $x-y=\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}$. Cette derniere équation étant ajoutée à la premiere & ensuite soustraite, il vient dans le premier cas, $x=\frac{a\pm\sqrt{(2b^2-a^2)}}{2}=\frac{1\pm 7}{2}$ ou $x=+4$, & $x=-3$, & dans le second cas

$y = \frac{a \mp \sqrt{(2b^2 - a^2)}}{2} = \frac{1 \mp 7}{2}$ ou $y = -3$, & $y = +4$; c'est-à-dire, que si $x = 4$, y sera $= -3$, & réciproquement.

PROBLÊME II. *On demande deux nombres positifs* x & y, *dont la somme des quarrés soit* 274 & *dont le produit donne* 105. Par la nature du Problême $xx + yy = 274$, & $xy = 105$ ou $2xy = 210$. Si l'on ajoute cette derniere équation à la premiere, & qu'ensuite on l'en retranche, on aura $xx + 2xy + yy = 484$, & $xx - 2xy + yy = 64$, équation que je désignerai par (A). L'avant derniere équation que nous venons de trouver, donne en prenant les racines, $x + y = \pm 22$; mais en prenant les racines dans l'équation A, on trouve $x - y = \pm 8$. Donc en nous en tenant aux racines positives, $x + y = 22$, & $x - y = 8$; donc $x + y + x - y = 30$ ou $2x = 30$, & $x = 15$. Mais $x + y - x + y = 22 - 8$, ou $2y = 14$, & $y = 7$. Les racines négatives donnent $x = -15$ & $y = -7$; mais ces valeurs ne peuvent résoudre le Problême.

PROBLÊME III. *On demande deux nombres positifs* x & y, *dont la somme des quarrés soit donnée* & $=$ b, & *dont le produit soit* $=$ a. On aura donc les deux équations suivantes $xx + yy = b$, $xy = a$. Si l'on ajoute la premiere à la seconde multipliée par 2, on aura $xx + 2xy + yy = b + 2a$, & par conséquent $x + y = \sqrt{(b + 2a)}$. Si de la premiere équation nous retranchons le double de la seconde, il viendra $xx - 2xy + yy = b - 2a$, d'où l'on tire $x - y = \sqrt{(b - 2a)}$; donc $x + y + x - y$ ou $2x = \sqrt{(b + 2a)} + \sqrt{(b - 2a)}$ ou $x = \frac{1}{2}\sqrt{(b + 2a)} + \frac{1}{2}\sqrt{(b - 2a)}$. L'on a aussi $x + y - x + y$ ou $2y = \sqrt{(b + 2a)}$

$-\sqrt{(b-2a)}$, & $y=\frac{1}{2}\sqrt{(b+2a)}-\frac{1}{2}\sqrt{(b-2a)}$.
Si $b<2a$ le Problême est impossible, parce que b & a étant des nombres positifs par la nature du Problême, x & y doivent être dans ce cas imaginaires.

PROBLÊME IV. *On demande deux nombres tels que leur somme, leur produit, & la différence de leurs quarrés soient égaux entr'eux.* Soit x le plus grand, y le plus petit nombre. Par la nature du Problême $x+y=xx-yy=(x+y)\cdot(x-y)$; donc, en divisant par $x+y$, $1=x-y$ & $x=y+1$; donc $x+y=2y+1$, & $xx-yy=2y+1$. D'un autre côté le produit xy ou $yy+y$ devant être égal à la même quantité, on a l'équation $yy+y=2y+1$, ou $yy-y=1$, ou $yy-y+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$, $y-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{(\frac{5}{4})}$, & $y=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

PROBLÊME V. *Trouver deux nombres tels qu'il y ait égalité entre leur produit, leur somme & la somme de leurs quarrés.* Je fais l'un des nombres cherchés $=x+y$, & l'autre $=x-y$. Leur somme sera $2x$, leur produit sera $xx-yy$, & la somme de leurs quarrés sera $2xx+2yy$. Par la nature du Problême, on a $2x=xx-yy$ ou $yy=xx-2x$. Substituant cette valeur de yy dans $2xx+2yy$, & comparant le résultat $4xx-4x$ avec $2x$, on aura $2x=4xx-4x$, d'où l'on tire $x=\frac{3}{2}$; donc $yy=-\frac{3}{4}$, & $y=\pm\frac{\sqrt{(-3)}}{2}$; donc les nombres cherchés sont $x+y=\frac{3+\sqrt{(-3)}}{2}$ & $x-y=\frac{3-\sqrt{(-3)}}{2}$; & quoique ces nombres soient imaginaires, ils résolvent cependant le Problême.

REMARQUE. Dans le premier Problême,

pour avoir la valeur de x, nous avons ajouté l'équation $x - y = \pm \sqrt{(2b^2 - a^2)}$ avec l'équation $x + y = a$. Au contraire nous l'avons soustraite pour avoir la valeur de y, parce que dans le premier cas les signes de y dans les deux équations sont différents, & comme d'ailleurs leurs coefficients sont les mêmes, il est visible que l'inconnue y ne doit plus se trouver dans le résultat; de même dans le second cas, x ne doit point se trouver dans le résultat, parce que $-x$ doit détruire $+x$. Donc, pour faire disparoître une inconnue quand on a deux équations à deux inconnues qui ont les mêmes coefficients dans ces deux équations, il faut ajouter les deux équations si l'inconnue qu'on veut faire disparoître a différents signes dans les deux équations. Mais il faut soustraire une équation de l'autre, lorsque l'inconnue qu'on veut faire disparoître a le même signe dans les deux équations. Si l'on avoit les deux équations $ax + by = c$, $dx - gy = f$ dans lesquelles les inconnues x & y n'ont pas le même coefficient, on pourroit néanmoins faire disparoître telle des deux inconnues qu'on voudroit. Supposons, *par exemple*, qu'on voulût faire disparoître y, on multiplieroit tous les termes de la seconde par le coefficient b de y dans la premiere, & tous les termes de la premiere par le coefficient g de y dans la seconde, & l'on auroit les deux équations $agx + bgy = gc$, $bdx - bgy = bf$; ajoutant maintenant ces deux équations, l'on trouveroit $agx + bdx = gc + bf$, équation qui ne contient que l'inconnue x. Si l'on avoit voulu faire évanouir x, on auroit multiplié tous les termes de la seconde par a, & tous ceux de la premiere par d; retranchant ensuite le second résultat du premier, l'on

auroit eu une équation qui n'auroit contenu que la seule inconnue y. Si l'on vouloit appliquer cette méthode à trois équations & trois inconnues, en négligeant d'abord une de ces inconnues, l'on parviendroit, par le moyen de la premiere & de la seconde équation, à une équation qui ne contiendroit que l'inconnue négligée & l'une des deux autres, x, *par exemple*. Par le moyen de la premiere & de la troisiéme on parviendroit aussi à une seconde équation qui auroit les mêmes conditions; l'on auroit donc deux équations & deux inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter. Si l'on avoit quatre équations & quatre inconnues, en négligeant d'abord deux inconnues, on trouveroit, par le moyen des deux premieres, une équation qui ne contiendroit que les deux inconnues négligées & l'uné des deux autres, x, *par exemple*. Par le moyen de la premiere & de la troisiéme, l'on trouveroit une autre équation de la même espece, & par le moyen de la premiere & de la quatriéme, l'on parviendroit à une troisiéme équation qui auroit les mêmes conditions; on auroit donc trois équations & trois inconnues, ce qui est le cas précédent. Si l'on avoit cinq équations & cinq inconnues, en négligeant d'abord trois de ces inconnues, on parviendroit à quatre équations & quatre inconnues, ce qui donne le cas que nous venons de traiter, & ainsi des autres.

Des Equations à deux termes.

70. Soit l'équation $ax^m = b$, à laquelle on peut facilement rapporter toutes les équations à deux termes & à une seule inconnue. Donc en divisant, $x^m = \frac{b}{a}$ ou $x^m = c$ (en supposant $\frac{b}{a} = c$);

donc en prenant la racine m de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{c}$. Si m est pair, cette racine aura le double signe $\pm$: si, *par exemple*, m est $= 4$, x sera $= \pm \sqrt[4]{c}$, & si l'on suppose $c = 16$, on aura $x = \pm \sqrt[4]{(16)} = \pm 2$. Outre ces deux racines il y en a encore deux autres, mais imaginaires. Si c étoit $= -8$, on auroit $x = \pm \sqrt[4]{(-8)}$, dont toutes les racines sont imaginaires. Si m étoit 3, l'on auroit $x = \sqrt[3]{(-8)} = -2$; & outre cette racine il y en auroit encore deux autres, mais imaginaires. Tout cela se comprendra mieux par la suite.

En général si l'on a l'équation $x^m = b$, on aura $l \cdot x^m = l \cdot b$ * ou $m l \cdot x = l \cdot b \cdot$ ou $l \cdot x = \frac{l \cdot b}{m}$; c'est-à-dire, que le logarithme de x est égal à celui de b divisé par m. Cherchant donc $\frac{l \cdot b}{m}$ dans les tables, on connoîtra $l \cdot x$, & par conséquent on connoîtra x; si $\frac{l \cdot b}{m}$ ne se trouve pas dans les tables, on cherchera par la méthode dont nous avons parlé en traitant des logarithmes, à quel nombre il répond, & ce nombre sera $= x$.

PROBLÊME I. *Je vous donnerai, dit un pere à son fils, les écus que j'ai dans ma bourse, si vous devinez combien il y en a ; le quarré de ce nombre multiplié par le quart du même nombre, donne* 432.

* En désignant le logarithme de x^m par $l \cdot x^m$ ou par $m l \cdot x$; car le logarithme de la puissance m d'un nombre est égal au produit de l'exposant m par le logarithme de ce nombre. Voyez ce qu'on a dit ci-dessus sur les logarithmes.

Soit x ce nombre, l'on aura, par la nature du Problême, $xx \times \frac{x}{4} = 432$. Ainsi $\frac{x^3}{4} = 432$, $x^3 = 1728$, & $\sqrt[3]{x^3} = x = 12$. Donc le nombre des écus étoit 12.

PROBLÊME II. *On demande un nombre* x *tel qu'en divisant la quatriéme puissance par sa moitié & ajoutant* $14 + \frac{1}{4}$ *au quotient, le resultat donne* 100. Divisant x^4 par $\frac{x}{2}$, j'ai $2x^3$, & par la nature du Problême $2x^3 + 14 + \frac{1}{4} = 100$; donc $2x^3 = 100 - 14 - \frac{1}{4} = \frac{343}{4}$, $x^3 = \frac{343}{8}$ & $x = \sqrt[3]{(\frac{343}{8})} = \frac{7}{2}$; ainsi le nombre cherché est $x = \frac{7}{2}$.

PROBLÊME III. *Quelques Négociants ayant formé un capital, pour lequel chacun a contribué cent fois autant d'écus qu'il y a d'Associés, envoient un Facteur à la Martinique pour faire valoir ce fonds. Ce Facteur gagne pour chaque centaine d'écus deux fois autant d'écus qu'il y a d'intéressés & son gain est de 2662 écus, on demande le nombre* x *des Associés.* Puisque chaque Négociant a fourni $100x$ écus, le capital entier étoit $100xx$; & parce que le profit étoit de $2x$ pour cent, on trouvera ce que rapportoit le capital en faisant $100 : 2x :: 100xx : \frac{2x \cdot 100xx}{100} = 2x^3$. Mais ce profit est $= 2662$; donc $2x^3 = 2662$, $x^3 = 1331$ & $x = \sqrt[3]{(1331)} = 11$; ainsi le nombre des Associés étoit 11.

PROBLÊME IV. *Un Paysan échange des lapins domestiques contre des poules, à raison de deux lapins pour trois poules; ces poules pondent chacune un tiers autant d'œufs qu'il y a de poules. Le Paysan vend tous ses œufs au marché, en donnant neuf œufs pour autant de sols que chaque*

poule a pondu d'œufs, & il reçoit 3 *liv.* 12 *sols ; combien de lapins a-t-il échangé ?* Soit x le nombre des lapins cherché ; celui des poules que le Paysan a reçues en échange sera $\frac{3x}{2}$, & chaque poule pondant $\frac{x}{2}$, le nombre des œufs sera $\frac{3xx}{4}$. Mais 9 œufs se vendent pour $\frac{x}{2}$ sols ; donc l'argent que $\frac{3xx}{4}$ œufs produisent est $= \frac{x^3}{24}$; ainsi $\frac{x^3}{24} =$ 3 liv. 12 sols $=$ 72 s., $x^3 = 24 \times 72 = 8 \cdot 8 \cdot 27$, & $x = \sqrt[3]{(8 \cdot 8 \cdot 27)} = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$. C'est pourquoi le Paysan a donné 12 lapins & a reçu 18 poules.

Des équations plus élevées que le second degré & qui peuvent néanmoins se résoudre à la maniere de celles du second.

71. Ces équations ne doivent renfermer que deux puissances de x, mais dont l'exposant de l'une soit double de celui de l'autre ; ainsi elles peuvent se réduire à cette formule $ax^{2m} + bx^m = c$ ou en divisant par a, faisant $\frac{b}{a} = 2d$ & $\frac{c}{a} = g$, à celle-ci $x^{2m} + 2dx^m = g$. Ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de x^m, on aura $x^{2m} + 2dx^m + d^2 = g + d^2$, & prenant les racines quarrées de part & d'autre, $x^m + d = \pm \sqrt{(g + d^2)}$, & en transposant, $x^m = -d \pm \sqrt{(g + d^2)}$, & prenant la racine m de part & d'autre, $x = \sqrt[m]{(-d \pm \sqrt{g+ad})}$. Si m est pair, il peut y avoir jusqu'à quatre racines réelles, & le premier radical doit avoir le signe $\pm$; si m est im-

pair, le radical $\sqrt[m]{}$ ne peut avoir qu'un seul signe. Si g est négatif & plus grand que dd, toutes les racines seront imaginaires, quelque soit m, pair ou impair.

PROBLÊME. *Trouver la racine* m *de la quantité* $a^m + b$, b *étant supposé fort petit en comparaison de* a^m. Il est aisé de voir que la racine cherchée est $a + x$, x étant une quantité qu'il s'agit de trouver. Elevant $a + x$ à la puissance m, nous avons $a^m + m a^{m-1} x + m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2} x^2 + \&c. = a^m + b$. Je néglige les termes ultérieurs, parce que se trouvant multipliés par des puissances de la fraction x (qui doit évidemment être assez petite) plus élevées que le quarré, ils doivent être fort petits. Retranchant de chacun des membres de l'équation, la quantité a^m & divisant par $m \cdot \frac{(m-1)}{2} \cdot a^{m-2}$, l'on a $x^2 + \frac{2ax}{m-1} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}$, ajoutant de part & d'autre le quarré de la moitié du coefficient de x, il vient $x^2 + \frac{2ax}{m-1} + \frac{a^2}{(m-1)^2} = + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}} + \frac{aa}{(m-1)^2}$. Prenant les racines de part & d'autre, l'on a $x + \frac{a}{m-1} = \pm \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}$, & enfin $x = - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m \cdot (m-1) \cdot a^{m-2}}\right)}$; nous ne nous servons pas du signe — du radical, parce qu'il est inutile ici. Donc $\sqrt[m]{(a^m + b)} = a +$

$$x = a - \frac{a}{m-1} + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)},$$

& en réduisant, $\sqrt[m]{(a^m + b)} = \frac{(m-2)}{m-1} \times a +$
$\sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} + \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)}$. Si la quantité b avoit le signe $-$, de maniere qu'on eût $a^m - b$, on donneroit le signe $-$ au terme $\frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}$ qui se trouve sous le radical, & l'on auroit $\sqrt[m]{(a^m - b)}$
$= \frac{(m-2)}{m-1} \times a + \sqrt{\left(\frac{a^2}{(m-1)^2} - \frac{2b}{m\cdot(m-1)\cdot a^{m-2}}\right)}$.

COROLLAIRE. Si on suppose successivement $m = 3, 4, 5, 6, 7$ &c. on aura les formules suivantes :

$$\sqrt[3]{(a^3 \pm b)} = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot a^2}{4} \pm \frac{b}{3a}\right)}$$

$$\sqrt[4]{(a^4 \pm b)} = \frac{2\cdot a}{3} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot a^2}{9} \pm \frac{b}{6aa}\right)}$$

$$\sqrt[5]{(a^5 \pm b)} = \frac{3\cdot a}{4} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{16} \pm \frac{b}{10a^3}\right)}$$

$$\sqrt[6]{(a^6 \pm b)} = \frac{4\cdot a}{5} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{25} \pm \frac{b}{15a^4}\right)}$$

$$\sqrt[7]{(a^7 \pm b)} = \frac{5\cdot a}{6} + \sqrt{\left(\frac{1\cdot aa}{36} \pm \frac{b}{21a^5}\right)}$$

&c.

On peut voir maintenant pourquoi nous avons supposé que le radical avoit seulement le signe $+$, parce que nous ne cherchons que les racines positives de la quantité $a^m \pm b$; mais en prenant le radical en $-$, il est visible que la premiere formule deviendroit une quantité négative, en supposant b positif.

Pour

Pour faire l'application des formules que nous venons de trouver, supposons qu'on demande la racine cube de 28. Je prends le plus grand cube contenu dans ce nombre, & je le suppose $= a^3$ & le reste $= b$, de sorte que j'ai $27 + 1 = a^3 + b$, & la premiere formule devient $\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{9}{4} + \frac{1}{9})} =$ (en réduisant au même dénominateur) $\frac{3}{2} + \sqrt{(\frac{85}{36})}$; prenant ensuite la plus grande racine du numérateur avec une seule décimale, & la divisant par la racine 6 du dénominateur, l'on aura la racine cherchée $= \frac{3}{2} + \frac{9}{6} + \frac{2}{60} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{30} = 3 + 0{\cdot}03$ à-peu-près. En général on peut chercher par les logarithmes la racine approchée du nombre proposé & la faire $= a$, élevant ensuite a à la puissance m & retranchant a^m de la quantité proposée, le reste donnera b. Substituant ensuite la valeur de a & de b dans la formule générale, il sera aisé d'en déduire la racine cherchée à peu de chose près, en prenant, par le moyen des décimales, la racine quarrée de la quantité qui se trouvera sous le signe radical.

Des Equations de tous les degrés.

72. Dans ce que nous allons dire des équations de tous les degrés, nous supposerons que le second membre est $= 0$, c'est-à-dire, qu'on a fait passer tous les termes dans le premier membre. Cela posé, soit proposé de trouver une équation, dans laquelle x soit indifféremment $= 2$ ou $= 3$. On aura donc les deux équations $x = 2$, $x = 3$ ou, en faisant passer tout dans le premier membre, $x - 2 = 0$, $x - 3 = 0$; & en multipliant ces équations l'une par l'autre, le premier membre par

le premier & le ſecond par le ſecond, $(x - 2) \times (x - 3) = 0$, ou $x^2 - 5x + 6 = 0$. Dans cette équation x eſt $= 2$, & $x = 3$. Si l'on a $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x - c = 0$, en multipliant ces trois équations l'une par l'autre, il viendra $x^3 - (a + b + c)\, x^2 + (ab + ac + bc)\, x - abc = 0$. De la formation précédente, il ſuit premiérement qu'une équation a autant de racines que le plus haut expoſant de l'inconnue contient d'unités. Secondement, que ſi à la place de l'inconnue on ſubſtitue ſa valeur, la ſomme de tous les termes ſe réduira à o. En effet, puiſque l'équation ci-deſſus réſulte de $(x - a) \times (x - b) \times (x - c)$, ſi à la place de x je mets ſa valeur a dans le premier facteur $x - a$, pour avoir $a - a = 0$, l'on aura $0 \times (x - b) \times (x - c) = 0$, comme il eſt évident. Troiſiémement, que le coefficient du ſecond terme d'une équation eſt égal à la ſomme des racines de l'équation, priſes avec un ſigne contraire. Car les racines de l'équation précédente ſont $x = a$, $x = b$, $x = c$. En effet l'équation $x - a = 0$, donne en tranſpoſant $x = a$; de même les équations $x - b = 0$, $x - c = 0$ donnent $x = b$, & $x = c$; or le coefficient du ſecond terme de notre équation eſt $-(a + b + c) = -a - b - c$. Quatriémement, que le coefficient du troiſiéme terme d'une équation eſt égal à la ſomme des produits des racines multipliées deux à deux. Si l'équation étoit plus élevée, on trouveroit que le coefficient du quatriéme terme ſeroit égal à la ſomme des produits des racines priſes trois à trois, mais avec un ſigne contraire; que le coefficient du cinquiéme terme ſeroit égal à la ſomme des produits des racines priſes quatre à quatre; &c. Mais le dernier terme eſt le produit de toutes les racines

prifes avec un figne contraire. Cinquiémement, fi le fecond terme manque, c'eft une marque qu'il y a des racines négatives & des racines pofitives, & que la fomme de unes eft égale à la fomme des autres; fi le troifiéme terme manque, la fomme des produits des racines pofitives, combinées avec les négatives, fe réduit à o; &c. Mais fi le dernier terme manque, il y a une racine $= 0$, & l'on peut abaiffer l'équation en divifant les deux membres par $x = 0$. Ainfi l'équation $x^4 + a x^3 + b x^2 + c x = 0$ devient, en divifant par x, $x^3 + a x^2 + b x + c = 0$. Sixiémement, que les valeurs de l'inconnue fe trouvent parmi les divifeurs du dernier terme, de forte qu'en fubftituant dans l'équation, à la place de x, chaque divifeur du dernier terme, d'abord avec le figne $+$, enfuite avec le figne $-$, on fera sûr d'avoir une des racines lorfque la fubftitution d'un de ces divifeurs rendra la fomme de tous les termes $= 0$. Ainfi fubftituant b à la place de x dans l'équation $x^3 - (a+b+c) x^2 + (ab + ac + bc) x - abc = 0$, je trouve $b^3 - ab^2 - b^3 - cb^2 + ab^2 + acb + cb^2 - abc = 0$; mais fi j'avois fubftitué $-b$ au lieu de $+b$, la fomme de tous les termes ne fe feroit pas réduite à o.

En multipliant les unes par les autres, les trois équations $x - 2 = 0$, $x + 3 = 0$, $x + 5 = 0$, l'on aura l'équation $x^3 + 6x^2 - x - 30 = 0$, où l'on peut remarquer qu'il y a un changement de figne du fecond au troifiéme terme, & une racine pofitive $x = 2$, deux fucceffions des mêmes fignes, puifque le premier & le fecond terme ont le figne $+$, le troifiéme & le quatriéme le figne $-$; mais il y a deux racines négatives. En général il il y autant de racines négatives qu'il y a de fucceſ-

ſions du même ſigne, & autant de poſitives qu'il y a de changemens de ſigne d'un terme à l'autre.

En effet, ſi toutes les racines ſont poſitives, elles entreront dans les équations compoſantes avec le ſigné —. Si, *par exemple*, les racines ſont $+b$, $+c$, &c. les équations compoſantes ſeront $x-b=0$, $x-c=0$, &c. & dans le produit de toutes ces équations, il ne pourra y avoir de termes négatifs que le ſecond & ceux où les racines ſe trouveront être multipliées les unes par les autres en nombre impair, ce qui n'arrive qu'aux places paires, ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus; ainſi les termes ſeront alternativement poſitifs & négatifs.

Si toutes les racines ſont négatives, elles entreront dans les équations compoſantes avec le ſigne $+$: or il eſt clair que le produit de ces équations aura tous ſes termes poſitifs.

Enfin ſoient les racines les unes poſitives, les autres négatives, comme $+a$, $-b$, &c. & les équations compoſantes $x-a=0$, $x+b=0$, &c. & ſuppoſons d'abord qu'il n'y en ait que deux, l'équation compoſée ſera $\begin{matrix} xx - ax - ab = 0, \\ + bx \end{matrix}$ dans laquelle ſi on ſuppoſe $a>b$, le premier terme ſera poſitif, & les deux autres négatifs, & il y aura un changement de ſigne & une répétition du même ſigne; & ſi on ſuppoſe $a<b$, les deux premiers termes ſeront poſitifs & le troiſieme négatif, & il y aura de même un changement de ſigne & une répétition du même ſigne. Si $a=b$, l'équation ſe réduira à $xx \pm 0 \cdot x - ab = 0$; & quelque ſigne qu'on donne à zéro, il y aura toujours un changement de ſigne & une répétition du même ſigne, comme il y a une racine poſitive & une négative.

Supposons maintenant qu'il y ait trois racines, deux positives & une négative, & que les équations composantes soient $x - a = 0$, $x - b = 0$, $x + c = 0$, l'équation composée sera

$$\left.\begin{array}{l} x^3 - ax^2 + abx + abc \\ \quad - bx^2 - acx \\ \quad + cx^2 - bcx \end{array}\right\} = 0$$

dans laquelle, si on suppose $a + b > c$, le second terme sera négatif, & quelque signe qu'on donne au troisiéme, il y aura deux changemens de signe & une répétition du même signe; & si on suppose $a + b < c$, le second terme sera positif & le troisiéme négatif, & il y aura encore deux changemens de signe & une répétition du même signe. Enfin si $a + b = c$, le second terme sera ± 0, mais le troisiéme sera négatif, & quelque signe qu'on donne au second, il y aura toujours deux changemens de signe & une répétition du même signe, comme il y a deux racines positives & une négative.

On trouveroit par un raisonnement semblable que s'il y avoit deux racines négatives & une positive, & que les équations composantes fussent $x - a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$, le produit auroit un seul changement de signe & deux répétitions du même signe. Ce que nous venons de dire a également lieu pour les équations plus élevées; de sorte qu'en général il y a autant de racines positives qu'il y a de changemens de signes dans deux termes consécutifs, & autant de racines négatives qu'il y a de répétitions du même signe dans deux termes consécutifs. Mais nous reprendrons cette matiere dans le Calcul Différentiel.

D'où il suit qu'à la simple inspection d'une équation on peut juger combien elle a de racines néga

tives, si l'on sait d'ailleurs que toutes ses racines sont réelles.

Il est aisé de voir que si toutes les racines étoient négatives, tous les termes auroient le signe $+$; car ils résulteroient du produit de plusieurs quantités qui auroient toutes le signe $+$. Le dernier terme auroit aussi le signe $+$ si le nombre des racines positives de l'équation étoit pair; car un nombre pair de signes $-$ multipliés les uns par les autres donne $+$. Mais le dernier terme auroit le signe $-$, si le nombre des racines positives étoit impair, puisqu'un nombre impair de signe $-$ multipliés les uns par les autres donne nécessairement $-$. Mais parce que, ainsi qu'il sera aisé de le conclure de ce que nous dirons dans la suite, les facteurs imaginaires ne se trouvant dans les équations qu'en nombre pair, & que le produit de deux de ces facteurs a nécessairement le dernier terme positif, dans une équation quelconque dont le dernier terme est négatif, il y a au moins une racine positive.

Ce que nous venons de dire sur les changemens de signe & les successions des mêmes signes, ne peut avoir lieu que lorsqu'il n'y a point de racines imaginaires, lesquelles se trouvent toujours en nombre pair dans une équation délivrée de radicaux. En effet, si l'on multiplie l'une par l'autre, les deux équations

$$\left.\begin{array}{l} x-\sqrt{-a^2}=0 \\ x+\sqrt{-a^2}=0 \end{array}\right\} \text{on aura l'équation } x^2+a^2=0,$$

qui aura nécessairement ses racines imaginaires. Mais si l'on multiplioit $x-\sqrt{-a^2}=0$ par $x-\sqrt{-a^2}=0$, l'équation qui en résulteroit, contiendroit nécessairement un radical, ainsi qu'il est aisé de le voir en exécutant l'opération. Il en seroit de même en multipliant l'une par l'autre. Les deux équations $x+\sqrt{-aa}=0$, $x+\sqrt{-aa}$

$= o$ ou $x + a\sqrt{-1} = o$ & $x + a\sqrt{-1} = o$. De même si la valeur de x est une quantité réelle $-a$ jointe à une imaginaire $-b\sqrt{-1}$, pour que l'équation ne soit point affectée de quelque radical, il faut que l'équation $x + a + b \cdot \sqrt{-1} = o$, soit multipliée par $x + a - b\sqrt{-1} = o$; de maniere que la quantité réelle ait le même signe & , la quantité imaginaire différens signes dans les deux facteurs. Toutes les quantités imaginaires peuvent se réduire à la forme $M + N\sqrt{-1}$, en supposant $M = o$, lorsque la quantité imaginaire se trouve seule : ainsi que nous la démontrerons dans la seconde partie de ce Cours. Mais nous supposerons dans la suite les équations délivrées de radicaux.

Il suit de ce que nous venons de dire, qu'une équation d'un degré impair, doit avoir au moins une racine réelle, puisque les racines imaginaires ne peuvent se trouver dans une équation qu'en nombre pair. Donc une équation du troisieme degré, doit avoir au moins une racine réelle ; de plus dans une équation du troisieme degré qui n'a point de second terme, & dont le troisieme est positif (nous prenons pour troisieme terme celui qui le seroit, si le second ne manquoit pas), il y a nécessairement deux racines imaginaires. En effet soit l'équation $x^3 + (ab + ac + bc)x + abc = o$. Puisque le second terme manque, la somme des racines $+ a + b + c$ est $= o$; donc en transposant, $b = -a - c$. Substituant cette valeur de b dans le coefficient de x, l'on aura $+(-aa - ac - ac - cc + ac) = (-aa - cc - ac)$; or cette quantité ne peut être positive : car le quarré de $a - c$ doit toujours être une quantité positive, en

ſuppoſant même $c > a$. Donc $(a-c)^2 = a^2 - 2ac + c^2$ eſt une quantité poſitive, & par conſéquent $a^2 + c^2 > 2ac$, donc $-a^2 - c^2 - ac$ eſt une quantité négative. Donc puiſque dans l'équation dont nous venons de parler, cette quantité eſt ſuppoſée poſitive, il doit y avoir deux racines imaginaires *. Donc c & a ne ſont pas des quantités réelles, mais au moins l'une des deux eſt imaginaire, & parmi les trois a, b, c, il y en a deux imaginaires.

73. PROBLEME. *Délivrer une équation de ſes radicaux.* Pour faire évanouir les radicaux d'une équation, on mettra à la place de chaque radical une inconnue, & l'on aura premierement une nouvelle équation qui ne contiendra plus de radicaux, secondement de plus autant d'équations à deux termes qu'il y avoit de radicaux dans l'équation propoſée, & en élevant chacun des membres de ces équations à la puiſſance indiquée par l'expoſant du radical correſpondant, il n'y aura plus qu'à chaſſer de ces équations délivrées des radicaux les inconnues introduites. Soit, *par exemple*, l'équation $x - \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{d} = 0$. Ayant fait $\sqrt[3]{a} = y$, $\sqrt[3]{d} = p$, on aura $x - y - p = 0$ ou $x = y + p$; $a = y^3$; $d = p^3$. De la premiere équation je tire $y = x - p$, ſubſtituant cette valeur de y dans $a = y^3$ il vient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, de laquelle il ne s'agit plus que chaſſer p. Si dans cette équation, à la place de p^3, je ſubſtitue ſa valeur

* Si l'on ſuppoſe $a = 2 + 5\sqrt{-1}$, $c = 2 - 5\sqrt{-1}$, l'on aura $-aa - cc - ac = 37$. En ſuppoſant $a = 2 + 5\sqrt{-1}$ & $c = -4$, l'on aura $-aa - cc - ac = 13$.

d prise de l'équation $d = p^3$, elle devient $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - d = a$, de laquelle je tire $p^2 = \frac{d + a - x^3 + 3x^2p}{3x}$. Multipliant les deux membres de celle-ci par p, & mettant d à la place de p^3, j'ai $d = \frac{pd + pa - px^3 + 3x^2pp}{3x}$, d'où je tire en en multipliant, transposant & divisant, $p^2 = \frac{3dx - pd - pa + px^3}{3x^2}$. Egalant ces deux valeurs de p^2, je tire du résultat l'équation $p = \frac{x^4 + 2dx - ax}{a + d + 2x^3}$, substituant cette valeur de p dans l'équation $x^3 - 3x^2p + 3xp^2 - p^3 = a$, j'ai enfin l'équation

$$\left.\begin{array}{llll} x^9 - 3dx^6 & + 3a^2x^3 & - a^3 & \\ \quad - 3ax^6 & + 3d^2x^3 & - 3a^2d & \\ & - 21adx^3 & - 3ad^2 & \\ & & - d^3 & \end{array}\right\} = 0,$$

équation qui ne contient d'autre inconnue que la proposée. On se tireroit de la même maniere de quelque équation qu'on eût; mais il y a des cas où il est inutile d'avoir recours à la méthode précédente. Si, *par exemple*, l'on avoit l'équation $x + a - \sqrt{(b + \sqrt[3]{x})} = 0$, on auroit en transposant, $x + a = \sqrt{(b + \sqrt[3]{x})}$, élevant au quarré, $x^2 + 2ax + a^2 = b + \sqrt[3]{x}$; transposant b dans le premier membre, il vient $x^2 + 2ax + a^2 - b = \sqrt[3]{x}$. On voit bien qu'en élevant l'un & l'autre membre à la troisiéme puissance, il en résulteroit une équation sans radicaux.

74. PROBLEME. *Délivrer une équation de son se-*

cond terme. Soit l'équation $x^n + a x^{n-1} \dots + \&c. = 0$. Supposons $x = y + p$; substituant cette valeur à la place de x, on aura

$$\left.\begin{array}{l} y^n + p n y^{n-1} + p^2 \cdot \frac{n}{2} \cdot (n-1) \cdot y^{n-2} + \&c. \\ \quad + a y^{n-1} + p \cdot (n-1) \cdot a \cdot y^{n-2} + \&c. \\ \qquad + \&c. \end{array}\right\} = 0.$$

Si l'on suppose $p n + a = 0$, ou $p n = -a$ ou $p = -\frac{a}{n}$, c'est-à-dire, si l'on suppose x égal à une nouvelle inconnue y jointe à la quantité p, p étant égal au coefficient du second terme pris avec un signe contraire & divisé par le degré de l'équation, on aura une nouvelle équation délivrée du second terme. Si l'on supposoit $= 0$ la somme de toutes les quantité qui multiplient y^{n-2}, en cherchant la valeur de p que donneroitcette supposition, on auroit une équation sans troisieme terme. On peut voir maintenant comment il faudroit s'y prendre pour avoir une équation sans quatrieme terme, sans cinquieme terme, &c.

75. PROBLEME. *Délivrer une équation des fractions qu'elle peut contenir.* Il suffit de supposer l'inconnue $x = \frac{y}{n}$, n étant supposée divisible par tous les dénominateurs des fractions qui se trouvent dans l'équation. Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 + \frac{a}{b} x^2 + \frac{c}{d} x + \frac{g}{f} = 0$. En supposant $x = \frac{y}{n}$, on aura $\frac{y^3}{n^3} + \frac{a y^2}{b n^2} + \frac{c y}{d n} + \frac{g}{f} = 0$, & en multipliant par n^3, il viendra $y^3 + \frac{n a}{b} y^2 + \frac{n^2 c}{d} y + \frac{n^3 g}{f} = 0$. Si l'on suppose $n = bdf$, l'é-

quation précédente deviendra $y^3 + adfy^2 + b^2f^2dcy + b^3d^3f^2g = 0$, équation sans fractions. Il suffit donc dans tous les cas de supposer $n =$ au produit des dénominateurs de toutes les fractions, ou même à une quantité divisible par tous ces dénominateurs, lorsqu'ils ne sont pas premiers entr'eux.

76. PROBLEME. *Délivrer le premier terme d'une équation de son coefficient.* Soit l'équation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, en divisant par le coefficient a du premier terme, l'on aura $x^3 + \frac{bx^2}{a} + \frac{cx}{a} + \frac{d}{a} = 0$; & en faisant évanouir les fractions, en supposant $x = \frac{y}{a}$, l'on aura $y^3 + by^2 + acy + a^2d = 0$, équation dans laquelle le premier terme n'a plus de coefficient. Donc pour délivrer une équation d'un coefficient qui affecte le premier terme, il suffit de supposer l'inconnue égale à une autre inconnue divisée par ce coefficient.

77. PROBLEME. *Changer les racines positives d'une équation en négatives & réciproquement.* Pour changer les racines positives en négatives & réciproquement, il suffit de changer les signes des termes où se trouvent les puissances impaires de x : en effet il est évident que l'on changera les signes des racines de l'équation, en mettant $-x$ au lieu de $+x$; or ce changement ne peut affecter que les termes dans lesquels x a un exposant impair ; donc, &c.

78. PROBLEME. *Changer les racines d'une équation sans les connoître, soit en les augmentant ou en les diminuant d'une quantité donnée, soit en les multi-*

pliant ou en les divisant par une quantité donnée, soit en faisant qu'elles soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné.

REGLE. I°. Pour augmenter les racines d'une équation d'une quantité donnée, on substituera à l'inconnue une autre inconnue moins la quantité donnée. *Par exemple*, pour les augmenter de la quantité a, on mettra $y - a$ à la place de l'inconnue x, & les puissances de $y - a$ à la place des mêmes puissances de x; car la premiere inconnue x représente les racines de l'équation proposée, & la seconde inconnue y représente celles de l'équation transformée : or cette seconde inconnue y est égale à la premiere x plus la quantité a, puisqu'on a mis $y - a$ pour x, ce qui suppose $y = x + a$; donc les racines de la transformée sont celles de la proposée, augmentées de la quantité a.

II°. Par la même raison, s'il falloit diminuer les racines d'une équation d'une quantité donnée a, on n'auroit qu'à substituer à son inconnue x une autre inconnue y plus la quantité donnée a, parce que $y + a$ mis à la place de x suppose $y = x - a$.

III°. Pour multiplier les racines d'une équation par une quantité a, on substituera à l'inconnue une autre inconnue divisée par a, comme $\frac{y}{a}$, *par exemple*, parce que $\frac{y}{a} = x$, donne $y = ax$.

IV°. Pour diviser les racines d'une équation par une quantité a, on substituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée par a, *par exemple*, ay à la place de x, parce que $ay = x$ donne $y = \frac{x}{a}$.

V°. Pour faire que les racines d'une équation soient à ce qu'elles étoient dans un rapport donné, *par exemple*, dans le rapport de b à c, on substituera à la place de l'inconnue une autre inconnue multipliée par $\frac{c}{b}$: ainsi à la place de x on mettra $\frac{cy}{b}$, parce que la proportion $b : c :: y : x$ donne $x = \frac{cy}{b}$.

REMARQUES. On peut dans les transformations dont on vient de parler, laisser la même inconnue, parce qu'il est indifférent d'exprimer une quantité inconnue par une lettre ou par une autre, & on ne l'a changée dans la regle que pour faire mieux comprendre l'effet de la transformation ; il faut seulement faire sur l'inconnue de l'équation ce qu'on feroit relativement à une nouvelle inconnue. *Par exemple*, on mettra $x - a$ à la place de x, lorsqu'on voudra augmenter les racines de la quantité a, on y mettra $x + a$, lorsqu'on voudra les diminuer de la quantité a, &c. Cette méthode abrégera même différentes opérations, comme celles de la multiplication & de la division des racines, lesquelles se réduiront à multiplier ou à diviser le second terme de l'équation proposée par la quantité donnée, le troisieme terme par le quarré de cette quantité, le quatrieme terme par le cube de la même quantité, &c. Ce qu'on comprendra mieux par un exemple.

Soit l'équation proposée $x^3 - px^2 + qx - r = 0$, dont on veut multiplier les racines par a ; il faudroit en changeant l'inconnue mettre $\frac{y}{a}$ à la place de x, ce qui donneroit $\frac{y^3}{a^3} - \frac{py^2}{a^2}$

$+ \frac{qy}{a} - r = 0$; & comme il convient d'ôter les fractions, & sur tout celle du premier terme, il faudroit multiplier tous les termes de la transformée par a^3, ce qui donneroit $y^3 - apy^2 + a^2 qy - a^3 r = 0$; ce qu'on auroit trouvé plus simplement en laissant l'inconnue x, & multipliant le second terme par a, le troisiéme par a^2, & le quatrieme terme par a^3, puisqu'on auroit $x^3 - apx^2 + a^2 qx - a^3 r = 0$, qui est la même que la précédente, si ce n'est que l'inconnue est ici désignée par la lettre x.

De même si l'on veut diviser les racines de la même équation $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ par a, il faudra en changeant l'inconnue mettre ay pour x, ce qui donnera $a^3 y^3 - a^2 py^2 + aqy - r = 0$; mais parce qu'il faut délivrer le premier terme d'un coefficient différent de l'unité, il faudra encore diviser tous les termes de la transformée par a^3, ce qui donnera $y^3 - \frac{py^2}{a} + \frac{qy}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, ce qu'on auroit trouvé plus simplement en laissant la même inconnue, & divisant le second terme par a, le troisieme par a^2 & le quatrieme par a^3, puisqu'on auroit eu $x^3 - \frac{px^2}{a} + \frac{qx}{a^2} - \frac{r}{a^3} = 0$, la même que la précédente.

On peut aussi demander de trouver les limites des racines d'une équation, c'est-à-dire, une quantité plus grande qu'aucune de ses racines positives, & une autre quantité plus petite qu'aucune de ses racines négatives.

Pour avoir les limites d'une équation, on fera

l'inconnue $x = z + p$, cette ſuppoſition fera trouver deux quantités, dont l'une ſera plus grande qu'aucune de ſes racines réelles, & l'autre plus petite. Pour le faire voir, ſoit l'équation $x^3 - x^2 - 57x + 105 = 0$. En faiſant $x = z + p$ l'on aura

$$\left.\begin{array}{llll} x^3 = & z^3 + 3pz^2 & + 3p^2z & + p^3 \\ -x^2 = & -z^2 & - 2pz & - p^2 \\ -57x = & & - 57z & - 57p \\ +105 = & & & + 105 \end{array}\right\} = 0 \; (A).$$

Or il eſt viſible que toutes les racines de la transformée A ſeront négatives & que tous ſes termes auront le ſigne +, en faiſant $p = 10$; mais, parce que $x = z + p$, on a $x - 10 = z$ quantité négative; donc $x < 10$; c'eſt-à-dire, que la plus grande racine poſitive eſt au-deſſous de 10. Mais on peut reſerrer davantage cette limite : car en faiſant $p = 8$ on trouve encore que tous les termes reſtent poſitifs. Si nous voulons reſerrer encore cette limite; en faiſant $p = 7$, nous aurons $z^3 + 20z^2 + 76z = 0$ (car alors le dernier membre devient $343 - 49 - 399 + 105 = 0$), équation qui étant diviſible par $z = 0$, ou par $z - 0 = 0$, fait voir qu'une de ces racines eſt $= 0$. C'eſt pourquoi dans la propoſée la plus grande racine poſitive ſera $= z + p = 0 + 7 = 7$. Les deux autres racines ſont contenues dans l'équation du ſecond degré $z^2 + 20z + 76 = 0$, qui eſt facile à réſoudre.

Si l'on demandoit la limite des racines négatives de la même équation, on la trouveroit facilement, en ſuppoſant $p = -10$ dans la transformée A, parce que dans ce cas ſes termes auroient

alternativement les ſignes + & —, & par conſéquent toutes ſes racines ſeroient poſitives. Mais on peut encore reſerrer davantage cette limite ; car en ſuppoſant $p = -8$, les mêmes ſignes auroient lieu. Donc $z = x - p = x + 8$ (dans la ſuppoſition que nous venons de faire) eſt une quantité poſitive, & $x = z + p$, eſt $> + 8$, puiſque pour avoir x il faudroit ajouter une quantité poſitive à -8 ; donc x ne peut pas être au-deſſous de -8 qui eſt par conſéquent la limite des racinés négatives ; de ſorte que -8 eſt une quantité plus petite qu'aucune des racines réelles de l'équation. Il eſt viſible que nous regardons ici la quantité négative -8, non ſeulement comme plus petite que o, mais encore comme plus petite que -3, -5 &c. & en général comme plus grande que toutes les autres quantités qui priſes poſitivement ſeroient plus grandes que 8.

Soit l'équation $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui par

$$\begin{array}{l} z^2 + 2pz + p^2 = 0 \text{ (A)} \\ \quad\;\; - 4z \;\; - 4p \\ \qquad\qquad\;\; + 4 \end{array}$$

la ſuppoſition de $x = z + p$, devient la transformée A. Si dans cette derniere équation nous faiſons $p = 3$, il eſt viſible que tous ſes termes ſeront poſitifs : ainſi 3 eſt la limite des racines poſitives. Si je fais $p = 2$, la transformée A devient $z^2 \pm 0 \cdot z \pm 0 = 0$. Car o peut toujours être ſuppoſé avoir le double ſigne ±; donc $z = 0$, ce qui me fait connoître que les deux racines de la propoſée ſont chacune $= 2$. Car de $z^2 \pm 0 \cdot z = 0$, on tire (en diviſant par $z = 0$) $z \pm 0 = 0$, & $z = 0$.

Si

Si en resserrant ainsi les limites, une même valeur de p indiquoit en même tems une limite positive & une limite négative, ce seroit une marque que la proposée a toutes ses racines imaginaires; car entre la limite b & la limite b il ne peut y avoir aucune racine réelle excepté o. Mais dans ce cas la proposée seroit divisible par $x = 0$, & contiendroit x dans son dernier terme, ce que nous ne supposons pas. Soit l'équation $x^2 - 4x + 20 = 0$, si on fait $x = z + p$ & $p = 2$, la transformée A

$$\begin{array}{l} z^2 + 2pz + p^2 = 0 \ (A) \\ \quad\ - 4z - 4p \\ \quad\quad\quad\ + 20 \end{array}$$

devient $z^2 \pm 0 \cdot z + 16 = 0$, & l'on obtient un ordre de signes qui indique la limite des racines négatives, & en même tems celle des positives. Il n'y a donc aucune racine réelle entre les limites $+ 2$ & $+ 2$. En effet la proposée contient deux racines imaginaires, désignées par l'équation $x = 2 \pm \sqrt{-16}$.

Si l'on proposoit de rendre toutes les racines d'une équation positives; voici une regle qu'on pourroit suivre.

RÈGLE I°. Si toutes les racines étoient négatives, ce qu'on connoîtroit à ce que tous les termes seroient positifs, on changeroit les signes des termes pairs, suivant ce qu'on a dit ci-dessus.

II°. S'il y a quelque racine positive, ce qu'on connoîtra à ce qu'il y aura quelque terme négatif, on prendra le plus grand des coefficiens négatifs, y comprenant le dernier terme, & ayant rendu ce coefficient positif, & l'ayant augmenté de l'unité, on mettra à la place de l'inconnue ce coefficient ainsi changé moins une inconnue.

EXEMPLE. Soit l'équation proposée $x^3 + 3x^2 - 24 = 0$, dont les racines sont $- 2$, $+ 3$,

— 4. On prendra ſon plus grand coefficient négatif — 24, & le rendant poſitif & lui ajoutant l'unité, on aura 25, dont on ôtera une inconnue, & & on mettra 25 — y à la place de la premiere inconnue, ce qui donnera après les opérations ordinaires $y^3 - 78y^2 + 2015y - 17226 = 0$, dont les racines ſont 27, 22, 29,

DEMONSTRATION. Soit l'équation propoſée $x^3 - px^2 - qx - r = 0$, dans laquelle $-p$ ſoit le plus grand coefficient négatif, ſi on y met $p + 1 - y$ à la place de x, on aura

$$\begin{array}{llll} (p+1)^3 & -3(p+1)^2 y & +3(p+1)y^2 & -y^3 = 0 \\ -p(p+1)^2 & +2p(p+1)y & -py^2 & \\ -q(p+1) & +qy & & \\ -r & & & \end{array}$$

Et en changeant tous les ſignes pour avoir le premier terme poſitif,

$$\begin{array}{llll} y^3 - 3(p+1)y^2 & +3(p+1)^2 y & -(p+1)^3 & = 0 \\ +py^2 & -2p(p+1)y & +p(p+1)^2 & \\ & -qy & +q(p+1) & \\ & & +r & \end{array}$$

Or ſi on conſidere chaque terme de cette transformée, on verra qu'en conſéquence de ce que p eſt le plus grand coefficient, ſa premiere partie eſt plus grande que toutes les autres parties enſemble; ainſi dans le dernier terme, qui eſt le ſeul pour lequel on pourroit craindre le contraire, on verra que $(p+1)^3 = (p+1) \times (p+1)^2$ contient $(p+1)^2$ une fois de plus que $p \times (p+1)^2$; & que l'excès $(p+1) \times (p+1)$ ſurpaſſe la par-

tie suivante $q \times (p+1)$, au moins de l'excès $p+1$, lequel est plus grand que r par la supposition ; donc la premiere partie de ce dernier terme surpasse tout le reste & donne son signe à la somme de toutes ses parties ; & comme il en est de même des autres termes, tous les termes de la transformée auront les mêmes signes que les termes de la premiere ligne, lesquels sont alternativement positifs & négatifs, & par conséquent ses racines seront toutes positives.

Il est facile de voir qu'il en seroit de même si $-q$ ou $-r$ étoit le plus grand coefficient négatif, ou encore s'il y avoit quelque coefficient positif plus grand que les autres ; car supposant que l'équation est $x^3 - px^2 + qx + r = 0$, d'abord $+r$ ne pourra déranger la succession alternative des signes de $(p+1-y)^3$, parce que r aura le même signe que $(p+1)^3$, & $+q$ ne pourra pas non plus la déranger, parce que multipliant $p+1-y$, ou sa puissance quelconque, il n'en changera pas les signes.

Cette opération augmente toutes les racines négatives de la quantité $p+1$, mais en même tems elle change les positives en négatives, & les négatives en positives; car $p+1-y=x$ donne $y=p+1-x$, qui revient à $p+1+x$, lorsque x est négatif; ainsi l'on voit dans l'exemple qu'on a pris que la racine -2 devient $27=25+2$, que la racine $+3$ devient $22=25-3$, & que la racine -4 devient $29=25+4$.

D'où suit que le plus grand coefficient négatif rendu positif & augmenté de l'unité surpasse chacune des racines positives, puisque diminué de chacune de ces racines, il a encore une valeur positive.

P 2

79. Passons maintenant à la recherche des racines réelles & commensurables des équations. Selon ce que nous avons dit ci-dessus (72), on trouve les racines d'une équation en substituant successivement avec le signe + & — chacun des diviseurs du dernier terme à la place de l'inconnue : ceux de ces diviseurs qui rendent toute l'équation $=0$ sont racines de l'équation. Il n'est pas moins évident qu'on trouvera ces mêmes racines en divisant l'équation par l'inconnue $\pm$ un des diviseurs du dernier terme, & le diviseur qui, joint à l'inconnue, divise exactement l'équation, est une des racines de l'équation, pourvu qu'on prenne ce diviseur avec un signe contraire. Soit l'équation $x^3 - 5x + 7x - 3 = 0$, les diviseurs du dernier terme 3, qu'on trouvera par la méthode ci-dessus (29), sont 1 & 3 qu'il faut joindre à x avec le signe + & — : ainsi l'on peut tenter la division par les quatre facteurs $x+1$, $x+3$, $x-1$, $x-3$. Les deux premiers facteurs ne peuvent diviser exactement l'équation ; mais la division réussit par le facteur $x-1=0$, & le quotient $x^2 - 4x + 3 = 0$ est encore divisible par $x-1$, le dernier quotient donnant $x-3=0$; donc les racines de l'équation sont $x=1$, $x=1$, $x=3$.

On pourroit faire une objection contre la méthode précédente, qu'il est bon de résoudre : si les racines d'une équation étoient fractionnaires, comme le dernier terme peut avoir un nombre infini de diviseurs fractionnaires, comment pourroit-on s'y prendre pour trouver ceux qui doivent réussir ? Il est aisé de voir qu'une équation telle que $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2} \ldots + c = 0$, dont le premier terme est sans coefficient, & dont aucun

des autres termes n'est fractionnaire, ne sauroit avoir aucune racine fractionnaire. En effet, supposons $x = \frac{d}{p}$, fraction irréductible, c'est-à-dire, telle que d & p n'ayent aucun diviseur commun. Substituant cette valeur de x dans l'équation ci-dessus, on aura $\frac{d^m}{p^m} + a\frac{d^{m-1}}{p^{m-1}} + b\frac{d^{m-2}}{p^{m-2}} \cdots + c = 0$. En multipliant toute l'équation par p^{m-1} & transposant, on aura $\frac{d^m}{p} = -(ad^{m-1} + bpd^{m-2} + \&c \cdots + cp^{m-1})$, nombre entier comme il est évident; donc $\frac{d^m}{p}$ seroit un nombre entier; donc d^m seroit exactement divisible par p; mais d & p n'ayant aucun diviseur commun, sont premiers entr'eux. Donc en élevant d à une puissance quelconque, ce nombre sera composé d'un nombre premier avec p, pris un nombre de fois désigné par un nombre premier encore avec p; donc d^m sera premier par rapport à p; donc $\frac{d^m}{p}$ ne peut être un nombre entier; donc, &c. Soit $d = 3$, $p = 2$, $m = 3$, on aura $\frac{d}{p} = \frac{3}{2}$ & $\frac{d^m}{p} = \frac{27}{2}$. Or il est visible que 27 n'est pas exactement divisible par 2*.

80. La méthode précédente a cet inconvénient, que lorsque le dernier terme a beaucoup de diviseurs, la multiplicité des calculs qu'il faudroit faire pour trouver ceux qui doivent réussir, pourroit décourager le plus laborieux Analyste. Il est donc

* C'est aussi une conséquence de ce que nous avons dit ci-dessus (38).

à propos de chercher quelque méthode propre à diminuer le travail du Calculateur. On a remarqué qu'en faisant dans une équation dont l'inconnue est x & $x + a$ un diviseur, qu'en faisant, dis-je, x égal à un nombre donné, à 1, *par exemple*, la quantité dans laquelle l'équation se change par cette supposition de $x = 1$, est divisible par ce nombre $+ a$, c'est-à-dire, ici par $1 + a$. En effet, soit l'équation $x^2 - x - 6 = 0$, dont un des diviseurs est $x + 2$. Si l'on fait $x = 5$, la quantité $25 - 5 - 6 = 14$, dans laquelle se change cette équation par la supposition de $x = 5$, est divisible par $5 + 2 = 7$. De cette observation il suit qu'en supposant $x = 0$, le dernier terme de l'équation sera divisible par a. Si l'on fait successivement $x = 1, 2, 3$, &c. $-1, -2, -3$, &c. Le nombre dans lequel se changera l'équation dans ces différentes suppositions, sera divisible par $1 + a$, $2 + a$, $3 + a$, &c. $-1 + a$, $-2 + a$, $-3 + a$, &c. Mais les nombres $3 + a$, $2 + a$, $1 + a$, a, $-1 + a$, $-2 + a$, $-3 + a$ sont en progression arithmétique, & celui qui résulte de la supposition de $x = 1$ surpasse d'une unité celui qui vient de la supposition de $x = 0$, tandis que celui-ci surpasse d'une unité celui que donne la supposition de $x = -1$. Donc on peut rejetter les diviseurs qui n'ont pas cette condition, ce qui épargne beaucoup de tentatives inutiles.

EXEMPLE. Soit l'équation $x^3 - 2x^2 - 13x + 6 = 0$.

A	B	C	D	E
$x = 2$	20	1, 2, 5, 4, 10, 20	5	-1
$x = 1$	8	1, 2, 4, 8	4	-2
$x = 0$	6	1, 2, 3, 6	3	-3
$x = -1$	16	1, 2, 4, 8, 16	2	-4
$x = -2$	16			

Ayant écrit dans la colonne A les valeurs que je veux donner à x, j'écris dans la colonne B les nombres dans lesquels se change successivement l'équation par les suppositions correspondantes de x (ici on néglige les signes de ces nombres *); J'écris aussi en C les diviseurs de la colonne B. Parmi les diviseurs de 6 qui vient par la supposition de $x = 0$, je cherche s'il y en a quelqu'un qui soit surpassé de l'unité par ceux qui viennent de la supposition de $x = 1$, & qui surpasse en même tems de l'unité quelqu'un de ceux que donne la supposition de $x = -1$. En prenant ces diviseurs soit en + soit en —, je trouve que + 3 & — 3 ont cette condition; car on trouve 4 dans les diviseurs de 8, & 2 parmi les diviseurs de 16. De même en prenant ces diviseurs avec le signe —, je trouve — 2 dans les diviseurs de 8, & — 4 parmi ceux de 16; donc + 3 & — 3 ont les conditions requises. Si vous voulez vous assurer si l'un des deux ne doit pas être rejetté, il n'y a qu'à remarquer qu'en supposant $x = 2$, il faut trouver parmi les diviseurs de 20 que donne cette supposition, le nombre 5, qui surpasse de 1 le nombre 4 que donne la supposition de $x = 1$, & le nombre — 1 qui surpasse aussi de 1 le diviseur — 2 venu de la même supposition de $x = 1$. Or 1 & 5 sont des diviseurs de 20, donc jusqu'ici on n'a pas de raison de rejetter + 3 ni — 3; de sorte que nous avons les progressions arithmétiques D & E, dont les termes correspondans à $x = 0$ sont des diviseurs à essayer. Mais en supposant $x =$

* Parce que si $+ a$ peut diviser exactement $+ ad$, $+ a$ divisera $- ad$, de même $- a$ divisera $+ ad$ & $- ad$.

-2, il faudra trouver parmi les diviſeurs de 16 que donne cette ſuppoſition, à l'égard de $+3$, le diviſeur 1 plus petit d'une unité que 2, provenant de la ſuppoſition de $x = -1$, & -5 pour le ſecond diviſeur -3; mais 5 n'eſt pas un diviſeur de 16; donc -3 doit être rejetté. On ne peut donc tenter la diviſion que par le facteur $x+3$, elle réuſſit & donne pour quotient $x^2 - 5x + 2 = 0$; donc $x+3=0$, ou $x = -3$; donc -3 eſt une des racines de l'équation. Si l'on trouvoit un trop grand nombre de diviſeurs, l'on pourroit eſſayer de le diminuer par des nouvelles ſuppoſitions de $x=3$, $x=4$, $x=-3$, $x-4$, &c. ſur quoi l'on peut remarquer que cette méthode fait véritablement connoître les diviſeurs qui peuvent réuſſir, mais qu'il ne s'enſuit pas que les diviſeurs que la méthode fait trouver doivent réuſſir, parce qu'il peut ſe faire que l'équation n'ait que des racines imaginaires, ou incommenſurables.

Soit maintenant l'équation $x^4 + 2x^3 - 13 \cdot x^2 - 14x + 24 = 0$, on trouvera par la méthode précédente que les diviſeurs de cette équation ſont $x-1$, $x-3$, $x+2$, $x+4$; ainſi les quatre racines de l'équation ſont $x=1$, $x=3$, $x=-2$, $x=-4$. Toutes les fois que l'équation ſe réduit à 0 par la ſuppoſition d'une valeur de x, comme cela arrive ici par la ſuppoſition de $x=1$, de $x=3$, de $x=-2$, de $x=-4$, on eſt ſûr que ces valeurs de x ſont des racines de l'équation (72); on peut donc ſubſtituer ſucceſſivement à la place de x tous les diviſeurs du dernier terme pris en $+$ & en $-$, ceux de ces diviſeurs qui rendront l'équation $=0$, ſeront des racines de l'équation.

PROBLEME. *Le nombre de louis d'or de Titius surpasse de 18 le nombre des louis d'or d'Alexandre, mais en multipliant la somme de ces nombres par la différence de leurs cubes, le produit est 275184 : on demande le nombre des louis de Titius & d'Alexandre.* Soit x le nombre des louis d'Alexandre, celui de Titius sera $x + 18$. La différence des cubes de ces nombres est $54xx + 972x + 5832 = 54(xx + 18x + 108)$. Si l'on multiplie cette quantité par la somme $2x + 18 = 2(x + 9)$, le produit $108(x^3 + 27xx + 270x + 972)$ doit être $= 275184$. Donc, en divisant par 108, on aura $x^3 + 27xx + 270x + 972 = 2548$, ou $x^3 + 27xx + 270x - 1576 = 0$. Les diviseurs de 1576 sont 1, 2, 4, 8, &c. Si on essaye le diviseur $x - 4$, on trouvera pour quotient $xx + 31x + 394 = 0$, dont les racines sont imaginaires ; ainsi Alexandre avoit 4 louis, & Titius 22.

PROBLEME. *Quelques Négocians établissent un fonds, pour lequel chacun fournit dix fois autant de louis d'or qu'ils sont d'Associés, ils gagnent sur chaque centaine de louis d'or autant de louis & 6 de plus qu'ils sont d'Associés, le profit total est de 392 louis ; on demande le nombre des Associés.* Soit x le nombre cherché ; chaque Associé aura donc fourni $10x$ louis & tous ensemble $10xx$ louis. Par la nature du problême, ils gagnent $x+6$ louis sur chaque centaine de louis ; ainsi en faisant $100 : x+6 :: 10xx : \frac{10x^3 + 60xx}{100} = \frac{x^3 + 6xx}{10}$, on aura le gain total. Mais ce gain est $= 392$ louis ; donc $\frac{x^3 + 6xx}{10} = 392$, $x^3 + 6xx = 3920$. En faisant $x = 2z$, divisant par 8 & transposant, il vient $z^3 + 3zz - 490 = 0$. Les diviseurs de 490 sont 1, 2, 5, 7, 10, &c. Si l'on divise la derniere équation par $z - 7$, la division réussit & donne $zz + 10z + 70 = 0$, équation dont les racines sont imaginaires. Donc $z = 7$, & $x = 2z = 14$. Ainsi il y avoit quatorze Associés.

Si le premier terme de l'équation a un coefficient, & qu'on ne veuille pas l'en délivrer, on prendra les diviseurs du dernier terme, & encore tous ceux du premier coefficient, & on formera des fractions de chacun des diviseurs du dernier terme divisé par chacun des diviseurs du premier coefficient, auxquelles on donnera successivement les signes + & —, & celles de ces fractions, qui, substituées à l'inconnue, donneront un

résultat égal à zero, seront autant de racines de l'équation.

EXEMPLE. Soit l'équation $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$. Les diviseurs du dernier terme sont 1, 2, 3, 6, ceux du premier coefficient sont 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24. divisant chacun des diviseurs de 6 par ceux de 24, on a les fractions suivantes.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \quad \frac{2}{1}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{6}{1};$$

& les substituant successivement à l'inconnue avec le signe + & —, on trouvera que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ réduisent tout à zero; ainsi ces fractions seront les trois racines de l'équation proposée.

Il est clair que le premier terme d'une équation ne peut avoir de coefficient différent de l'unité, si aucune des valeurs de l'inconnue n'est une fraction, parce que cette inconnue n'auroit que l'unité pour coefficient dans les équations composantes; mais si quelqu'une de ces valeurs est une fraction, l'équation composante qui contient cette valeur, étant délivrée de son dénominateur, l'inconnue de cette équation sera multipliée par un coefficient différent de l'unité, & ce coefficient en donnera un au premier terme de l'équation composée; ainsi les équations composantes étant $x - a = 0$, $x - \frac{m}{n} = 0$, cette derniere étant délivrée de son dénominateur, devient $nx - m = 0$; & le produit des deux équations est $nxx - anx - mx + am = 0$. On est donc assuré que lorsque le premier terme d'une équation a un coefficient autre que l'unité quelqu'une des valeurs de l'inconnue est une fraction dont le numérateur est un diviseur du dernier terme, & le dénominateur est un diviseur du premier coefficient; ainsi ayant formé toutes les fractions qu'on peut faire de cette maniere avec les diviseurs du dernier terme & du premier coefficient, on n'a plus qu'à chercher celles qui, mises à la place de l'inconnue, réduisent tout à zero.

AUTRE MANIERE. On supposera l'inconnue successivement égale à 1, 0, — 1, ou si l'on veut, à 2, 1, 0, — 1, — 2; & l'on prendra les résultats & leurs diviseurs, qu'on écrira comme on a dit ci-dessus. Ensuite prenant un terme dans chaque suite, & leur donnant l'un ou l'autre signe, on y cherchera des progressions arithmétiques dont la différence soit un diviseur du premier coefficient, & on essayera si, en multipliant l'inconnue par cette différence, & ajoutant au produit le terme de la progression qui vient de la supposition

de $x = 0$, avec l'un ou l'autre ſigne, la ſomme diviſe exactement l'équation propoſée ; parce qu'alors le dernier terme de cette ſomme pris avec un ſigne contraire, & diviſé par le coefficient de l'inconnue, ſera une racine commenſurable de l'équation propoſée.

Par exemple. L'équation étant la même que deſſus, ſi on fait ſucceſſivement l'inconnue égale à 1, 0, —1, les réſultats ſeront +1, —6, —105 ; dont les diviſeurs ſont ceux qu'on voit dans la table ci-deſſous. Et ſi on prend un de ces diviſeurs dans chaque ſuite, leur donnant ſucceſſivement l'un & l'autre ſigne, on trouvera bien-tôt les progreſſions —1, +1, +3 ; —1, +2, +5 ; —1, +3, +7, dont les différences ſont 2, 3, 4, diviſeurs du premier coefficient. On multipliera donc l'inconnue par chacune de ces différences, on ajoutera au produit le terme de la même progreſſion, qui répond à la ſuppoſition de $x = 0$, mais avec un ſigne contraire, ce qui donnera les trois binomes $2x - 1$, $3x - 2$, $4x - 3$, & on eſſayera ſi ces quantités diviſent également l'équation propoſée ; & comme on trouvera qu'elles la diviſent, on conclura que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ ſont les racines de cette équation.

EXEMPLE.

Equation propoſée $24x^3 - 46x^2 + 29x - 6 = 0$.

Suppoſitions.	*Réſultats.*	*Diviſeurs des Réſultats.*
$x = 1$	$+1$	± 1
$x = 0$	-6	$\pm 1 \cdot \pm 2 \cdot \pm 3 \cdot \pm 6$.
$x = -1$	-105	$\pm 1 \cdot \pm 3 \cdot \pm 5 \cdot \pm 7 \cdot \pm 15 \cdot \pm 21 \cdot \pm 35 \cdot \pm 105$.

Diviſeurs du premier Coefficient.

1 · 2 · 3 · 4 · 6 · 8 · 12 · 24.

La raiſon de cette opération eſt facile à concevoir. Soit $\frac{a}{n}$ une racine commenſurable d'une équation dont n diviſe le premier coefficient, on aura $x = \frac{a}{n}$, & $nx - a = 0$ ſera une équation compoſante de la propoſée. Si donc on fait $x = 1$, tant dans la propoſée que dans $nx - a$, le réſultat ſera diviſible par $n - a$, ou par $a - n$; ſi on fait $x = 0$, le réſultat qui eſt le dernier terme de la propoſée, ſera diviſible par a, ſuivant ce qu'on a dit plus haut, & ſi on fait $x = -1$, le ré-

ſultat ſera diviſible par $-n-a$, ou par $a+n$: or les trois diviſeurs $a-n$, a, $a+n$ font une progreſſion arithmétique dont la différence eſt n diviſeur du premier coefficient. Donc ſi l'équation propoſée a une racine commenſurable, on eſt aſſuré que cette racine a pour numérateur un diviſeur du réſultat qui vient de la ſuppoſition de $x=0$, & qui fait avec un diviſeur de chacun des autres réſultats une progreſſion arithmétique, dont la différence eſt un diviſeur du premier coefficient, & que cette différence en eſt le dénominateur ; ainſi on ne doit eſſayer que les diviſeurs du dernier terme qui ont ces conditions. Il en ſeroit de même ſi on avoit encore fait $x=2$, $x=-2$, parce que l'équation compoſante ſe réduiroit par ces ſuppoſitions à $2n-a$, $-2n-a$ qui donneroient les diviſeurs $a-2n$, $a+2n$, leſquels feroient avec les autres une progreſſion de cinq termes, dont la différence ſeroit toujours n. En ſuivant la même méthode, on trouveroit un moindre nombre de ces progreſſions, & le choix des diviſieurs ſeroit plus facile.

AUTRE MANIERE. Soit l'équation $mx^3+ax^2+bx+c=0$, qu'on ſuppoſe contenir une racine rationelle repréſentée par le diviſeur $fx+g=0$ ou par l'équation $x+\frac{g}{f}=0$, qui diviſera la propoſée en délivrant ſon premier terme du coefficient m; l'on aura $x^3+\frac{a}{m}x^2+\frac{b}{m}x+\frac{c}{m}=0$. Il eſt viſible que $x+\frac{g}{f}$ ne ſauroit être un diviſeur de cette équation, à moins que g ne ſoit un diviſeur de c & f un diviſeur de m.

Si le premier terme de la propoſée étoit ſans coefficient, on auroit $m=1$ & $f=1$, c'eſt-à-dire, que le diviſeur $x+\frac{g}{f}$ ſeroit $x+g$. Cela poſé, ſoit l'équation $3x^3-29x^2+4x+60=0$. En cherchant les limites des racines de l'équation $x^3-\frac{29}{3}x^2+\frac{60}{3}=0$, je trouve -1 & 10; je cherche enſuite les diviſeurs du dernier terme 60 de la propoſée contenus entre ces limites, & je trouve 1, 2, 3, 4, 5, 6, pour les diviſeurs poſitifs, & -1 pour les négatifs; car -2, -3 &c. ſont exclus par les limites trouvées. Je cherche de même les diviſeurs 1 & 3 de 3, & diviſant ceux de 60 par ceux de 3, j'ai -1, $-\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 5, $\frac{5}{3}$, 6. Si donc la propoſée a quelque racine réelle, elle doit ſe trouver parmi ces

nombres. En tentant la division par $x - \frac{5}{3} = 0$, ou par $3x - 5 = 0$, je trouve pour quotient $x^2 - 8x - 12 = 0$; ainsi l'une des racines de l'équation est représentée par $x = \frac{5}{3}$, & les deux autres se trouvent, en résolvant l'équation du second degré $x^2 - 8x - 12 = 0$. Si on veut encore diminuer le nombre des diviseurs, on supposera $x = y - p$, il est visible que chaque racine de la transformée sera plus grande que x de la quantité p, puisque $x + p = y$. Ainsi si a & b sont des limites de la proposée, $a + p$ & $b + p$ seront des limites de la transformée. Si dans l'équation ci-dessus nous supposons $x = y - 1$, 1 représentant l'indéterminée p, ce qui donnera $a + p = -1 + 1 = 0$, & $b + p = 10 + 1 = 11$, nous trouverons

$$\begin{array}{rlrrr} 3x^3 = & 3y^3 & -9y^2 & +9y & -3 \\ -29x^2 = & & -29y^2 & +58y & -29 \\ +4x = & & & 4y & -4 \\ +60 = & & & & +60 \end{array}$$

La transformée sera donc $3y^3 - 38y^2 + 71y + 24 = 0$ A. De laquelle si nous voulons chercher les racines par la méthode présente, en nous contentant de prendre les diviseurs de 24 qui sont contenus entre 0 & 11, savoir, 1, 2, 3, 4, 6, 8, & les divisant par 1 & 3 (facteurs de 3), nous aurons les nombres 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 3, $\frac{4}{3}$, 4, 6, 8, $\frac{8}{3}$, parmi lesquels doivent se trouver les racines réelles de l'équation A. Mais si dans la proposée on suppose $x = y + 1$, la transformée deviendra $3y^3 - 20y^2 - 45y + 38 = 0$, dans laquelle les limites [illegible] 9 & -2. Prenant donc les diviseurs de 38 qui tombent entre ces limites, savoir, -1, 1, 2, & les divisant par 1 & par 3, les racines rationelles de la derniere réduite se trouveront parmi les nombres $-\frac{1}{3}$, -1, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, 2. Maintenant j'écris par ordre les nombres que je viens de trouver, & mettant dans la premiere série horisontale ceux parmi lesquels doit se trouver une racine réelle de l'équation dans laquelle $x = y + 1$, dans la seconde ceux qui ont rapport à l'équation proposée, & dans la troisieme ceux qu'a donnés la supposition de $x = y - 1$; il est visible qu'aucun des nombres de la seconde suite ne peut être une racine de la proposée, à moins que parmi ceux de la premiere série, il ne s'en trouve quelqu'un qui résulte de celui-ci, en lui ajoutant -1, & que parmi ceux de la troisieme il ne s'en

$-\frac{1}{3}$, -1, $\frac{1}{3}$, 1, $\frac{2}{3}$, 2

-1, $-\frac{1}{3}$, 1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 5, $\frac{1}{3}$, 6

1, $\frac{1}{3}$, 2, $\frac{2}{3}$, 3, 4, $\frac{4}{3}$, 6, 8, $\frac{8}{3}$

trouve aussi quelqu'un qui en résulte de la même maniere en lui ajoutant $+ 1$, parce que si cette racine est x dans la seconde, elle doit être $x - 1$ dans la premiere, & $x + 1$ dans la troisieme série. Or en examinant avec un peu d'attention ces trois séries, il est visible que les seuls nombres qui ont la condition requise sont compris dans les trois séries, dont la premiere a été prise parmi les nombres de la premiere série ci-dessus, la seconde parmi ceux de la seconde, & la troisieme parmi ceux de la troisieme.

$$\begin{matrix} 1, & 2, & \frac{2}{3} \\ 2, & 3, & \frac{5}{3} \\ 3, & 4, & \frac{8}{3} \end{matrix}$$

Si donc la proposée $3x^3 - 29x^2 + 4x + 60 = 0$ a quelque racine rationelle, elle ne peut être que 2, ou 3, $\frac{5}{3}$; & alors cette équation sera divisible ou par $x - 2 = 0$, ou par $x - 3 = 0$, ou enfin par $3x - 5 = 0$. Ainsi les diviseurs qu'on peut essayer ont été réduits par cette méthode à trois seulement, au lieu de douze qu'on avoit d'abord trouvés.

81. Venons maintenant aux diviseurs du second degré. Supposons que $x^2 + bx + a$ est un diviseur du second degré dans une équation; en faisant

$x = 2$	.	$4 + 2b + a$,
1	.	$1 + b + a$
0	.	$+ a$
[illegible]	.	$1 - b + a$
[illegible]	.	$4 - 2b + a$
&c.		&c.

ce diviseur deviendra successivement égal aux quantités que l'on voit vis-à-vis des suppositions des valeurs de x, & la quantité dans laquelle se changera l'équation par ces suppositions, sera divisible par les diviseurs correspondants. Donc si de ces diviseurs on ôte les quarrés des valeurs correspondants de x, il en résultera des quantités qui sont évidemment en progression arithmétique; donc il faudra rejetter les diviseurs qui n'auront pas cette condition.

$$\begin{matrix} 2b + a \\ b + a \\ + a \\ - b + a \\ - 2b + a \end{matrix}$$

Si l'on trouvoit un trop grand nombre de progressions, on tâcheroit de le diminuer, en faisant de nouvelles suppositions de

$x = -3$, $x = -4$ &c., $x = +3$ &c.; & celles qui ne ſeroient pas détruites par ces nouvelles ſuppoſitions, donneroient des diviſeurs qu'on pourroit eſſayer. Quand on aura trouvé une de ces progreſſions, on ôtera du terme qui répond à la ſuppoſition de $x = 1$, celui qui répond à la ſuppoſition de $x = 0$, & l'on aura b, & par conſéquent le diviſeur $x^2 + bx + a$ par lequel on tentera la diviſion. Si l'on a trouvé pluſieurs progreſſions différentes, on aura pluſieurs diviſeurs de la même forme, quoique b ne ſoit pas la même quantité dans ces diviſeurs. Soit, *par exemple*, l'équation $x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 10x + 5 = 0$. J'écris dans la colonne A les ſuppoſitions différentes de x, j'écris en B les nombres dans leſquels

A	B	C
$x = 2$	133	1, 7, 19, 133
1	33	1, 3, 11, 33
0	5	1, 5
-1	1	1
-2	3	1, 3

D	E
4	-137, -23, -11, -5, -3, $+3$, $+15$, $+129$
1	-34, -12, -4, -2, 0, $+2$, $+10$, $+32$
0	-5, -1, $+1$, $+5$
1	-2, 0
4	-7, -5, -3, -1

ſe change l'équation par ces ſuppoſitions de x, je mets en C les diviſeurs de ces nombres, en D les quarrés des valeurs correſpondantes de x, en E les diviſeurs qui ſont en C, mais pris avec les ſignes + & —, & deſquels on a ôté les nombres correſpondants de la colonne D. Après quoi je cherche

les progressions arithmétiques que peuvent donner les nombres des colonnes E; j'en trouve deux que j'écris, l'une en F & l'autre en G. Je ne fais pas de nouvelles suppositions pour tâcher d'exclure l'une des deux, parce que l'équation proposée étant du quatriéme degré, elle doit avoir deux diviseurs rationels du second degré, ou n'en avoir aucun. Les nombres qui répondent à la supposition de $x = 0$, sont 5 & 1. Si l'on ôte ces nombres de ceux qui dans leur colonne répondent à la supposition de $x = 1$, l'on aura $b = 5$ & $b = 1$; donc les diviseurs par lesquels on peut tenter la division, sont $x^2 + 5x + 5$, $x^2 + x + 1$. Si l'on tente la division par le premier, on trouvera le second au quotient. Résolvant maintenant les équations $x^2 + 5x + 5 = 0$, $x^2 + x + 1 = 0$ par la méthode du second degré, on aura les quatre racines de l'équation proposée.

F	G
15	3
10	2
5	1
0	0
−5	−1

Soit maintenant l'équation $x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 8x^2 - 36x + 21 = 0$. En supposant successivement $x = 1$, 0, −1, −2, −3, on trouvera qu'il n'y a qu'un seul diviseur $x^2 + 3x - 3$, par lequel on puisse tenter la division : elle réussit & donne pour quotient $x^3 + 5x - 7$. Il suffit donc de trouver les racines des deux équations $x^2 + 3x - 3 = 0$, $x^3 + 5x - 7 = 0$, pour avoir celles de l'équation proposée.

82. Si l'équation étoit affectée de fractions, comme l'équation $x^2 + \frac{x}{6} - \frac{1}{3} = 0$, on l'en délivreroit en faisant l'inconnue x égale à une autre inconnue

inconnue y, divisée par un nombre divisible par tous les dénominateurs de l'équation, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus. Supposant donc $x = \frac{y}{6}$, j'aurai en substituant, multipliant & réduisant, $y^2 + y - 12 = 0$. Les diviseurs de cette équation sont, par la méthode ci-dessus (79), $y - 3$, $y + 4$, & partant les racines sont 3 & -4. Mais $x = \frac{y}{6}$; donc les racines de la premiere équation se trouveront en divisant celles de la seconde par le diviseur 6 de y, ce qui donnera $x = \frac{3}{6}$ & $x = -\frac{4}{6}$, ou $x = \frac{1}{2}$ & $x = -\frac{2}{3}$. Si l'équation proposée avoit un coefficient au premier terme, on supposeroit x égal à une nouvelle inconnue divisée par ce coefficient, & l'équation qui en résulteroit n'ayant pas de coefficient au premier terme, on en chercheroit les racines, & divisant ces racines par le coefficient du premier terme de l'équation proposée, on auroit les racines cherchées. Ainsi si j'avois l'équation $6x^2 + x - 2 = 0$. Faisant $x = \frac{y}{6}$, on trouveroit l'équation $y^2 + y - 12 = 0$, & divisant les racines de cette derniere par 6, l'on auroit toutes les racines cherchées. Mais si l'équation que l'on trouve en faisant disparoître le coefficient du premier terme, ou les dénominateurs des équations qui contiennent des coefficients fractionnaires, n'avoit point de racines commensurables, on seroit sûr que l'équation proposée n'en a pas non plus, puisqu'une racine commensurable étant divisée ou multipliée par une quantité commensurable, ne sauroit devenir incommensurable. Si les coeffi-

cients de l'équation proposée étoient algébriques, tels que ceux de l'équation $x^2 + ax - b = 0$ *, il faudroit, puisque a & b sont censés connus, exprimer ces coefficients en nombres; ainsi supposant $a = 1$ & $b = 12$, on auroit l'équation $x^2 + x - 12 = 0$, dont les racines sont $x = 3$, $x = -4$.

De la résolution des Equations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque.

83. Soit l'équation $x^4 + ax^3 + (aa - ab)x^2 - aabx - a^3 b = 0$, qu'on veut diviser en deux facteurs du second degré. Je prends deux équations quarrées $xx + yx + u = 0$, $xx + fx + z = 0$, de la multiplication desquelles je suppose que résulte la proposée; y, u, f, z étant des quantités indéterminées qu'on déterminera dans la suite du calcul. Les ayant multipliées l'une par l'autre, il vient

$$\begin{aligned} x^4 + yx^3 + ux^2 + ufx + zu &= 0 \\ + fx^3 + fyx^2 + zyx & \qquad (A). \\ + zx^2 & \end{aligned}$$

On comparera l'équation A avec la proposée en égalant tous les termes de celle-ci avec leurs correspondans dans la proposée; la comparaison des deux seconds termes donne $f + y = a$, ou $f = a - y$; la comparaison des derniers termes fait voir que $z = -\frac{a^3 b}{u}$; celle des quatriemes termes fournit l'équation $yz + fu = -a^2 b$. Substituez dans celle-ci les valeurs trouvées de f & de z, & vous aurez $y = \frac{au^2 + a^3 bu}{uu + a^3 b}$; mais l'équation $z = -\frac{a^3 b}{u}$ fait connoître que u est un diviseur du dernier terme $-a^3 b$. Comme les équations supposées sont du second degré, je cherche tous

* A cause de $b = x^0 b$, b est le coefficient de x^0.

les diviseurs du second ordre de $a^3 b$; savoir $\pm ab$, $\pm aa$, $\pm a \sqrt{ab}$, & commençant par le premier, je suppose $u = ab$, ce qui donne $y = \frac{2ab}{a+b}$. Ainsi l'une des équations supposées deviendra $xx + \frac{2abx}{a+b} + ab = 0$; mais parce qu'elle ne peut pas diviser exactement la proposée, je conclus que le diviseur ab est inutile. C'est pourquoi prenant le diviseur $-ab$, & supposant $u = -ab$, ce qui donne $y = 0$, la premiere équation supposée devient $xx - ab = 0$, qui divise exactement la proposée, & donne pour quotient $x^2 + ax + aa = 0$. Si aucun des diviseurs ne pouvoit réussir, la proposée seroit irréductible du moins par cette méthode.

Si on veut éviter les divisions, on substituera une des valeurs de u (prise parmi les diviseurs du dernier terme) dans y, f, z, & ces valeurs étant mises dans les trinomes quadratiques, si leur produit rend la proposée, le problême sera résolu; si cela n'arrive pas, il faut employer une autre valeur de u. Soit, *par exemple*, l'équation $x^4 + 2bx^3 + bbx^2 - a^3 b = 0$. Comparant cette équation avec la transformée A, on trouve $f + y = 2b$, $u + fy + z = bb$, $zy + fu = 0$ (parce que le quatrieme terme manque dans la proposée), $zu = -a^3 b$. La premiere donne $f = 2b - y$, la derniere fait voir que $z = -\frac{a^3 b}{u}$. Ces valeurs substituées dans la troisieme donnent $-\frac{a^3 by}{u} + 2bu - uy = 0$, ou $y = \frac{2bu^2}{a^3 b + uu}$. Comme u doit être un diviseur de $-a^3 b$, si on prend les diviseurs du second degré $\pm a^2$, $\pm ab$, $\pm a \sqrt{ab}$, on voit facilement que les deux premiers sont inutiles, parce qu'étant substitués dans la seconde équation $u + fy + z = bb$, elle ne devient pas identique. Mais en examinant $a \sqrt{ab}$ que je fais $= u$, je trouve $y = b$, $z = -a \sqrt{ab}$, $f = b$. Ces valeurs étant substituées dans la seconde équation la rendent identique, puisqu'elle devient $a \sqrt{ab} + bb - a \sqrt{ab} = bb$, ou $bb = bb$. Ainsi les trinomes $xx + bx + a \sqrt{ab} = 0$, $xx + bx - a \cdot \sqrt{ab} = 0$, sont les diviseurs cherchés (on auroit trouvé les mêmes trinomes en supposant $u = -a \sqrt{ab}$), qui multipliés l'un par l'autre rendront la proposée.

Soit maintenant l'équation du cinquieme degré $x^5 - 4a \cdot x^4 + 6a^2 x^3 - 8a^3 x^2 + 5a^4 x - a^5 = 0$, qu'on propose de diviser en deux facteurs l'un du second, l'autre du troisieme degré. Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^3 + txx + sx + z = 0$, dont le produit

$$\begin{aligned} x^5 + y x^4 + ux^3 + tux^2 + sux + zu &= 0 \\ + t x^4 + tyx^3 + sy x^2 + zy x & \\ + sx^3 + zx^2 & \end{aligned}$$

doit rendre la proposée. La comparaison des termes donne les cinq équations suivantes $y + t = -4a$, $u + ty + s = 6a^2$, $tu + sy + z = -8a^3$, $su + zy = 5a^4$, $zu = -a^5$. Par la premiere on a $t = -4a - y$; par la derniere $z = -\frac{a^5}{u}$; par la quatrieme $s = \frac{5a^4 - zy}{u} = \frac{5a^4}{u} + \frac{a^5 y}{uu}$. Substituant ces valeurs dans la seconde il vient $u - 4ay - yy + \frac{5a}{u} + \frac{a^5 y}{u \cdot u} = 6a^2$, ou $yy + 4ay - \frac{a^5 y}{uu} = -6aa + u + \frac{5a^4}{u}$. Parce que u doit être un diviseur du second ordre de a^5, prenons pour u le diviseur $\pm aa$. Si nous supposons $u = aa$, la derniere équation devient $yy + 3ay = 0$, d'où l'on tire $y = 0$, & $y = -3a$. Si nous supposons $y = 0$, nous aurons $t = -4a$, $s = 5aa$, $z = -a^3$. Ces valeurs étant substituées dans la troisieme équation dont on n'a fait aucun usage, il vient $-4a^3 - a^3 = -8a^3$, équation qui n'est pas identique; donc on ne peut pas faire $y = 0$. Mais en faisant $y = -3a$, on trouve $t = -a$, $s = 2aa$, $z = -a^3$. Ces valeurs substituées dans la troisiéme donnent $-8a^3 = -8a^3$, équation identique. C'est pourquoi substituant ces valeurs dans les équations auxiliaires, on trouvera $xx - 3ax + aa = 0$, $x^3 - ax^2 + 2aax - a^3 = 0$, qui multipliées l'une par l'autre rendent la proposée.

Soit encore l'équation $x^6 - 13ax^5 + 45a^2 x^4 - 71a^3 x^3 + 57a^4 x^2 - 16a^5 x + 2a^6 = 0$, qu'on propose de résoudre en deux, l'une du second, l'autre du quatriéme degré.

Je prends les deux équations auxiliaires $xx + yx + u = 0$, $x^4 + px^3 + tx^2 + sx + z = 0$, qui étant multipliées l'une par l'autre donnent

$$\begin{aligned} x^6 + px^5 + tx^4 + sx^3 + zx^2 + zyx + zu = 0 \\ + yx^5 + pyx^4 + tyx^3 + syx^2 + sux \\ + ux^4 + pux^3 + tux^2. \end{aligned}$$

Comparant celle-ci avec la proposée, j'ai les six équations $p + y = -13a$, $t + py + u = 45a^2$, $s + ty + pu = -71a^3$, $z + sy + tu = 57a^4$, $zy + su = -16a^5$, $zu = 2a^6$. Par la premiere on a $p = -13a - y$, par la derniere $z = \frac{2a^6}{u}$. La valeur de p étant substituée dans la seconde, il vient $t = 45aa + 13ay + yy - u$. Mettant la valeur de z dans la cinquiéme, on trouve $s = -\frac{2a^6 y}{uu} - \frac{16a^5}{u}$. En substituant ces valeurs trouvées dans la quatriéme, on aura

$$y^2 - \frac{16a^5uy + 13au^3y + 2a^6u - 57a^4u^2 + 45a^2u^3 - u^4}{u^3 - 2a^6} = 0 \text{ (B)}.$$

Puisque u doit diviser $2a^6$, & que les diviseurs quarrés les plus simples de cette quantité sont $\pm aa$, $\pm 2aa$, $\pm aa\sqrt{2}$, on peut supposer u égal à quelqu'une de ces quantités. Or en prenant aa ou $-aa$ pour u, on ne réussit pas; mais en faisant $u = 2aa$, l'équation B devient $y^2 + 15ay + 22aa = 0$; d'où l'on tire $y = -10 \cdot a$ & $y = -2a$: la premiere racine est inutile, mais la seconde donne $p = -11a$, $t = 21a^2$, $s = -7a^3$, $z = a^4$. Ces valeurs étant substituées dans la troisieme équation, dont nous n'avons pas encore fait usage, la rendent identique, & donnent $-71a^3 = -71a^3$. Ainsi les équations auxiliaires dans lesquelles la proposée peut se réduire, sont $xx - 2ax + 2aa = 0$, & $x^4 - 11ax^3 + 21a^2x^2 - 7a^3x + a^4 = 0$.

On peut remarquer que si l'on se fût servi de la troisieme équation, au lieu d'employer la quatrieme, on auroit trouvé l'équation cubique $2y^3 + 26ay^2 + 81a^2y + 74a^3 = 0$, au lieu d'une équation du second degré qui est bien plus aisée à

résoudre; ainsi le choix des équations qu'on emploie, peut diminuer la difficulté du calcul. Les racines de cette équation cubique sont $y = -2a$, $y = -\frac{11a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{47}$, dont la premiere réussiroit ; car elle donneroit des valeurs de p, t, &c. qui tendroient la quatriéme équation identique.

Si on avoit à résoudre une équation du septieme degré en deux autres, l'une du troisieme, l'autre du quatrieme degré, il est visible qu'il faudroit employer deux équations auxiliaires, l'une du troisieme, l'autre du quatrieme degré, & en général pour réduire une équation de l'ordre m en deux autres, l'une de l'ordre $m - n$, & l'autre de l'ordre n, il faut se servir de deux équations auxiliaires, dont l'une soit du degré $m - n$, & l'autre du degré n; mais il est aisé de sentir que la difficulté augmente à proportion que m est plus grand, puisqu'on a toujours un nombre m d'indéterminées, dont on ne peut souvent trouver la valeur que par le moyen de plusieurs équations très-compliquées.

Mais quoiqu'il y ait plusieurs équations irréductibles par les méthodes connues, néanmoins toutes les fois que la proposée est *convertible*, elle peut se décomposer en plusieurs du second degré. J'appelle équation convertible une équation de degré pair, dont l'exposant soit m (nombre pair) dans le premier terme qui doit être x^m sans autre coefficient que l'unité, le dernier terme étant une constante que je nomme a^m. Chaque terme placé entre le dernier & celui du milieu, & divisé par un facteur convenable de a^m, doit avoir le même signe & le même coefficient que le terme correspondant placé entre celui du milieu & le premier Ainsi les équations $x^4 + bx^3 + ccx^2 + a^2bx + a^4 = 0$, $x^6 - bx^5 + c^3x^3 - a^4bx + a^6 = 0$ sont convertibles. Car en divisant l'avant-dernier terme de la premiere par le facteur a^2 de a^4, il vient $+bx$ qui a le même signe & le même coefficient que le second terme, & en divisant (dans la seconde équation) le terme $-a^4bx$ par a^4, facteur de a^6, il vient $-bx$, qui a le même signe & le même coefficient que le terme correspondant $-bx^5$.

Pour résoudre ces sortes d'équations, on prendra une formule du second degré $xx + nx + a^2 = 0$, dans laquelle n est une quantité qu'on doit déterminer; on formera ensuite une équation convertible d'un degré inférieur de deux unités ; de ma-

niere que son premier terme soit x^{m-2} & son dernier terme $= a^{m-2}$, & dont les coefficiens des autres termes soient indéterminés. Après avoir multiplié ces deux équations l'une par l'autre, on comparera les termes du produit avec ceux de la proposée jusqu'au terme du milieu inclusivement; car la comparaison des autres donne les mêmes équations que les premiers. Ayant chassé toutes les indéterminées, excepté m, il en résultera une équation entre m & des constantes; & les valeurs de m qu'on en tirera, étant substituées dans le trinome $xx + mx + aa = 0$, donneront les équations du second degré, dans lesquelles la proposée pourra se résoudre.

EXEMPLE I. Soit l'équation convertible $x^4 + 2bx^3 + 2aabx + a^4 = 0$, je forme l'équation convertible inférieure de deux degrés, c'est-à-dire, $xx + hx + aa = 0$, que je multiplie par le trinome $xx + mx + aa = 0$, afin d'avoir l'équation convertible

$$\begin{aligned} x^4 + hx^3 + 2a^2 x^2 + a^2 mx + a^4 = 0, \\ + mx^3 + mhx^2 + a^2 hx \end{aligned}$$

La comparaison des termes donne les deux équations $m + h = 2b$, $2aa + mh = 0$. Substituant dans la seconde la valeur de h prise dans la premiere, il vient $2aa + 2bm - mm = 0$, ou $mm - 2bm = 2aa$, dont les racines sont $m = b \pm \sqrt{(2aa + bb)}$. Substituant ces valeurs dans le trinome, on trouve les équations $xx + bx + x\sqrt{(2aa + bb)} + aa = 0$, $xx + bx - x\sqrt{(2aa + bb)} + aa = 0$, qui sont les facteurs de la proposée.

EXEMPLE II. Soit l'équation $x^6 + a^6 = 0$. Je forme l'équation convertible du quatriéme degré $x^4 + px^3 + tx^2 + a^2 px + a^4 = 0$, qui étant multipliée par le trinome $xx + mx + aa = 0$, donne

$$\begin{aligned} x^6 + px^5 + tx^4 + a^2 px^3 + ta^4 x^2 + a^4 mx + a^6 = 0 \\ + mx^5 + mpx^4 + mtx^3 + a^2 mpx^2 + a^4 px \\ + a^2 x^4 + a^2 px^3 + a^2 tx^2 \end{aligned}$$

Ayant comparé le second, le troisieme & le quatrieme termes de celle-ci avec les correspondans de la proposée, je trouve les trois équations $m + p = 0$, $t + mp + a^2 = 0$, $2a^2 p$

$+ mp = 0$. Par la premiere $p = -m$, cette valeur étant substituée dans les deux autres, il vient $t - mm + aa = 0$, $-2am + mt = 0$. Par la premiere de celles-ci, $t = mm - aa$; donc, en substituant dans la derniere $m^3 - 3a^2m = 0$ qui donne trois valeurs de m, savoir, $m = 0$, $m = a\sqrt{3}$, $m = -a\sqrt{3}$. Ces valeurs mises dans le trinome général $xx + mx + aa = 0$, donnent les équations du second degré dans lesquelles on peut résoudre la proposée, c'est-à-dire, $xx + aa = 0$, $xx + ax\sqrt{3} + aa = 0$, $xx - ax\sqrt{3} + aa = 0$.

84. Lorsque les racines de l'équation ne sont pas commensurables, on ne peut pas les trouver par la méthode des diviseurs; mais on peut au moins les avoir par approximation. Pour cela nous supposerons qu'on ait déja une valeur de la racine approchée seulement jusqu'à sa dixiéme partie près. Voyons donc comment on peut parvenir à cette premiere approximation. Soit l'équation $x^2 - 10x + 22 = 0$; je substitue dans cette équation à la place de x plusieurs nombres tant positifs que négatifs, jusqu'à ce que deux substitutions consécutives me donnent deux résultats de signe contraire. Lorsque j'en ai rencontré deux de cette nature, j'en conclus que la valeur de x est entre les deux nombres qui ont donné ces résultats. Si dans l'équation proposée je substitue -1, -2, -3, &c. à la place de x, je trouve toujours des résultats positifs. De même les résultats que donnent les nombres $1, 2, 3$, sont encore positifs; mais en substituant 4 à la place de x, j'ai un résultat négatif. Ainsi une des racines est entre les nombres 3 & 4, qui different de plus de la dixiéme partie de l'un d'entre eux. Je prends la moitié de leur somme, & supposant $x = 3 + \frac{1}{2}$, je trouve pour résultat une quantité négative; donc la racine est entre 3 & $3 + \frac{1}{2}$. Prenant la moitié de leur somme $3 + \frac{1}{4}$ pour x,

l'équation se réduit à $\frac{1}{16}$, quantité positive ; donc cette racine est entre $3 + \frac{1}{4}$ & $3 + \frac{1}{2}$, & ces deux nombres différant de $\frac{1}{4}$, quantité plus petite que la dixiéme partie de l'un d'entre eux, je prends la moitié de leur somme $3 + \frac{3}{8}$, & je suppose $x = 3 + \frac{3}{8} + d$, ou $x = 3 \cdot 3 + d$ (en prenant en décimales approchées la valeur de la fraction). Substituant cette valeur de x dans l'équation, & négligeant le quarré de d (parce que d étant fort petit, son quarré doit l'être davantage), j'ai $- 0 \cdot 11 - 3 \cdot 4 d = 0$, ou $d = \frac{0 \cdot 11}{- 3 \cdot 4} = - 0 \cdot 032$, en ne poussant la division que jusqu'à deux chiffres significatifs seulement. En général on ne la pousse que jusqu'à autant de chiffres significatifs, y compris le premier qu'on trouve, qu'il y a de places entre celui-ci & le premier chiffre de la valeur approchée de x. Ici il y a deux places entre 3, qui est le premier chiffre significatif du quotient, & 3, premier chiffre de la valeur approchée de x ; donc on a la valeur approchée de x en faisant $x = 3 \cdot 3 - 0 \cdot 032 = 3 \cdot 268$. Si l'on vouloit approcher davantage de la véritable valeur de x, on supposeroit $x = 3 \cdot 268 + d$, & en s'y prenant comme nous venons de le faire, on auroit une valeur bien plus approchée de x, & ainsi de suite. Si l'on veut avoir l'autre racine de l'équation, on divisera cette équation par $x - 3 \cdot 268$, le quotient fera connoître l'autre racine. Si le quotient étoit du second degré, on pourroit trouver les racines résultantes par la méthode du second degré. Mais on s'y prendroit comme nous venons de le faire, si le quotient étoit d'un degré plus élevé, en négligeant toujours les puissances de d au-dessus du premier degré.

Si l'on avoit l'équation $x^3 - 12x - 14 = 0$,

dont une des racines approchées est $3 \cdot 925$, on la diviseroit par $x - 3 \cdot 925 = 0$, le quotient $x^2 + 3 \cdot 925x + 3 \cdot 4056 = 0$ (il y a un reste $0 \cdot 633$ qu'on peut négliger), contiendroit les autres racines qui sont, l'une $-2 \cdot 6225$, & l'autre $-1 \cdot 3025$. On les auroit aussi trouvées en cherchant dans la proposée les limites entre lesquelles ces racines étoient contenues, comme on a fait pour la premiere racine.

REMARQUE. La méthode que nous venons d'exposer, suppose qu'on puisse trouver deux nombres qui, substitués à la place de x, donnent deux résultats de signe contraire, & que la racine se trouve entre ces deux résultats. Or il est facile de voir que cela est possible. Car soit la plus petite valeur de $x = a$, celle qui est immédiatement plus grande $= d$. Dans ce cas $x - a$ & $x - d$ sont des facteurs de l'équation proposée. Si au lieu de x on substitue un nombre plus petit que a, le facteur $x - a$ deviendra négatif, & positif, si on substitue un nombre plus grand que a (en supposant ce nombre plus petit cependant que d). Le produit des autres facteurs ne changeant point de signe, il est clair que le changement de signe du facteur $x - a$, occasionnera un changement de signe dans le produit total. On démontreroit la même chose si le plus petit facteur étoit $x + a$, en substituant des nombres négatifs à la place de x.

AUTRE METHODE. Ayant trouvé par la méthode précédente, ou de quelqu'autre maniere, deux limites qui ne different entr'elles que de l'unité, on supposera que la racine cherchée est égale à la plus grande limite moins une quantité indéterminée, ou à la moindre limite plus une quantité indéterminée. On substituera cette valeur dans l'équation donnée, & négligeant les termes du résultat, où l'indéterminée est au-

dessus du premier degré, on tirera de la comparaison des autres termes la valeur de l'indéterminée, ce qu'on réitérera, jusqu'à ce qu'on ait trouvé une racine assez approchée.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 15x + 10 = 0$. Supposant x successivement égal à 1, 2, 3, on trouve des résultats négatifs dont le dernier est -8; mais en supposant $x = 4$, on trouve le résultat positif $+14$. Ainsi il est évident qu'une des racines de la proposée est entre 3 & 4. Je suppose donc $x = 3 + d$, pour avoir

$$\begin{aligned} x^3 &= 27 + 27d + 9d^2 + d^3 \\ -15x &= -45 - 15d \\ +10 &= +10 \end{aligned}$$

C'est pourquoi en écrivant l'équation dans un ordre renversé, il viendra $0 = -8 + 12d + 9d^2 + d^3$ (A); mais d étant moindre que l'unité, d^2 & d^3 sont encore beaucoup moindres; négligeant donc les deux derniers termes de cette équation, il vient $0 = -8 + 12d$, ou $12d = 8$, & $d = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} = 0 \cdot 6$ à-peu-près, & par conséquent $x = 3 \cdot 6$. Pour avoir une valeur plus exacte, on supposera $x = 3 \cdot 6 + p$, ce qui donnera la transformée $0 = 2 \cdot 656 + 23 \cdot 88p + 10 \cdot 8p^2 + p^3$. D'où en négligeant les deux derniers termes pour la même raison que ci dessus, on tirera $23 \cdot 88p = -2 \cdot 656$, ou $p = \frac{-2 \cdot 656}{23 \cdot 88} = -0 \cdot 111$; & ajoutant cette fraction à la premiere valeur trouvée, on aura $x = 3 \cdot 6 - 0 \cdot 111 = 3 \cdot 489$, racine plus approchée que la premiere.

On peut encore faire ces approximations d'une autre maniere, en se contentant de corriger la valeur de la premiere indéterminée, sans remonter à la proposée. *Par exemple*, dans l'équation ci dessus, après avoir trouvé $d = 0 \cdot 6$, je corrige cette valeur de d en supposant $d = 0 \cdot 6 + p$, & je substitue $0 \cdot 6 + p$ à la place de d dans l'équation A, d'où j'ai tiré cette valeur de d, pour avoir $0 = +2 \cdot 656 + 23 \cdot 88p + 10 \cdot 8p^2 + p^3$ (B); d'où en négligeant les deux derniers termes, & opérant comme ci-devant, on tire $p = -0 \cdot 111$, & par conséquent $x = 3 \cdot 489$. Pour approcher davantage, on supposeroit $p = -0 \cdot 111 + t$; & substituant cette valeur dans l'équation B, on auroit la valeur de t, & ainsi de suite.

Si l'équation étoit littérale, on en trouveroit les racines approchées par la même méthode, pourvu qu'on pût substituer des nombres exacts, ou approchés à la place des lettres. Si, *par exemple*, dans l'équation $x^3 - afx + ab = 0$, on sait que les trois quantités a, f, b sont entr'elles comme les nombres 5, 3, 2, on pourra leur substituer ces nombres, & changer la proposée en $x^3 - 15x + 10 = 0$; & ayant trouvé, comme on vient de le faire, qu'une des valeurs approchées de x est $3 \cdot 489$, on diroit qu'une racine approchée de la proposée est égale à cette quantité, l'unité étant la cinquieme partie de a, ou le tiers de f, ou la moitié de b.

AUTRE METHODE. Pour faire comprendre cette autre méthode très-élégante, soit l'équation $0 = A + By + Cy^2 + Dy^3 + Ey^4$ &c. Il est visible que si y est une fraction fort petite, & que D & E ne surpassent pas de beaucoup les quantités A, B, C, les deux derniers termes seront extrêmement petits par rapport aux premiers, & l'on pourra changer l'équation en quelqu'une des suivantes

$$0 = A + By$$
$$0 = A + By + Cy^2$$
$$0 = A + By + Cy^2 + Dy^3$$

Dans lesquelles la valeur de y différera fort peu de la véritable. La premiere équation donne $y = -\frac{A}{B}$, la seconde peut se résoudre facilement par la méthode du second degré. Mais elle peut sans erreur sensible être abbaissée au premier degré, en substituant dans son dernier terme la valeur de y (& non pas de y^2) prise de l'équation $y = -\frac{A}{B}$, ce qui donnera $0 = A + By - \frac{A}{B}Cy$, ou $0 = AB + BBy - ACy$, d'où l'on tire $y = \frac{AB}{AC - BB}$.

Pour faire connoître l'utilité & l'usage de cette formule, soit l'équation $x^4 - 10x^2 - 130x + 856 = 0$, dont on trouvera facilement qu'une des racines approchées est $5 \cdot 5$. Supposons que la véritable racine est $5 \cdot 5 + y$, & substi-

tuons cette valeur au lieu de x dans la proposée, elle deviendra, en négligeant les termes dans lesquels y est au-dessus du second degré, $0 = -1 \cdot 125 - 150\ 75\, y + 6 \cdot 5 y^2$. Comparant cette équation avec l'équation $0 = A + By + Cy^2$, il vient $A = -1 \cdot 125$, $B = -150 \cdot 75 y$, $C = 6 \cdot 5$; & $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{159 \cdot 59275}{-22732 \cdot 875} = -0 \cdot 000713$. Ainsi $x = 5 \cdot 5 + y$ sera $= 5 \cdot 5 - 0 \cdot 000713 = 5 \cdot 499287$ à très-peu-près. Si on vouloit une racine plus exacte, on la trouveroit facilement, en supposant $x = 5 \cdot 499287 + y$, & répétant le même calcul.

Cette méthode est très-utile pour trouver la racine 3[e], 4[e], 5[e], &c. d'un nombre qui n'en a pas d'exacte. Soit, *par exemple*, le nombre 30 dont on demande la racine cubique. La plus grande racine cubique de 30 en nombres entiers étant $= 3$, je suppose la véritable racine $= 3 + y$. Donc $30 = 27 + 27y + 9y^2$, en négligeant le dernier terme y^3; donc $0 = -3 + 27y + 9y^2$, ce qui donne $A = -3$, $B = 27$, $C = 9$, & $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{81}{756} = 0 \cdot 1071$, & la racine approchée de 30 sera $= 3 \cdot 1071$. Si on vouloit avoir la racine quarrée de 2, il seroit bon de chercher une racine approchée, en prenant, *par exemple*, $\frac{7}{5}$ pour cette racine; supposant ensuite que la véritable racine est $\frac{7}{5} + y$, l'on aura 2 ou $\frac{50}{25} = \frac{49}{25} + \frac{14}{5} y + y^2$, ou $0 = -1 + 70y + 25y^2$; d'où l'on tire $A = -1$, $B = 70$, $C = 25$, $y = \frac{AB}{AC - BB} = \frac{-70}{-4925} = \frac{70}{4925} = 0 \cdot 014213$ à-peu-près; donc (à cause de $\frac{7}{5} = 1 \cdot 4$) $\sqrt{2} = 1 \cdot 414213$ à très-peu près.

85. Si l'équation avoit toutes ses racines égales deux à deux, comme si les facteurs d'une équation étoient $x-d$, $x-d$, $x-p$, $x-p$; de maniere qu'on eût $(x-d)^2 \times (x-p)^2 = 0$, elle ne pourroit changer de signe quelque valeur qu'on mît pour x : car que $x - a$ soit positif ou négatif, son quarré sera nécessairement positif. De même si les racines d'une équation sont imaginaires deux à deux, quel-

ques nombres qu'on substitue à la place de x, on ne trouvera jamais deux résultats de signe contraire, autrement la valeur de x se trouveroit entre ces deux nombres, & par conséquent ne seroit pas imaginaire. Il en seroit de même si les racines étoient en partie égales deux à deux & en partie imaginaires.

Il nous reste donc à donner la méthode d'avoir les racines imaginaires & les racines égales d'une équation. A l'égard des premieres nous avons déja dit (72) qu'elles se trouvent toujours en nombre pair, & que si l'une est représentée par $a + b\sqrt{(-1)}$, l'autre sera $= a - b\sqrt{-1}$, & par conséquent les deux facteurs correspondants seront $x - a - b\sqrt{(-1)}$, $x - a + b\sqrt{(-1)}$, dont le produit $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ sera un facteur rationel du second degré, qu'on trouvera par la méthode déja expliquée (81); aprèsquoi, par la méthode du second degré, on trouvera les racines de ce facteur ou de ces facteurs s'il y en a plusieurs. *Par exemple*, étant donnée l'équation $x^3 + x^2 + 8x - 10 = 0$, je trouve qu'elle a un facteur $x^2 + 2x + 10$ du second degré & un facteur $x - 1$ du premier, lequel donne une des racines $= 1$. Résolvant l'équation $x^2 + 2x + 10 = 0$, on trouve $x = -1 \pm \sqrt{(-9)}$; donc les deux racines que donnent le facteur du second degré sont imaginaires.

Pour avoir les racines égales d'une équation, multipliez chaque terme par l'exposant de x dans ce même terme & diminuez cet exposant d'une unité, vous aurez une nouvelle équation, dont le plus grand commun diviseur, avec la proposée, contiendra les racines égales de celle-ci, mais élevées à une puissance moindre d'une unité : c'est-à-dire,

par exemple, que s'il y avoit trois racines égales dans la proposée, il n'y en aura que deux dans le commun diviseur. En effet $(x+a)^m = x^m + m x^{m-1} a +$ &c. . . . $+ a^m$. Donc multipliant chaque terme du second membre de cette équation par l'exposant correspondant de x (en faisant attention que le dernier terme est censé multiplié par $x^0 = 1$, & qu'ainsi on doit multiplier ce terme par o), & diminuant l'exposant de x d'une unité, on aura $m x^{m-1} + m \times (m-1) x^{m-2} a$, &c. c'est-à-dire, $m (x^{m-1} + (m-1) x^{m-2} a + (m-1) \times \frac{m-2}{2} x^{m-3} a^2)$, ou $m (x+a)^{m-1}$. Mais le plus grand commun diviseur de cette quantité & de $(x+a)^m$, est $(x+a)^{m-1}$ qui contient une des racines égales de moins que $(x+a)^m = 0$. Si l'on avoit l'équation $(x+a)^m \times (x+d)^p = 0$, en développant les deux facteurs $(x+a)^m$, $(x+d)^p$ & multipliant les deux résultats l'un par l'autre, on trouveroit qu'en multipliant chaque terme du résultat par l'exposant de x, & diminuant cet exposant d'une unité, on trouveroit, dis-je, la quantité $m (x+a)^{m-1} \times (x+d)^p + p (x+a)^m \times (x+d)^{p-1}$, dont le commun diviseur, avec le premier membre de l'équation proposée, est $(x+a)^{m-1} \times (x+d)^{p-1}$, & ainsi de suite quel que soit le nombre des facteurs.

Soit, *par exemple*, l'équation $x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 0$; pour en trouver les racines égales, je multiplie le premier terme par 3, le second par 2, le troisiéme par 1 & le dernier par o, parce que celui-ci est censé multiplié par $x^0 = 1$, & j'ai en diminuant l'exposant de x d'une unité, $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le plus grand commun diviseur de

ces deux quantités eſt, par la méthode ci-deſſus (31), $x^2 - 4x + 4 = 0$, qui doit contenir une des racines égales de moins que la propoſée. Pour trouver cette racine égale, je multiplie les termes de cette derniere équation par les expoſants correſpondants de x, ayant ſoin de diminuer d'une unité les mêmes expoſants ; ce qui me donne $2x - 4 = 0$, dont le diviſeur commun avec $x^2 - 4x + 4$ eſt $x - 2$, qui contient encore une des racines égales de moins ; donc diviſant le quotient par $x - 2$, le réſultat $x - 2$ fait voir que l'équation a deux racines chacune $= 2$. Diviſant l'équation par $(x - 2)^2$, le quotient $x - 2$ indique que les trois racines de l'équation ſont chacune $= 2$. On auroit trouvé de même ces racines en cherchant les diviſeurs rationels du premier degré de l'équation propoſée.

AUTRE METHODE. Soit l'équation $x^3 + 3x^2 - 9x + 5 = 0$. Pour ſavoir ſi elle a deux racines égales, & quelles ſont ces racines, je ſuppoſe un diviſeur du ſecond degré $x^2 - 2fx + f^2 = 0$ qui contienne ces racines. Multipliant cette équation générale du ſecond degré par une autre $x - g = 0$ qui puiſſe donner un produit du même degré que la propoſée, je trouve

$$\begin{array}{l} x^3 - 2fx^2 + f^2x - ffg = 0 \\ \quad\;\; - gx^2 + 2fgx \end{array}$$

Comparant celle-ci avec la propoſée, je vois que ces équations ne peuvent être égales comme elles doivent l'être, à moins que les mêmes puiſſances de l'inconnue n'aient les mêmes coefficiens, & que le dernier terme ne ſoit le même dans les deux équations. Donc je dois avoir $-2f - g = 3$.
Maintenant, ſi par le moyen de ces équations je puis trouver la valeur de f, elle ſera une des racines égales de la propoſée, ſi je ne trouve aucune valeur pour f, la propoſée ne peut avoir des racines égales.

$$f^2 + 2fg = -9.$$
$$-f^2 g = 5.$$

La premiere de ces équations donne $g = -2f - 3$. Subſtituant cette valeur dans la ſeconde, j'ai $f^2 - 4f^2 - 6f$

=

$= -9$, ou $3f^2 + 6f = 9$, ou $f^2 + 2f = 3$. Mais la troisiéme équation devient (par la substitution de la valeur de g) $2f^3 + 3f^2 = 5$ (B.) Si on multiplie l'équation $f^2 + 2f = 3$ par $2f$, pour avoir $2f^3 + 4f^2 = 6f$, & qu'on en retranche l'équation B le premier membre du premier membre, le second du second, il viendra $f^2 = 6f - 5$. Retranchant celle-ci de $f^2 + 2f = 3$, on trouvera $2f = -6f + 8$, ou $8f = 8$, ou $f = 1$. Il y a donc dans la proposée deux racines égales à l'unité, & désignées par les équations simples $x - 1 = 0$, $x - 1 = 0$. La troisieme racine est $x = -5$, elle résulte de l'équation simple $x + 5 = 0$.

Soit encore l'équation $x^4 - 4x + 3 = 0$, dont on demande les racines égales, en supposant qu'elle en ait de telles. Je prends l'équation $xx - 2fx + ff = 0$, qui doit renfermer les racines cherchées. Je la multiplie par une autre équation générale du second degré $xx - px + q = 0$, afin d'avoir l'équation A, du même degré que la proposée

$$\begin{array}{l} x^4 - 2fx^3 + f^2x^2 - f^2px + f^2q = 0 \text{ (A)}. \\ \quad\;\; - px^3 + 2fpx^2 \\ \qquad\qquad\quad + qx^2 - 2fqx \end{array}$$

Si l'on suppose maintenant que l'équation A est la même que la proposée dans laquelle le second & le troisieme termes manquent, nous aurons les équations qu'on voit ici.

$$\begin{array}{ll} \text{I. } 2f + p = 0 & \text{III. } f^2p + 2fq = 4 \\ \text{II. } f^2 + 2fp + q = 0 & \text{IV. } f^2q = 3. \end{array}$$

La premiere de ces équations donne $p = -2f$. Cette valeur de p étant substituée dans la seconde, on trouve $q = 3f^2$. De ces valeurs de p & de q substituées dans la troisieme, on tire $-2f^3 + 6f^3 = 4$, ou $4f^3 = 4$, ou $f^3 = 1$. Si la quatrieme équation ne s'accordoit pas avec celle-ci, on concluroit que la proposée n'a pas des racines égales; mais en substituant la valeur de q, la quatrieme devient $3f^4 = 3$, ou $f^4 = 1$, qui donne $f = 1$, tandis que l'équation $f^3 = 1$ donne aussi $f = 1$. La proposée a donc deux racines égales à l'unité.

86. Avant de passer plus loin, nous allons donner la méthode de trouver les racines des quantités de cette forme $A + \sqrt{B}$, A désignant une quantité rationelle. Soit $p + q$ la racine quar-

rée de la quantité proposée ; donc le quarré de cette quantité sera $p^2 + 2pq + q^2 = A + \sqrt{B}$. Il est évident que soit qu'on suppose p un radical, aussi-bien que q, soit qu'on suppose que q est seulement radical, il est, dis-je, évident que $p^2 + q^2$ sera une quantité rationelle $= A$, & que $2pq$ sera un radical quarré $= \sqrt{B}$, quantité que nous ferons $= b$, pour plus de simplicité ; donc $p = \frac{b}{2q}$; mais à cause de $p^2 + q^2 = A$, on a en substituant dans cette derniere équation la valeur de p, $\frac{b^2}{4q^2} + q^2 = A$, ou en multipliant par q^2 & transposant, $q^4 - Aq^2 = -\frac{b^2}{4}$. Enfin résolvant cette derniere équation par la méthode du second degré, il vient $q^2 = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}$; donc $q = \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]}$. Substituant cette valeur de q dans l'équation $p^2 + q^2 = A$ ou $p^2 = A - q^2$, on a $p = \pm \sqrt{(A - q^2)}$, ou $p = \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A \mp \sqrt{(A^2 - b^2)}]}$. Donc la racine cherchée $p + q = \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A \mp \sqrt{(A^2 - b^2)}]}$, ou $\pm \sqrt{[\frac{1}{2}A + \sqrt{(A^2 - b^2)}]} \pm \sqrt{[\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]}$: car cette expression revient au même que celle qu'on trouveroit en prenant le signe supérieur de l'un & de l'autre radical $\sqrt{(A^2 - b^2)}$, seulement alors p se changeroit en q & réciproquement. Quant aux signes de q & de p, il est aisé de voir que si A & b ont le signe $+$, p & q doivent être ou tous les deux positifs ou tous les deux négatifs *. Mais ils doivent avoir

* A & b ne peuvent être à la fois négatifs, parce que la racine cherchée seroit imaginaire.

des signes contraires si b est négatif ; car $p + q$, ou $-p - q$ sont les racines de $p^2 + 2pq + q^2$, tandis que $p - q$, ou $q - p$ sont celles de $A - b = p^2 - 2pq + q^2$. Et de-là il suit que toutes les fois que la quantité $A + b$ aura une racine quarrée, $\sqrt{(A - b)} \times \sqrt{(A + b)} = \sqrt{(A^2 - b^2)} = p^2 - q^2$ sera une quantité commensurable, & qu'ainsi p & q seront tout au plus des radicaux simples.

Soit la quantité $d^2 + c - 2d\sqrt{c}$ dont on demande la racine. Faisant $A = d^2 + c$, $b = -2d\sqrt{c}$, on a $\sqrt{(A^2 - b^2)} = d^2 - c$. $\sqrt{[\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} = d$ & $\sqrt{[\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\sqrt{(A^2 - b^2)}]} = \sqrt{c}$. Donc $p - q = d - \sqrt{c}$, racine cherchée. On donne le signe $-$ à la quantité q, à cause du signe $-$ du radical de la quantité proposée.

Soit maintenant proposé de trouver la racine de la quantité $5 + 2\sqrt{6}$. Puisque $A = 5$, $b = 2\sqrt{6}$, l'on aura $\sqrt{(A^2 - b^2)} = 1$, & la premiere partie de la formule deviendra $\sqrt{3}$, & la seconde $\sqrt{2}$; donc la racine cherchée est $\pm \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$. On trouvera par la même méthode que la racine de $11 - 6\sqrt{2} = 3 - \sqrt{2}$. Mais si l'on vouloit avoir la racine de $1 + \sqrt{3}$, on trouveroit $\sqrt{(A^2 - b^2)} = \sqrt{-2}$, quantité imaginaire. Alors prenant la racine approchée de 3, & lui ajoutant 1, je prendrois ensuite la racine de cette somme, que j'aurois du moins par approximation.

Cherchons maintenant la racine cubique de la quantité $a + \sqrt{d}$, ou de $a + b$, b étant un radical quarré & a une quantité rationelle ; mais auparavant établissons le Lemme suivant.

LEMME. *Dans un Binome quelconque* $a + b$ *élevé à la puissance* m, *la différence du quarré de*

la somme des termes qui occupent des rangs impairs au quarré de la somme des termes des rangs pairs est $=(a^2-b^2)^m$. On peut le vérifier aisément.

Soit maintenant la racine cherchée $=(p+q)\times\sqrt[3]{x}$, p étant rationel, q un radical quarré, & x un radical cube; car il est aisé de voir que p ne peut être un radical, parce que le cube de cette racine contiendroit plus d'un radical. Mais aussi on voit que la racine peut contenir un radical cube qui affecteroit ses deux termes. En élevant au cube la racine proposée, on trouvera que la somme des termes de rang impair est rationelle, & par conséquent $=a$, & celle des termes de rang pair irrationelle, & par conséquent $=b$; donc retranchant le quarré de la seconde somme de celui de la premiere, on aura $a^2-b^2=p^6x^2-3p^4x^2q^2+3p^2x^2q^4-x^2q^6$, ou en multipliant le tout par x prenant la racine cube des deux membres, & divisant ensuite par x, $p^2-q^2=\frac{\sqrt[3]{(a^2-b^2)x}}{x}$; donc pour que p^2-q^2 soit rationel, & par conséquent pour que $a+\sqrt{d}$ ait une racine cubique, il faut que $\sqrt[3]{(a^2-b^2)x}$ soit un cube exact, ce que l'on peut obtenir en prenant pour x une quantité convenable; mais si a^2-b^2 se trouve un cube parfait, on fera $x=1$. Supposons $\frac{\sqrt[3]{(a^2-b^2)x}}{x}=f$, nous aurons $p^2-q^2=f$, & $q^2=p^2-f$. Substituant cette valeur dans l'équation $a=p^3x+3pq^2x$ (qu'on trouve en égalant la somme des termes impairs du cube de la racine cherchée à la quantité rationelle a), il viendra en réduisant

& transposant, $4p^3 x - 3fpx - a = 0$. Afin donc que p & q^2 soient rationels, il faut que la valeur de p tirée de cette équation (en regardant p comme l'inconnue), soit rationelle; on cherchera donc les diviseurs commensurables de cette équation, qui ne peut manquer d'en avoir si p & q^2 peuvent être rationels, c'est-à-dire, si la quantité proposée a une racine cubique.

Soit la quantité $20 + 12\sqrt{3}$, dont on demande la racine cubique. Egalant 20 à a, & $12\sqrt{3}$ à b, nous aurons $a^2 = 400$, $b^2 = 432$, $a^2 - b^2 = -32$ qui n'est pas un cube; mais si je multiplie cette quantité par $2 = x$, il viendra -64, cube de -4. J'aurai donc $\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b^2)x}}{x} = \frac{\sqrt[3]{(-64)}}{2} = -\frac{4}{2} = -2 = f$, & l'équation $4p^3 x - 3fpx - a = 0$ devient $8p^3 + 12p - 20 = 0$, ou en divisant par 8 & réduisant, $p^3 + \frac{3}{2}p - \frac{5}{2} = 0$. Otant les fractions en supposant $p = \frac{y}{2}$ & réduisant, l'on a $y^3 + 6y - 20 = 0$, dont le seul diviseur rationel est $y - 2$ & le quotient $y^2 + 2y + 10 = 0$, dont les racines sont imaginaires. Le diviseur rationel donne $y = 2$ & par conséquent $p = \frac{y}{2} = 1$, & parce que $f = -2$, l'équation $q^2 = p^2 - f$, devient $q^2 = 1 + 2 = 3$ & $q = \sqrt{3}$, & puisque $x = 2$, $(p + q)\sqrt[3]{x}$ sera $= (1 + \sqrt{3}) \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} \times \sqrt{3}$.

Soit proposée maintenant la quantité $2 + \sqrt{5}$, dont on demande la racine cube. Nous aurons $a = 2$, $b = \sqrt{5}$, $a^2 - b^2 = 4 - 5 = -1$, cube

de -1 ; donc $x = 1$ & $f = -1$; donc notre équation devient $4p^3 + 3p - 2 = 0$, & en supposant $p = \frac{y}{4}$, on trouve cette autre équation $y^3 + 12y - 32 = 0$, qui n'a qu'un seul diviseur rationel $y - 2 = 0$, les racines du quotient $y^2 + 2y + 16 = 0$ étant imaginaires ; donc $y = 2$ & $p = \frac{y}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; donc $q^2 = p^2 - f = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$; donc $q = \frac{1}{2}\sqrt{5}$; donc $(p+q) \times \sqrt[3]{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$. On trouvera de même que la racine cube de $20 + 14\sqrt{2}$ est $2 + \sqrt{2}$.

Si l'on demandoit la racine cinquiéme de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$, je supposerois $\sqrt[5]{(a+b)} = (p+q)\sqrt[5]{x}$, p étant rationel & q un radical du second degré ; car il est évident que p ne peut être un radical, autrement la cinquiéme puissance de $(p+q)\sqrt[5]{x}$, contiendroit plus d'un radical ; mais on voit aussi que les deux parties de la racine peuvent être multipliées par un radical du cinquiéme degré qui ne doit plus se trouver dans $a + b$. Élevant à la puissance cinquiéme la racine supposée ; la somme des termes de rang impair sera $= a$, celle des termes de rang pair étant $= b$, la différence des quarrés de la premiere & de la seconde somme sera $a^2 - b^2 = (a+b) \times (a-b) = (p^2 - q^2)^5 \times x^2$. Multipliant par x^3 l'on a $(p^2 - q^2)^5 \times x^5 = x^3 (a^2 - b^2)$, ou en prenant la racine cinquiéme, $(p^2 - q^2)\, x = \sqrt[5]{(x^3 a^2 - x^3 b^2)}$, & enfin $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[5]{(a^2 - b^2)\, x^3}}{x} = f$. Lorsque $a^2 - b^2$ sera

une cinquiéme puissance parfaite, l'on supposera $x = 1$. Dans le cas contraire on multipliera $a^2 - b^2$ par un multiplicateur propre à rendre cette quantité une cinquiéme puissance parfaite, & l'on aura f en divisant $\sqrt[5]{(a^2 - b^2)x^3}$ par la racine cube du multiplicateur x^3. De l'équation $p^2 - q^2 = f$, on tire $q^2 = p^2 - f$ & $q = \sqrt{(p^2 - f)}$. On connoîtra donc q, aussi-tôt qu'on connoîtra f & p. A l'égard de cette derniere quantité, on la trouvera en égalant à a la somme des termes rationels de la cinquiéme puissance de la racine supposée. De cette égalité, en substituant la valeur de q^2 prise dans l'équation, $q^2 = p^2 - f$, on déduira l'équation $16p^5x - 20p^3fx + 5pf^2x - a = 0$. Cette équation, après les substitutions des valeurs de x & de f, étant changée en une autre, dont le coefficient du premier terme soit 1, fera connoître p en s'y prenant à-peu-près de la même maniere que nous venons de le voir pour les racines cubiques.

Pour avoir la racine septiéme de la quantité $a + \sqrt{d} = a + b$; supposant cette racine $= (p + q) \times \sqrt[7]{x}$, élevant cette racine à la septiéme puissance, égalant la somme des termes de rang impair à la quantité a, & celle des termes de rang pair à la quantité b, ôtant le quarré de la derniere somme de celui de la premiere, nous aurons $(p^2 - q^2)^7 \times x^2 = a^2 - b^2$, multipliant par x^5 prenant les racines septiémes & divisant ensuite par x, l'on a $p^2 - q^2 = \frac{\sqrt[7]{x^5(a^2 - b^2)}}{x} = f$; donc $p^2 - q^2 = f$, ou $q^2 = p^2 - f$. Il est évident que cette équation fera connoître q, aussi

tôt qu'on connoîtra f & p. On connoîtra f en cherchant la valeur de x, ce qu'on fera à-peu-près comme nous l'avons expliqué pour les racines troisiéme & cinquiéme. A l'égard de p, si l'on égale la somme des termes de rang impair de la puissance septiéme de $(p+q)\sqrt[7]{x}$ à la quantité a, en se souvenant de substituer $p^2 - f$ à la place de q^2, on en déduira l'équation $63p^7x - 112p^5fx + 56p^3f^2x - 7pf^3x - a = 0$, qui fera connoître la valeur de p en cherchant les diviseurs rationels de l'équation qu'on trouvera en transformant celle-ci en une autre, dont le premier terme soit sans coefficient. On trouvera de même pour la racine onziéme de $a + \sqrt{d} = a + b$, l'équation $\frac{\sqrt[11]{x^9(a^2-b^2)}}{x} = p^2 - q^2 = f$, & l'on connoîtra p par le moyen de l'équation $1024p^{11}x - 2816p^9fx + 2816p^7f^2x - 1232p^5f^3x + 220p^3f^4x - 11pf^5x - a = 0$. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir les racines 13e, 17e &c. dont les exposants sont des nombres premiers. Mais si l'exposant de la racine n'étoit pas un nombre premier, qu'il fût 15, *par exemple*, ou 9, on prendroit d'abord la racine cube, & ensuite la racine cinquiéme, s'il s'agissoit de la racine 15e, ou seulement la racine cube du résultat, s'il n'étoit question que de la racine 9e. Si le premier résultat n'avoit point de racine 5e, on seroit sûr que la quantité proposée n'a point de racine 15e. De même si le second résultat n'avoit point de racine cubique, la quantité proposée ne peut avoir de racine 9e.

Si la quantité proposée est de cette forme $\sqrt{a} +$

$\sqrt{d}$, on la multipliera par $\sqrt{a}$, le produit sera de la forme ci-dessus ; mais il faudra diviser la racine du produit par la racine du multiplicateur.

Pour avoir la racine m de $(\sqrt{a} + \sqrt{d})\sqrt[n]{c}$, on multipliera cette quantité par $\sqrt{a}$, & on la divisera par $\sqrt[n]{c}$, & l'on aura la quantité $a + b$ dont on prendra la racine m ; mais on divisera le résultat par $\sqrt[2m]{a}$ & on le multipliera par $\sqrt[mn]{c}$. A l'égard de p, il doit avoir le signe de a, & q celui de b.

87. Qu'il s'agisse d'extraire la racine quarrée de la quantité $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$ qui renferme une partie rationelle & trois radicaux du second degré. Je suppose que la racine cherchée est $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$. Elevant cette quantité au quarré, on aura $p + q + r + 2\sqrt{pq} + 2\sqrt{pr} + 2\sqrt{qr}$; ainsi en égalant la partie rationelle à A, & les parties radicales aux parties radicales de la quantité proposée, nous pourrons former les quatre équations suivantes : $p + q + r = A$, $2\sqrt{pq} = \sqrt{B}$, $2\sqrt{pr} = \sqrt{C}$, $2\sqrt{qr} = \sqrt{D}$. Par la seconde $q = \frac{B}{4p}$, par la troisieme $r = \frac{C}{4p}$, & par la quatriéme $r = \frac{D}{4q}$. Substituant dans la premiere les valeurs de q & de r données par la seconde & la troisieme, il viendra $p + \frac{B}{4p} + \frac{C}{4p} = A$, ou $p^2 + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} = pA$, ou $pp - pA = \frac{-B-C}{4}$, ou $pp - pA + \frac{AA}{4} = \frac{AA-B-C}{4}$, $p - \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(AA-B-C)}}{2}$; & enfin $p = \frac{A+\sqrt{(AA-B-C)}}{2}$. Si $A + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D}$ est un quarré parfait, la quantité $\sqrt{(AA-B-C)}$ deviendra rationelle, parce que $AA - B - C = (p+q+r)^2 - 4pq - 4pr = (p-q-r)^2$, ce qui donne $\sqrt{(AA-B-C)} = p - q - r$. Dès qu'on aura trouvé p, on aura q par l'équation $q = \frac{B}{4p}$, & r par

l'équation $r = \frac{C}{4p}$; mais, parceque r est aussi $= \frac{D}{4q}$, il est nécessaire qu'après avoir déterminé p, q, r, on ait l'équation de condition $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, afin que l'extraction de la racine soit possible.

Qu'on se propose d'extraire s'il est possible la racine quarrée de la quantité $10 + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}$. Faisant $A = 10$, $B = 24$, $C = 40$, $D = 60$, nous trouverons $AA - B - C = 36$, & $p = \frac{A + \sqrt{(AA - B - C)}}{2} = 8$, $q = \frac{B}{4p} = \frac{3}{4}$, $r = \frac{C}{4p} = \frac{5}{4}$. D'un autre côté l'équation $\frac{C}{4p} = \frac{D}{4q}$, donne $5 = 80$, ce qui étant absurde, on doit conclure que les nombres trouvés p, q, r ne sont pas les véritables. Faisons une autre hypothèse en supposant $A = 10$, $B = 40$, $D = 24$ & $C = 60$, nous aurons $AA - B - C = 0$, $p = \frac{A}{2} = 5$, $q = 2$ & $r = 3$. Alors $\frac{C}{4p} = 3 = \frac{D}{4q} = 3$; donc la racine quarrée de la quantité proposée $\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$ est $= \pm (\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3})$.

On opérera semblablement pour les quantités de pareille nature, lorsque les racines quarrées devront contenir 4, 5, 6 ou un plus grand nombre de termes.

Des Equations du troisiéme & du quatriéme degré.

88. Soit une équation du troisiéme degré $x^3 - 1 = 0$, cette équation étant divisible par $x - 1 = 0$, & le quotient étant $x^2 + x + 1 = 0$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, l'on aura pour les trois racines cubiques de l'unité, 1, $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$. On trouvera facilement que les quatre

racines de l'unité que fournit l'équation $x^4 - 1 = 0$, sont $1, -1, +\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$: car l'équation $x^4 - 1 = 0$ est divisible par $x^2 - 1 = 0$ & donne pour quotient $x^2 + 1 = 0$; or les racines de ces deux dernieres équations donnent les quatre racines ci-dessus.

Cela posé. Soit une équation du troisiéme degré délivrée du second terme (ce qu'on peut toujours obtenir (74)) $x^3 - 3ax - b = 0$. Supposons $x = m + n$; donc $x^3 = m^3 + 3mn(m+n) + n^3$, ou en substituant à la place de $m + n$ sa valeur x & transposant tout dans le premier membre, $x^3 - 3mnx \begin{matrix} -m^3 \\ -n^3 \end{matrix} = 0$. Comparant cette équation avec la proposée terme à terme, l'on a $mn = a$, $m^3 + n^3 = b$. Mais l'équation $mn = a$, donne $n^3 = \frac{a^3}{m^3}$; donc en substituant cette valeur dans la derniere équation, $m^3 + \frac{a^3}{m^3} = b$. Multipliant par m^3 & transposant, $m^6 - bm^3 = -a^3$. Cette équation étant résolue par la méthode du second degré, donne $m^3 = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, & enfin $m = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$. Si dans l'équation $m^3 + n^3 = b$ au lieu de la valeur de n, on substitue celle de m prise de l'équation $mn = a$, on trouvera $n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$; donc $x = m + n = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$

$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$ *. De l'équation ci-dessus $m^3=\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b^2}{4}-a^3\right)}$, on tire $m^3 = 1\times\left(\frac{b}{2}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)$; donc en prenant les racines cubiques de l'unité, & les multipliant par la valeur de m on aura

$$m = 1\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$m=\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$m=\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}.$$

Multipliant de même les valeurs de n par les racines cubiques de l'unité, l'on aura les quantités qu'on voit ici :

$$n=1\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$n=\frac{-1+\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$n=\frac{-1-\sqrt{(-3)}}{2}\times\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

* On donne le signe + à l'un des radicaux quarrés, & le signe — à l'autre, afin que le produit mn soit $=a$ ou que $m^3\times n^3=a^3$, ce qui n'arriveroit pas si les deux radicaux quarrés avoient le même signe.

$$m+n=x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{4}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1-\sqrt{(-3)}]}{2}$$

$$x=\sqrt[3]{\left(\frac{b}{4}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1-\sqrt{(-3)})}{2}$$

$$+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}\times\frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2}.$$

On n'a pas combiné d'autres valeurs de m & de n, parce que leur produit mn n'auroit pas donné a, ni $m^3 \cdot n^3$ la quantité a^3.

De ces trois valeurs de x la premiere est toujours réelle, mais les deux autres sont imaginaires si $\frac{b^2}{4} > a^3$; elles sont réelles si $\frac{b^2}{4} = a^3$, ou si $\frac{b^2}{4} < a^3$, c'est-à-dire, si la quantité $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$ est ou o, ou imaginaire. Pour le démontrer soit $\frac{b}{2} = p$, $\frac{b^2}{4} - a^3 = q$, quantité négative toutes les fois que $a^3 > \frac{b^2}{4}$.

Par la formule générale du binome de Newton *, $m = \sqrt[3]{(p+\sqrt{q})}$ sera $p^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q + \frac{5}{81} p^{\frac{-8}{3}} q \sqrt{q}$ &c., & $n = \sqrt[3]{(p-\sqrt{q})}$ sera $p^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} - \frac{1}{9} p^{\frac{-5}{3}} q$. &c.; donc $x = m + n = 2p^{\frac{1}{3}} - \frac{2}{9} p^{\frac{-5}{3}}$ &c., quantité qui ne contient aucun radical. Donc la premiere racine est toujours réelle. La seconde racine peut être représentée par $m \times \frac{[-1+\sqrt{(-3)}]}{2} + n \times \frac{[-1-\sqrt{(-3)}]}{2} = \frac{(-m-n)}{2} + \frac{(m-n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$. La premiere partie est évidemment rationelle; quant à la seconde, en retranchant la seconde série de la premiere, vous trouverez $\frac{(m-n)}{2} = \frac{1}{3} p^{\frac{-2}{3}} \sqrt{q} + \frac{5}{81} p^{\frac{-8}{3}} q \sqrt{q}$ &c. dont tous les termes sont affectés de $\sqrt{q}$. Mais $\sqrt{q} \times \sqrt{(-3)}$ est une quantité réelle si q est une quantité négative, & imaginaire si q est une quantité positive; donc la seconde racine est réelle dans le premier cas, & imaginaire dans le second. La troisiéme racine peut être représentée par $\frac{(-m-n)}{2} + \frac{(-m+n)}{2} \times \sqrt{(-3)}$, dont la premiere partie est réelle. A l'égard de la seconde, en ôtant la premiere série trouvée ci-dessus de la seconde, divisant le résultat par 2, & le multipliant par $\sqrt{(-3)}$, on verra de même que la quantité résultante sera réelle lorsque q sera négatif, & imaginaire si q est positif.

* La formule $(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b +$ &c. s'appelle *le binome de Newton*, parce que ce grand Géométre en est l'Inventeur.

Si q eſt o, alors la ſeconde racine & la troiſiéme ſont repréſentées l'une & l'autre par $\frac{-m-n}{2}$; elles ſont donc réelles dans ce cas.

Soit maintenant l'équation du troiſiéme degré $y^3 + 3y^2 - 3y + 25 = 0$. Faiſant évanouir le ſecond terme, en ſuppoſant $y = x - 1$ (74), l'équation réſultante $x^3 - 6x + 30 = 0$, étant comparée avec l'équation générale $x^3 - 3ax - b = 0$, donne $6 = 3a$ & $2 = a$, $b = -30$. Ces valeurs ſubſtituées dans $\sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^3\right)}$, cette quantité devient $\sqrt{(217)}$, qui eſt une quantité réelle, donc il n'y a que la premiere valeur de x qui ſoit réelle, & elle donne $x = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt[3]{(-15 - \sqrt{217})}$; mais parce que $y = x - 1$, il faut, pour avoir les racines de la propoſée, diminuer la valeur de x de 1, & l'on aura $y = \sqrt[3]{(-15 + \sqrt{217})} + \sqrt{(-15 - \sqrt{217})} - 1$ pour la ſeule valeur réelle de l'équation propoſée.

PROBLEME I. *Quel eſt le nombre dont le cube eſt égal à ſix fois ce nombre plus 9?* Soit x ce nombre; par la nature du Problême $x^3 = 6x + 9$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 - 3ax - b = 0$, ou $x^3 = 3ax + b$, on a $3a = 6$, ou $a = 2$ & $b = 9$. Subſtituant ces valeurs dans la formule $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^3}\right)}$, on trouve $x = 3$. Tel eſt le nombre cherché.

PROBLEME II. *Quel est le nombre x dont la différence entre le cube & le triple de ce nombre est 2 ?* Par la nature du Problême $x^3 - 3x = 2$, ou $x^3 = 3x + 2$. Comparant cette équation avec l'équation $x^3 = 3ax + b$, on trouve $3a = 3$, $a = 1$, & $b = 2$. Donc la formule $x =$

$$\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}+\sqrt[3]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^3}\right)}$$

donnera $x = \sqrt[3]{\left(\frac{2+0}{2}\right)} + \sqrt[3]{\left(\frac{2-0}{2}\right)} = 1 + 1 = 2$.

PROBLEME III. *Quel est le nombre x dont le cube est égal à six fois ce nombre plus* 40 ? Nous aurons $a = 2$, $b = 40$, $x = \sqrt[3]{(20 + 14\sqrt{2})} + \sqrt[3]{(20 - 14\sqrt{2})} = 2 + \sqrt{2} + 2 - \sqrt{2} = 4$.

PROBLEME IV. *Trouver trois nombres en proportion arithmétique continue, dont la différence* d *soit* $= 3$ *& le produit* p $= 28$. Soit y le nombre du milieu ; le plus grand nombre sera $y + d$, & le plus petit $y - d$. Le produit de ces trois nombres donne $y^3 - d^2 y = p$; donc $y^3 - d^2 y - p = 0$. Cette équation étant sans second terme, donne par sa comparaison avec l'équation générale, $d^2 = 3a$, ou $a = \frac{d^2}{3}$, & $p = b$. Substituant les valeurs numériques de ces quantités dans la premiere valeur de x trouvée ci-dessus, on a y ou x (car ici l'un peut être mis à la place de l'autre) $=$
$\sqrt[3]{[14 + \sqrt{(196 - 27)}]} + \sqrt[3]{[14 - \sqrt{(196 - 27)}]}$
$= \sqrt[3]{(14 + 13)} + \sqrt[3]{(14 - 13)} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[3]{1}$
$= 3 + 1 = 4$. Donc $y = 4$; le plus grand nombre $y + d = 4 + 3 = 7$, & le plus petit $y - d = 1$.

Si l'on avoit une équation de cette forme $y^{3m} +$ ay^{2m}

$ay^{2m} + by^m + d = 0$, on la réduiroit à une équation du troisiéme degré sans second terme, en supposant $y^m = x - \frac{a}{3}$; & ayant trouvé les racines de la réduite, on en retrancheroit $\frac{a}{3}$, les résultats donneroient les valeurs de y^m, & les racines m de ces résultats donneroient les valeurs de y. Si cette équation n'avoit point de second terme, on supposeroit seulement $y^m = x$, & l'on prendroit la racine m de chaque valeur de x. On peut donc résoudre toutes les équations qui n'ayant que quatre termes, ne contiennent que trois puissances de l'inconnue, dont les exposans forment la progression arithmétique $3m$, $2m$, m. De même l'on peut résoudre toutes les équations à trois termes qui ne contiennent que deux puissances de l'inconnue, mais dont l'exposant de l'une est triple de celui de l'autre.

89. Soit maintenant une équation du quatriéme degré délivrée de son second terme [ce qui est toujours possible (74)] $y^4 + ay^2 + by + c = 0$. Supposons que cette équation soit le produit des deux facteurs du second degré $y^2 + xy + p = 0$, $y^2 - xy + q = 0$ *, leur produit donnera l'équation

$$\begin{array}{llll} y^4 & + qy^2 & + qxy & + pq = 0, \\ & - x^2 & - px & \\ & + p \; ** & & \end{array}$$

qui étant comparée avec la

* Le second terme du second facteur a le signe −, afin que le produit des deux facteurs donne une équation sans second terme, ce qui n'arriveroit pas si le second terme des deux facteurs, qui d'ailleurs doit être le même, avoit les mêmes signes.

** Les quantités $(+q - x^2 + p)$ sont censées multiplier y^2. De même y est multiplié par $+qx - px$.

proposée, donne $q + p - x^2 = a$, $qx - px = b$, $pq = c$. Multipliant la premiere par x & l'ajoutant ensuite à la seconde, l'on a $2qx - x^3 = ax + b$, ou $2qx = ax + x^3 + b$, & $q = \frac{ax + x^3 + b}{2x}$. Cette valeur de q étant substituée dans l'équation $pq = c$, il vient $p \times \frac{ax + x^3 + b}{2x} = c$, & $p = \frac{2xc}{ax + x^3 + b}$. Substituant les valeurs de q & de p que nous venons de trouver dans l'équation $qx - px = b$, il vient $\frac{ax + x^3 + b}{2} - \frac{2cx^2}{ax + x^3 + b} = b$, ou en faisant évanouir les fractions, transposant & réduisant, $x^6 + 2ax^4 + \begin{matrix} a^2 \\ -4c \end{matrix} x^2 - b^2 = 0$, équation qui peut se résoudre par la méthode du troisiéme degré (88). Cette équation (qu'on appelle *la réduite*) étant résolue, on n'aura qu'à substituer la valeur de x qu'elle donnera dans les équations $y^2 + xy + p = 0$, $y^2 - xy + q = 0$, ou bien en substituant les valeurs de p & de q, dans les équations $y^2 + xy + \frac{2c}{x^2 + a + \frac{b}{x}} = 0$,

$$y^2 - xy + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}a + \frac{b}{2x} = 0,$$

& résoudre ensuite ces équations; ou, ce qui revient au même, substituer la valeur de x dans les racines que donnent ces équations résolues, en considérant y seul comme l'inconnue; c'est-à-dire, dans les racines $y = -\tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}x^2 - \frac{2c}{x^2 + a + \frac{b}{x}}}$

$$\& \; y = \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}a - \frac{b}{2x}},$$

& l'on aura les valeurs cherchées de y. Comme x est venu d'une équation dans laquelle il avoit un exposant pair, il est évident que x est un radical quarré & qu'il peut avoir le double signe $\pm$ (car $\sqrt{x^2} = \pm x$).

La premiere expression de y peut donc se changer en celle-ci $y = \mp \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}xx - \cfrac{2c}{xx + a \pm \frac{b}{2x}}}$, & la seconde devient $y = \pm \tfrac{1}{2}x \pm \sqrt{(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a \mp \frac{b}{2x})}$. Ainsi y a quatre valeurs exprimées par l'une ou l'autre formule; mais il n'y a pas pour cela 8 racines, parce que les deux formules donnent les mêmes racines. En effet, les quantités qui sont devant les signes de ces formules étant les mêmes, il suffit de faire voir que les quantités sous les signes sont les mêmes, c'est-à-dire, que $-\frac{x^2}{4} - \frac{a}{2} \mp \frac{b}{2x} = \frac{x^2}{4} - \cfrac{2c}{x^2 + a \pm \frac{b}{2x}}$; or en faisant disparoître les dénominateurs, transposant & réduisant, on tire de cette équation, celle que nous avons appellé *la réduite*; donc cette équation est vraie. Comme la seconde formule est la plus commode, c'est de celle-là que nous nous servirons, & les valeurs de y qu'elle donne, sont

$$y = \tfrac{1}{2}x + \sqrt{\left(-\tfrac{1}{4}xx - \tfrac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)}.$$

Si l'on fait $\frac{x}{2} = f$, $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a - \frac{b}{2x}\right)} = h$, & $\sqrt{\left(-\frac{1}{4}xx - \frac{1}{2}a + \frac{b}{2x}\right)} = l$, les quatre facteurs de l'équation $y^4 + ay^2 + by + c = 0$, pourront être représentés par les formules suivantes

$$\left.\begin{array}{l} y - f - h = 0 \\ y - f + h = 0 \\ y + f - l = 0 \\ y + f + l = 0 \end{array}\right\} (D).$$

Le produit de ces facteurs donnera l'équation

$$\left.\begin{array}{llll} y^4 - 2ffy^2 & - 2fhhy & + f^4 \\ \quad - hh & + 2fll & - f^2h^2 \\ \quad - ll & & - f^2l^2 \\ & & + h^2l^2 \end{array}\right\} = 0 \cdot (S).$$

En comparant les termes de cette derniere équation avec ceux de l'équation proposée, l'on aura $a = -2f^2 - h^2 - l^2$, $b = 2fl^2 - 2fh^2$, $c = f^4 + h^2l^2 - f^2h^2 - f^2l^2$. Substituant ces valeurs dans la réduite, nous aurons l'équation

$$\left.\begin{array}{llll} x^6 - 4f^2x^4 & + 8f^2h^2x^2 & - 4f^2h^4 \\ \quad - 2h^2 & + 8f^2l^2 & + 8f^2h^2l^2 \\ \quad - 2l^2 & + h^4 & - 4f^2l^4 \\ & + l^4 & \\ & - 2h^2l^2 & \end{array}\right\} = 0 \text{ (P)},$$

dont les racines sont $x = \pm 2f$; $x = \pm h \pm l$; $x = \pm h \mp l$. Mais si dans la formule $y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} a \mp \frac{b}{2x}\right)}$ on substitue les valeurs de a & de b que nous venons de trouver, & ensuite celle qu'on voudra des valeurs de x, il en viendra également les valeurs de y que donnent les équations D; donc les racines de la réduite donnent le même résultat par leur substitution.

La formule générale de la valeur de y fait voir que les 4 racines que donnent cette formule, sont ou toutes réelles ou toutes imaginaires, ou deux réelles ou deux imaginaires; mais parce que le dernier terme de la réduite a le signe —, il est évident qu'elle doit avoir une valeur de x^2 positive *, & par conséquent une des valeurs de x est positive; mais nous venons de voir que toutes les valeurs de x donnent la même valeur pour y. Donc quand la valeur de y sera imaginaire, ce ne sera qu'une quantité réelle jointe à la racine d'une quantité réelle & négative, c'est-à-dire, une quantité imaginaire de la forme $M + N\sqrt{(-1)}$. Et puisque les racines imaginaires sont toujours en nombre pair dans une équation, & que l'une étant $a - b\sqrt{(-1)}$, l'autre doit être $a + b\sqrt{(-1)}$ (voyez le n° 72), les facteurs du second degré qui résulteront des deux racines imaginaires multipliées l'une par l'autre, & de deux facteurs réels multipliés aussi

* Car le produit des deux facteurs imaginaires $x \pm a + b\sqrt{(-1)}$, $x \pm a - b\sqrt{(-1)}$, donnant un résultat, dont le dernier terme est positif, il est nécessaire que toute équation, dont le dernier terme est négatif, ait au moins une racine réelle.

par l'autre, ou les facteurs du second degré qui résulteront des quatre racines imaginaires multipliées deux à deux seront réels. Donc dans ce cas même l'équation aura deux facteurs réels du second dégré.

La réduite P étant le produit des trois facteurs $x^2 - 4f^2 = 0$, $x^2 - h^2 - l^2 - 2hl = 0$, $x^2 - h^2 + 2hl - l^2 = 0$; si h & l sont tous deux réels ou tous deux imaginaires, les trois facteurs seront tous réels, & la formule du troisiéme degré (88) ne pourra donner les racines de la réduite. * Si l'une des deux quantités h ou l seulement est imaginaire, les deux derniers facteurs seront imaginaires, & la réduite sera alors résoluble par la formule du troisiéme degré; donc alors la formule du quatriéme degré réussira.

En examinant attentivement la réduite P, on verra que le coefficient de son second terme est nécessairement négatif lorsque f, h & l sont réels, & que dans le même cas le coefficient de son troisiéme terme est positif & plus grand que o; mais si h^2 & l^2 sont des quantités négatives, ou, ce qui revient au même, si les 4 racines de l'équation sont imaginaires, la réduite P ne sauroit avoir en même tems le second terme négatif & le troisiéme positif; car si $(h^2 + l^2) < 2f^2$, ce qui rend dans ce

* On dit que la formule du troisiéme degré ne peut alors donner les racines, parce que ces racines sont sous une forme imaginaire, quoiqu'elles soient réelles, & c'est-là ce qu'on appelle *le cas irréductible du troisiéme degré*. Lorsque la réduite est dans ce cas, si on substituoit la valeur de x qu'elle donne dans la formule du quatriéme degré, on auroit une expression qui contiendroit des radicaux imaginaires; c'est pourquoi l'on dit que dans ce cas, la formule du quatriéme degré ne réussit point.

cas le ſecond terme négatif, le coefficient du troiſiéme terme, qui dans ce même cas eſt $=(h^2+l^2) \times (h^2+l^2-8f^2)-4h^2l^2$, ſera néceſſairement négatif; donc lorſque la réduite échappera à la formule du n° 88, l'on verra par-là ſi l'équation doit avoir ſes 4 racines réelles ou imaginaires.

En examinant l'équation S, il eſt aiſé de voir qu'une équation du quatriéme degré, ſans ſecond terme & dont le troiſiéme eſt poſitif (on compte comme ſi le ſecond y étoit), doit avoir des racines imaginaires; car $-2f^2-h^2-l^2$ ſera toujours une quantité négative, lorſque f, h, l ſeront réels, & par conſéquent tant que les racines ſeront réelles; donc dans le cas contraire l'équation a des racines imaginaires.

Soit maintenant l'équation $z^4+4z^3+9z^2+12z+3=0$. Faiſant $z=y-1$ & ſubſtituant, l'on aura $y^4+3y^2+2y-3=0$, équation ſans ſecond terme. On a donc ici $a=3$, $b=2$, $c=-3$, & la réduite devient $x^6+6x^4+21x^2-4=0$. Faiſant diſparoître le ſecond terme, en ſuppoſant $x^2=u-2$ (on regarde ici x^2 comme l'inconnue), l'on a $u^3+9u-30=0$, équation qui n'a qu'une racine réelle, & par conſéquent l'équation du quatriéme degré ne doit avoir (ſelon ce que nous avons dit ci-deſſus) que deux racines réelles. Appliquant la formule du n° 88 à la derniere équation que nous venons de trouver, nous aurons

$$u=\sqrt[3]{(+15+\sqrt{252})}+\sqrt[3]{(+15-\sqrt{252})}\ *.$$

* Car en comparant cette équation avec celle du troiſiéme degré (n°. 88), l'on a $-3a=9$, $-a^3=27$, $-b=-30$, $\frac{b}{2}=15$; & $x=u$. Mais la valeur de a, il en eſt

Mais parce que $x^2 = u - 2$, il faut diminuer cette racine de la quantité 2, & l'on aura $x = \pm \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}$.
Subſtituant cette valeur dans l'équation $y = \pm \frac{1}{2} x \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} a \mp \frac{b}{2x}\right)}$, l'on aura les valeurs de y renfermées dans la formule ſuivante : $y = \pm \frac{1}{2} \sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]} \pm \sqrt{\left[-\frac{1}{4}[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}] - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{252})} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}}\right]}$.

Et pour avoir les valeurs de z, il faudra diminuer ces racines de la quantité 1. Deux des racines de y ſont réelles & les deux autres imaginaires *.

Dans le cas où l'équation du quatriéme degré n'a point de diviſeur commenſurable d'une ou de deux dimenſions, après avoir connu, par le moyen de la réduite, ſi elle a des racines réelles, on pourra les chercher par la méthode précédente ; mais ſi elle a des racines commenſurables, on les trouvera aiſément en cherchant les diviſeurs commenſurables de cette équation.

Si l'on avoit une équation de cette forme $x^{4m} + ax^{3m} + bx^{2m} + cx^m + d = 0$, il eſt aiſé de voir qu'en faiſant $y^m = x$, elle ſeroit réſoluble

de même de celle de b, eſt différente dans la formule du quatriéme degré, puiſque dans cette formule $a = 3$, comme nous l'avons dit ci deſſus.

* Ce ſont celles qu'on trouve en prenant le ſigne — dans $\mp \frac{1}{\sqrt{[-2 + \sqrt[3]{(15 + \sqrt{(252} + \sqrt[3]{(15 - \sqrt{252})}]}}$

par la méthode du quatriéme degré, quand même on supposeroit a ou b ou $c=0$, c'est-à-dire, quand même un ou plusieurs termes manqueroient.

REMARQUE. Il y a encore une autre méthode pour résoudre les équations du quatriéme degré, dont il est à-propos de donner une idée aux Commençans *.

Supposons que la racine x d'une équation du quatriéme degré est $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, p, q & r étant des quantités qui désignent les racines de l'équation du troisiéme degré $t^3-ft^2+gt-h=0$; de maniere que $p+q+r=f$, $pq+pr+qr=g$, & $pqr=h$. Cela posé, quarrons la formule $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, pour avoir $x^2=p+q+r+2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Mais $p+q+r=f$; donc en substituant & transposant ensuite, on trouvera $x^2-f=2\sqrt{pq}+2\sqrt{pr}+2\sqrt{qr}$. Et en quarrant encore, $x^4-2x^2f+ff=4pq+4pr+4qr+8\sqrt{ppqr}+8\sqrt{pqrr}+8\sqrt{pqqr}$. Or $g=pq+pr+qr$; donc $x^4-2fxx+ff-4g=8\sqrt{pqr}\cdot(\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r})$, équation que je désignerai par (A). Mais $pqr=h$, $\sqrt{pqr}=\sqrt{h}$, & $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}=x$; donc nous aurons l'équation du quatriéme degré $x^4-2fxx-8x\times\sqrt{h}+ff-4g=0$; dont une des racines est $x=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$, p, q & r étant les racines de l'équation du troisiéme degré $t^3-ft^2+gt-h=0$.

L'équation du quatriéme degré à laquelle nous sommes parvenus, peut être regardée comme générale, parce qu'il est toujours possible de changer une équation du quatriéme degré, qui a le second terme en une autre, dans laquelle ce second terme manque. Voyons donc comment on peut trouver les racines de l'équation ci-dessus.

Soit proposée l'équation $x^4-ax^2-bx-c=0$, que je désignerai par (B), dont on demande les racines. Comparant cette équation avec l'équation A, je trouve 1°. $2f=a$, ou $f=\frac{a}{2}$; 2°. $8\sqrt{h}=b$; donc $64h=bb$, & $h=\frac{bb}{64}$; 3°. $ff-4g=-c$, ou $\frac{aa}{4}-4g+c=0$, ou $c+\frac{aa}{4}=4g$, & $g=\frac{c}{4}+\frac{aa}{16}$. On substituera les valeurs de f, h & g que

* Nous la devons à M. Euler.

nous venons de trouver dans l'équation du troisiéme degré $t^3 - ftt + gt - h = 0$. On cherchera les trois racines de celle-ci par la méthode ci-dessus; & supposant qu'une de ces racines est p, & que les deux autres sont désignées l'une par q & l'autre par r, une des racines de notre équation du quatriéme degré sera $x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$.

Cette formule renferme nécessairement les quatre racines de l'équation proposée du quatriéme degré, à cause des différens signes qu'on peut donner aux radicaux, bien plus il semble même qu'elle peut donner huit valeurs de x; mais on doit faire attention que $\sqrt{pqr}$ doit être $= \sqrt{h} = \frac{b}{8}$; donc si $\frac{b}{8}$ est une quantité positive, le produit des quantités $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$ doit être positif. Il est donc nécessaire dans ce cas de prendre les trois radicaux avec le signe +, ou bien deux avec le signe —, & un avec le signe +; de sorte que dans ce cas les valeurs de x sont

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$

Si $\frac{b}{8}$ est une quantité négative, les valeurs de x seront les suivantes

$$x = \sqrt{p} + \sqrt{q} - \sqrt{r}$$
$$x = \sqrt{p} - \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} + \sqrt{q} + \sqrt{r}$$
$$x = -\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{r}$$

Soit maintenant l'équation du quatriéme degré sans second terme $x^4 - 25xx + 60x - 36 = 0$. En la comparant avec l'équation B je trouve $a = 25$, $b = -60$ & $c = 36$. Substituant ces valeurs de a, b & c dans celles de f, g & h, l'on a $f = \frac{25}{2}$, $g = \frac{625}{16} + 9 = \frac{769}{16}$, & $h = \frac{225}{4}$; ainsi notre équation du troisiéme degré devient $t^3 - \frac{25}{2}.t^2 + \frac{769}{16}.t - \frac{225}{4} = 0$. Afin d'éliminer les fractions, je fais $t = \frac{z}{4}$, pour avoir $\frac{z^3}{64} - \frac{25}{2}.\frac{zz}{16} + \frac{769}{16}.\frac{z}{4} - \frac{225}{4} = 0$. Multipliant ensuite par le plus grand dénominateur 64, je trouve $z^3 - 50zz$

$+ 769 z - 3600 = 0$. Il faut maintenant trouver les racines de cette derniere équation ; l'une d'elles est $z = 9$, & en divisant l'équation par $z - 9 = 0$, il vient $zz - 41 z + 400 = 0$, ou $zz + 41 z = - 400$. Cette derniere équation étant résolue par la méthode du second degré, donne $z = 16$ & $z = 25$. Ainsi les trois racines sont $z = 9$, $z = 16$ & $z = 25$; donc $t = \frac{9}{4}$, $t = 4$ & $t = \frac{25}{4}$. Ainsi nous avons $p = \frac{9}{4}$, $q = 4$ & $r = \frac{25}{4}$; mais $\sqrt{pqr} = \sqrt{h} = - \frac{15}{2} = \frac{b}{8}$; donc, pour nous conformer à ce que nous avons dit ci-dessus l'égard des signes des radicaux $\sqrt{p}$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{r}$, il faut prendre ces trois radicaux avec le signe $-$, ou n'en prendre qu'un avec le signe $-$; & parce que $\sqrt{p} = \frac{3}{2}$, $\sqrt{q} = 2$, $\sqrt{r} = \frac{5}{2}$, les quatre racines de l'équation proposée seront

$$x = \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{2} = 1$$
$$x = \frac{3}{2} - 2 + \frac{5}{2} = 2$$
$$x = - \frac{3}{2} + 2 + \frac{5}{2} = 3$$
$$x = - \frac{3}{2} - 2 - \frac{5}{2} = - 6.$$

Des Equations des Degrés supérieurs.

90. Nous nous contenterons d'exposer la méthode par laquelle on détermine les équations, dont une des racines au moins peut s'exprimer par une formule semblable à la formule de *Cardan*, qui est celle que nous avons donné pour le troisiéme degré (88) : car il n'y a aucune méthode connue, du moins praticable, par laquelle on puisse résoudre dans tous les cas, les équations des degrés supérieurs. Voyons d'abord qu'elles sont les équations du quatriéme degré qui sont dans ce cas.

Soit $x = m + n$; donc $x^4 = m^4 + 4 m^3 n + 6 m^2 n^2 + 4 m n^3 + n^4$, ou $x^4 = m^4 + 4 m n \times (m + n)^2 + n^4$.
$ - 2 m^2 n^2$

A la place de $(m + n)^2$, je substitue x^2, & en transposant tout dans le premier membre, il vient $x^4 - 4 m n x^2 + 2 m^2 n^2 - m^4 - n^4 = 0$ *, équation dont une des racines est $x = m + n$. Dans

* Cette équation est résoluble par la méthode du second degré (71).

cette équation il y a une condition nécessaire, c'est qu'il ne doit y avoir aucune puissance impaire de x. Supposant de même $x = m + n$, nous aurons $x^5 = m^5 + 5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4 + n^5$, équation que j'écris ainsi $x^5 = m^5 + 5mn(m+n)^3 + n^5$. A la place de $m + n$ substituant
$- 5m^2n^2(m+n)$

x, & transposant, il vient $x^5 - 5mnx^3 + 5m^2n^2x - m^5 - n^5 = 0$, équation qui a une racine $x = m + n$. Il y a deux conditions dans cette équation, la premiere qu'il n'y ait aucune puissance paire de x, la seconde que le coefficient de x soit la cinquiéme partie du quarré du coefficient de x^3.

Faisant toujours $x = m+n$, nous aurons $x^6 = m^6 + 6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5 + n^6$. Je dispose ainsi cette équation : $x^6 = m^6 + 6mn(m+n)^4 + n^6$.
$$\begin{aligned} & - 9m^2n^2(m+n)^2 \\ & + 2m^3n^3 \end{aligned}$$

En substituant x à la place de $m + n$, & transposant tout dans le premier membre, il vient $x^6 - 6mnx^4 + 9m^2n^2x^2 - 2m^3n^3 - m^6 = 0$, équation dont une racine $x = m + n$.
$- n^6$

Dans cette équation il ne doit point y avoir de puissance impaire de x, & de plus le coefficient de x^2 doit être le quart du quarré de celui de x^4.

S'il s'agit de l'équation du septiéme degré, l'on trouvera

$$\begin{aligned} x^7 = m^7 & + 7mn(m+n)^5 + n^7, \\ & - 14m^2n^2(m+n)^3 \\ & + 7m^3n^3(m+n) \end{aligned}$$

substituant x à la place de $m + n$, & transposant, il vient

$$\begin{aligned} x^7 - 7mnx^5 + 14m^2n^2x^3 - 7m^3n^3x - m^7 & = 0, \\ - n^7 & \end{aligned}$$

équation dont une des racines $x = m + n$. Dans cette équation il ne doit y avoir aucune puissance paire de x, & de plus le septiéme du coefficient de x^5 elevé au quarré, & multiplié par 14, doit donner le coefficient de x^3, & ce même septiéme élevé au cube & multiplié par 7, doit donner le coefficient de x.

Après avoir élevé $m+n$ à la huitiéme puissance, & disposé l'équation comme on le voit ici

$$x^8 = m^8 + 8mn(m+n)^6 + n^8, \\ -20m^2n^2(m+n)^4 \\ +16m^3n^3(m+n)^2 \\ -2m^4n^4$$

substituez x à la place de $m+n$, & transposant tout dans le premier membre, vous aurez l'équation

$$x^8 - 8mnx^6 + 20m^2n^2x^4 - 16m^3n^3x^2 + 2m^4n^4 = 0. \\ -m^8 \\ -n^8$$

Dans cette équation toutes les puissances impaires de x doivent manquer; & il est visible que le $\frac{1}{8}$ du coefficient de x^6 élevé au quarré & multiplié par 20, doit donner le coefficient de x^4; le cube de la même quantité, multiplié par 16, donne le coefficient de x^2.

La même méthode donnera pour l'équation du neuviéme degré, dont une des racines est $x = m+n$, l'équation que l'on voit ici :

$$x^9 - 9mnx^7 + 27m^2n^2x^5 - 30m^3n^3x^3 + 9m^4n^4x - m^9 = 0. \\ -n^9$$

Toutes les équations dont nous venons de parler, ont une racine $x = m+n$.

On voit clairement que dans les équations d'un degré impair, toutes les puissances paires de x manquent; au contraire toutes les puissances impaires de x doivent s'évanouir dans les équations des degrés pairs. Si p désigne le degré de l'équation, $-m^p - n^p$ sera le dernier terme commun à toutes ces équations. De plus dans les équations paires ce dernier terme doit contenir encore la quantité $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$. Les termes de ces équations, si on en excepte m^p & n^p qui ont toujours le signe $-$, ont alternativement les signes $+$ & moins; c'est pourquoi dans les équations paires $2m^{\frac{p}{2}}n^{\frac{p}{2}}$ doit avoir le signe $+$ (nous regardons cette quantité comme le coefficient de x^0), si p est un nombre pairement pair, c'est-à-dire, de cette série 4, 8, 12, 16 &c., & le signe $-$ si p est impairement pair, c'est-à-dire, de cette série 2, 6, 10, 14 &c. Dans les coefficiens on trouve successivement mn, m^2n^2, m^3n^3, &c., mn est toujours multiplié par l'exposant p; & pour trouver les nombres

qui multiplient $m^2 n^2$, $m^3 n^3$, &c., je suppose $x = m + n$, & j'ai $x^2 - 2mn - m^2 - n^2 = 0$, dont une des racines $= m + n$, & l'autre $= - m - n$; & joignant ici l'équation du troisiéme degré (88), je forme la table suivante.

	mn	m^2n^2	m^3n^3	m^4n^4	m^5n^5	m^6n^6	m^7n^7
II	2	.	.	.	.	.	.
III	3	.	.	.	.	.	.
IV	4	2	.	.	.	.	.
V	5	5	.	.	.	.	.
VI	6	9	2	.	.	.	.
VII	7	14	7	.	.	.	.
VIII	8	20	16	2	.	.	.
IX	9	27	30	9	.	.	.
X	10	35	50	25	2	.	.
XI	11	44	77	55	11	.	.
XII	12	54	112	105	36	2	.
XIII	13	65	156	182	91	13	.
XIV	14	77	210	294	196	49	2

Dans le premier rang horisontal je place mn, $m^2 n^2$, &c. La premiere colonne verticale en chiffres romains désigne le degré de l'équation, & les nombres situés sous mn, $m^2 n^2$, &c. sont les nombres cherchés, sans omettre 2, qui, dans les équations paires, doit être multiplié par $m^{\frac{p}{2}} n^{\frac{p}{2}} x^0$. On voit que la colonne qui répond à mn est une progression arithmétique, dont la différence $= 1$, ainsi on pourra la continuer à volonté, Chaque nombre de la colonne $m^2 n^2$ est la somme de celui qui est au-dessus de lui dans cette même colonne, & de celui qui lui est superieur de deux places dans la colonne de la gauche; & il en est de même pour les autres colonnes. Par cette table prolongée autant qu'on le voudra, on trouvera l'équation de chaque degré qui contient une racine $x = m + n$: je l'appellerai la *résoluble* *.

* Par ce terme on n'entend pas qu'on puisse trouver toutes les racines de l'équation proposée, nous prétendons seulement qu'on peut en trouver au moins une par la méthode présente.

Toute équation, dont les termes de rang pair manqueront, excepté le dernier, & dont les coefficiens des termes existans seront proportionnels aux quantités $m\,n$, $m^2 n^2$, &c. multipliées par les nombres de la table ci-dessus, aura une racine semblable à la formule de *Cardan*.

Soit l'équation du quatriéme degré $x^4 \pm 4a x^2 + 2a^2 - b = 0$. La comparant à la résoluble, je trouve $m\,n = \mp a$, $m^4 + n^4 = b$. Substituant dans la seconde équation la valeur de n prise de la premiere, il vient $m^4 + \frac{a^4}{m^4} = b$, ou en multipliant par m^4 & transposant, $m^8 - b m^4 = - a^4$, équation qui, par la méthode du second degré, donne $m^4 = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b^2}{4} - a^4\right)}$; donc $m = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$. Si au lieu de substituer la valeur de n, on eût substitué celle de m, on auroit trouvé $n = \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$ *.

Si l'on multiplie les valeurs de m & de n par les racines quatriémes de l'unité trouvée ci-dessus (88), & qu'on joigne ensuite les résultats dont les produits peuvent donner $-a$, on aura celles qui conviennent, lorsque le signe superieur a lieu, & celles dont le produit des résultats donne $+a$, ont lieu dans le cas que l'équation contient $-4a$. C'est pourquoi les racines de l'équation $x^4 - 4ax^2 + 2a^2 - b = 0$, sont $x = +$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} + \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$x = -\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} - \sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)}$$

$$x = +\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a^4}\right)} \times (\sqrt{-1}) -$$

* On doit faire ici la même remarque que nous avons déja faite à l'occasion du signe du radical quarré de l'équation du troisiéme degré (88).

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1})$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times\sqrt{(-1)}+$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times\sqrt{(-1)}$$; & les racines de l'équation $x^4+4axx+2a^2-b=0$ seront

$$x=+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}+\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$$

$$x=+\sqrt[4]{\left(\frac{b^2}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1})+$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\times(\sqrt{-1}).$$

$$x=-\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\cdot\sqrt{(-1)}-$$

$$\sqrt[4]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}\cdot\sqrt{(-1)}.$$

Soit maintenant l'équation du cinquiéme degré $x^5-5ax^3+5a^2x-b=0$, la comparant avec la résoluble, on a $mn=a$, $m^5+n^5=b$. Substituant successivement dans la seconde équation la valeur de m & de n prise dans la premiere, l'on trouvera $m=\sqrt[5]{\left(\frac{b}{2}+\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$, & $n=\sqrt[5]{\left(\frac{b}{2}-\sqrt{\frac{b^2}{4}-a^4}\right)}$. Mais les racines cinquiémes

quiémes de l'unité qu'on trouve en résolvant cette équation $x^5 - 1 = 0$ *, sont 1, $\frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}}{4}$, $\frac{+\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}}{4}$; ainsi en multipliant la valeur de m & celle de n par chacune de ces racines, & prenant ensuite celles dont le produit donne $+a$, l'on aura les racines cherchées; & faisant la valeur de m que nous venons de trouver $= A$, celle de $n = B$, nous trouverons les équations suivantes:

$$x = A + B$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}] + B[-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[-\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}] + B[-\sqrt{5} - 1 + \sqrt{(-10 + 2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5} - 1 + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}] + B[\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}]}{4}$$

$$x = \frac{A[\sqrt{5} - 1 - \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}] + B[\sqrt{5} - 1 + \sqrt{(-10 - 2\sqrt{5})}]}{4}$$

Par ces exemples on peut voir comment il faut s'y prendre pour les degrés supérieurs. Dans les équations impaires $x^p - pax^{p-2}$ &c. $-b = 0$, nous trouverons toujours une racine $x =$

$$\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)} + \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

dans laquelle les signes radicaux expriment les racines qui répondent à la racine 1 de l'unité *. Dans les équations de degré pair qui

* Cette équation a une racine $x = 1$; car elle est divisible par $x - 1 = 0$, & le quotient donne une équation du quatriéme degré qui fait trouver les autres racines.

* Dans une équation impaire $x^p - 1 = 0$; il y a toujours une racine $x = 1$; car en supposant $x = 1$, elle devient $= 0$. Mais si p est pair l'équation est divisible par $(x - 1).(x + 1) = 0$, ou par $x^2 - 1 = 0$, donc alors on a $x = \pm 1$.

ont le second terme négatif, comme $x_p - p a x^{p-2}$ &c. $- b = 0$,

on a deux racines $x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$

$$\pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

Si le second terme a le signe $+$, on a ces deux racines

$$x = \pm \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$$

$$\mp \sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}.$$

Dans ces formules les signes supérieurs répondent à l'une des racines, & les inférieurs à l'autre.

On peut remarquer que p étant pair, $-a^p$ est toujours une quantité négative; mais p étant impair, cette quantité sera négative si a est positif, & positive si a est négatif. Pour connoître les autres racines, il faut trouver les racines du degré p de l'unité, c'est-à-dire, résoudre l'équation $x^p - 1 = 0$, multiplier par chacune de ces racines, soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$, soit $\sqrt[p]{\left(\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{bb}{4} - a^p}\right)}$, & joindre ensuite celles dont le produit $= + a$, si p est impair; mais p étant pair, on joindra celles qui donnent $-a$, si le second terme a le signe $+$, & celles qui donnent $+a$, si le second terme a le signe $-$.

DE L'INFINI.

91. Une quantité *infinie* est une quantité plus grande qu'aucune quantité donnée, c'est-à-dire, une quantité qu'on conçoit être augmentée au-delà

de toute limite assignable (en nombres). Une quantité *infiniment petite*, est une quantité plus petite qu'aucune quantité donnée, ou une quantité qu'on conçoit diminuée au-delà de toute limite assignable. La premiere est désignée par ∞, la seconde par $\frac{1}{\infty}$. Si l'on multiplie ∞ par ∞, l'on aura ∞^2, infini du second ordre, & multipliant celui-ci par ∞, l'on a ∞^3, infini du troisiéme ordre; en général ∞^m est un infini de l'ordre *m*. De même $\frac{1}{\infty} \times \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^2}$ est un infiniment petit du second ordre, & $\frac{1}{\infty^m}$ est un infiniment petit de l'ordre *m*. L'infini du premier ordre ∞ contient le fini une infinité de fois; mais il est lui-même contenu une infinité de fois dans l'infini du second ordre, & celui-ci l'est une infinité de fois dans l'infini du troisiéme : en général, l'infini de l'ordre *m* contient une infinité de fois l'infini de l'ordre $m-1$; & est contenu autant de fois dans l'infini de l'ordre $m+1$, & l'infini ∞^{m+n} contient l'infini *m* autant de fois qu'il est désigné par ∞^n, comme cela est évident en divisant ∞^{m+n} par ∞^n, ce qui se fait en ôtant l'exposant du diviseur de celui du dividende. Le fini contient l'infiniment petit du premier ordre une infinité de fois, & celui-ci contient l'infiniment petit du second ordre aussi une infinité de fois. En général, l'infiniment petit de l'ordre *m* contient l'infiniment petit de l'ordre $m+n$ un nombre de fois désigné par ∞^n : car en divisant $\frac{1}{\infty^m}$ par $\frac{1}{\infty^{m+n}}$, l'on aura (par la regle de la division des fractions) $\frac{\infty^{m+n}}{\infty^m} = \infty^n$.

L'infini $a\infty^m$ est à $b\infty^m$ comme $a : b$, c'est-à-dire, que deux infinis du même ordre peuvent être entr'eux comme deux quantités finies *a* & *b*.

De même $\frac{a}{\infty^m} : \frac{b}{\infty^m} :: a:b$; c'eſt-à-dire, que la même choſe a lieu pour les infiniment petits du même ordre. Deux quantités finies, qui ne différent que d'un infiniment petit, ſont cenſées égales : car leur différence étant inaſſignable & plus petite qu'aucune quantité donnée, doit être cenſée nulle ; donc $a \pm \frac{1}{\infty} : a :: a : a$, c'eſt-à-dire, en raiſon d'égalité. De même un infiniment petit du ſecond ordre étant infiniment plus petit que celui du premier, deux infiniment petits du premier ordre, qui ne différent entr'eux que d'un infiniment petit du ſecond ordre ou du troiſiéme, &c. ſont cenſés être en raiſon d'égalité. De même $a\,\infty^m : \infty^m \pm b :: a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m}$ (en diviſant par ∞^m) ; or $\frac{b}{\infty^m}$ eſt un infiniment petit de l'ordre m ; donc, ſelon ce que nous venons de dire, l'on a $a : 1 \pm \frac{b}{\infty^m} :: a : 1$, c'eſt-à-dire, qu'un infini eſt à un autre infini du même ordre (& c'eſt la même choſe ſi les ordres des infiniment grands ſont différents) plus ou moins une quantité finie, dans le même rapport que ſi cette quantité finie ne s'y trouvoit pas. Mais cela n'a pas lieu dans le rapport arithmétique ; car le rapport arithmétique de $\infty + 3 \cdot \infty$ eſt $= \infty + 3 - \infty = 3$, ce qu'il eſt bon de remarquer ; donc on ne doit négliger les quantités finies devant les infinies que quand il s'agit d'un rapport géométrique, & non arithmétique. De même dans le rapport arithmétique on ne doit pas négliger un infini devant un autre infini d'un ordre ſupérieur ; ainſi $\infty^3 + \infty^2 : \infty^3 :: \frac{\infty^3 + \infty^2}{\infty^3} : \frac{\infty^3}{\infty^3}$ $:: 1 + \frac{1}{\infty^1} : 1 :: 1 : 1$. Mais le rapport arithmétique

de $\infty^3 + \infty^2$ à ∞^3 eſt $= \infty^3 + \infty^2 - \infty^3 = \infty^2$.

REMARQUE I. Il eſt de la nature de toute quantité, d'être ſuſceptible d'augmentation ou de diminution; ainſi l'on ne doit pas dire que l'infini eſt une quantité qui a reçu tous ſes accroiſſements finis poſſibles, autrement l'infini ne ſeroit pas une quantité. D'ailleurs nous concevons qu'une quantité quelconque deviendra plus grande, en lui ajoutant une autre quantité ſi petite qu'elle ſoit.

REMARQUE II. En regardant o comme une quantité infiniment petite, l'on aura $\frac{1}{0} = \infty$, & $0 = \frac{1}{\infty}$; mais on ne doit pas regarder o comme un pur rien, ſans quoi l'on n'auroit pas $\frac{1}{0} = \infty$, comme le prétend M. *Euler*. En effet, puiſque pour avoir un quotient, il faut une quantité qu'on appelle *le dividende*, qui contienne une quantité qu'on nomme *le diviſeur*, & que ces quantités ſoient de même nature, il eſt évident que le quotient de 1 diviſé par o n'eſt pas une quantité, parce que o n'eſt pas une quantité. Voyez ce que nous avons dit ſur cette matiere dans la ſeconde édition de nos Inſtitutions Mathématiques.

Des Séries ou Suites.

92. On entend par *ſérie*, une ſuite de termes qui croiſſent ou décroiſſent ſelon une certaine loi (nous ne parlons pas ici des ſuites dont les termes ne ſuivent aucune loi) : telles ſont *les progreſſions géométriques & arithmétiques, les ſuites des nombres figurés.*

Nombres figurés		
	Conſtans ou du premier ordre,	1, 1, 1, 1, 1 &c.
	Naturels ou du ſecond ordre,	1, 2, 3, 4, 5 &c.
	Triangulaires ou du troiſiéme ordre,	1, 3, 6, 10, 15 &c.
	Piramidaux ou du quatriéme ordre,	1, 4, 10, 20, 35 &c.
	Trianguli-Pyramidaux ou du cinquiéme ordre,	1, 5, 15, 35, 70 &c.
	&c.	

La loi de chacune de ces suites des nombres figurés, est que chacun de leurs termes soit la somme des termes correspondans de la précédente; ainsi le troisiéme terme 6 de la troisiéme suite est la somme des trois premiers de la seconde.

Les nombres *polygones* sont formés par la somme des termes consécutifs d'une progression arithmétique, & ces nombres s'appellent *triangulaires*, *quarrés*, *pentagones*, &c. selon que la différence de la progression est 1, ou 2, ou 3, &c.

Progressions Arithmétiques.

1, 2, 3, 4, &c.	Différences 1
1, 3, 5, 7, &c.	2.
1, 4, 7, 10, &c.	3
1, 5, 9, 13, &c.	4.
&c.	

Nombres Polygones.

1, 3, 6, 10, &c.	Triangulaires*.
1, 4, 9, 16, &c.	Quarrés.
1, 5, 12, 22, &c.	Pentagones.
1, 6, 15, 28, &c.	Exagones.
&c.	

En examinant avec un peu d'attention les nombres figurés, il est visible qu'en désignant par n le

* Les nombres triangulaires ont cette propriété qu'on peut disposer en triangle autant de points qu'ils contiennent d'unités, en prenant un point pour le plus petit triangle; de même les points indiqués par les nombres quarrés peuvent être disposés en quarré, en prenant un point pour le plus petit quarré, &c. On pourra mieux comprendre cela, quand on aura vu dans la Géométrie ce que c'est qu'un triangle, un quarré, &c.

1 3 6 10 &c.

1 4 9 &c.

rang du nombre naturel, ce nombre sera $= n$; ainsi le nombre naturel du cinquiéme rang est 5. On trouvera aussi que le nombre triangulaire du rang n est $= \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. S'il s'agit du nombre triangulaire du rang 4, on aura $n = 4$, & ce nombre sera $= \frac{4 \cdot (4+1)}{2} = \frac{4 \cdot (5)}{2} = \frac{20}{2} = 10$. Le nombre pyramidal du rang n est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{2 \cdot 3}$. Le nombre figuré du cinquiéme ordre du rang n est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{2 \cdot 3 \cdot 4}$. Le nombre figuré du sixiéme ordre est $= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) \cdot (n+4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$, & ainsi de suite.

A l'égard des nombres polygones, si n indique le rang du nombre, on aura le nombre triangulaire $= \frac{nn+n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$.

Le quarré $= \frac{2nn}{2} = nn$.

Le pentagone ou V gone $= \frac{n \cdot (3n-1)}{2}$.

L'exagone ou VI gone $= \frac{n \cdot (4n-2)}{2}$.

Le VII gone $= \frac{n \cdot (5n-3)}{2}$.

Le VIII gone $= \frac{n \cdot (6n-4)}{2}$.

Le IX gone $= \frac{n \cdot (7n-5)}{2}$.

Le X gone $= \frac{n(8n-6)}{2} = n \cdot (4n-3)$.

Le XI gone $= \frac{n \cdot (9n-7)}{2}$.

Le XII gone $= \frac{n \cdot (10n-8)}{2} = n \cdot (5n-4)$.

Le XX gone $= \frac{n(18n-16)}{2} = n(9n-8)$.

Et en général le m gone $= \frac{(m-2) \cdot nn - (m-4) \cdot n}{2}$.

Nous appellerons *côté* le nombre n ou le rang du nombre polygone ; & nous dirons aussi que le nombre m gone de n ou du côté n est $= \frac{(m-2) \cdot nn - (m-4) \cdot n}{2}$.

PROBLEME. *On demande à un Financier combien lui coûte une terre qu'il vient d'acheter : il répond que le nombre 365 gone de 12 est le nombre de louis qu'elle lui coûte.* Pour trouver ce nombre, on supposera $m = 365$ & $n = 12$, & substituant ces valeurs dans la formule générale, on trouvera que la terre a été achetée 23970 louis.

Nous venons de voir comment on doit déterminer les nombres polygones, en désignant par n le côté du polygone ; donc si on désignoit ce côté, qu'on appelle aussi *une racine*, par x, il suffiroit d'écrire x au lieu de n dans les formules ci-dessus ; de sorte que l'on auroit le nombre m gone $= \frac{(m-2)xx - (m-4) \cdot x}{2}$.

Si connoissant le nombre m gone, on demande la racine, ou le côté, on aura besoin de résoudre

une équation du second degré. Supposons qu'on cherche la racine ou le côté x du nombre triangulaire 91. En substituant x à la place de n, nous aurons $\frac{xx+x}{2} = 91$, ou $xx + x = 182$, & $x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{729}{4}} = 13$.

Soit a un nombre m gone donné, dont il s'agit de déterminer la racine, on aura l'équation $\frac{(m-2) \cdot xx - (m-4) x}{2} = a$, ou $(m-2) xx - (m-4) \cdot x = 2a$, équation qui étant résolue par la méthode du second degré, donne $x = \frac{m-4+\sqrt{[8(m-2)a+(m-4)^2]}}{2 \cdot (m-2)}$.

Si l'on demandoit de trouver un nombre triangulaire qui fût en même temps un quarré, en désignant ce quarré par $\frac{pp}{4qq} \cdot xx$, nous aurions $\frac{xx+x}{2} = \frac{ppxx}{4qq}$, $xx + x = \frac{ppxx}{2qq}$, $2qqx + 2qq = ppx$, & $x = \frac{2qq}{pp - 2qq}$. Substituant donc dans cette formule des nombres quelconques à la place de q & de p, pourvu qu'il en résulte un nombre entier positif pour x (car nous supposons que les nombres trigonaux sont entiers & positifs), le problême sera résolu. Si $p = 3$ & $q = 2$, on aura $x = 8$, dont le nombre triangulaire qui est 36 est en même temps un quarré. Si nous supposons $p = 17$, & $q = 12$, nous trouverons $x = 288$ & le nom-

bre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$ ſera $= 144 \times 289$, dont la racine eſt $= 12 \times 17 = 204$.

Mais ſi étant donné un nombre quelconque x, on appelle ſon nombre trigonal $\frac{x(x+1)}{2}$; en prenant le nom de nombre trigonal dans ce ſens, x pourra être un nombre quelconque poſitif ou négatif, entier ou bien fractionnaire. Si nous faiſons $p = 7$ & $q = 5$, nous aurons $x = -50$, dont le triangle 1225 eſt en temps celui de $+ 49$ & le quarré de 35. Si $p = 3$ & $q = 1$, on aura $x = \frac{2}{7}$, & le nombre trigonal $\frac{xx+x}{2}$ eſt $= \frac{9}{49}$, quarré de $\frac{3}{7}$.

Les *ſuites des puiſſances des nombres* ſont celles des quarrés, cubes, &c. de la progreſſion des nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. On appelle *progreſſion harmonique*, la ſuite des quotients d'un même nombre diviſé par les termes conſécutifs d'une progreſſion arithmétique : telle eſt la ſérie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, &c. *.

On appelle *ſéries du premier ordre*, celles dont les premieres différences ſont conſtantes : telles ſont les progreſſions arithmétiques. *Les ſéries du ſecond ordre* ſont celles dont les ſecondes différences ſont conſtantes : *celles du troiſiéme*, *quatriéme*, &c. *ordre* ſont celles dont les troiſiémes, quatriémes, &c. différences ſont conſtantes. Les ſéries

* Parce que ſi on prend trois termes conſécutifs dans une telle ſuite, ils ſont en proportion harmonique.

dans lesquelles on peut arriver à des différences constantes, sont appellées *algébriques*. Si l'on multiplie les termes d'une série algébrique, par les termes correspondants d'une série géométrique (c'est-à-dire, le premier de l'une par le premier de l'autre, le second par le second, &c.), l'on a une série *algébrique-géométrique*. Les *séries récurrentes* sont celles dans lesquelles chaque terme est déterminé par un certain nombre de termes précédents multipliés par des constantes. On les appelle *récurrentes du premier, du second, du troisiéme, &c. ordre*, selon que, pour avoir un terme, on a besoin d'un seul terme précédent, ou de deux, ou de trois, &c. Ainsi la série 1, 1, 3, 7, 17, &c. est récurrente du second ordre, parce que chaque terme, à compter du troisiéme, est égal à la somme des deux précédens multipliés le premier par 1, & l'autre (c'est celui qui précéde immédiatement le terme cherché) par 2 *.

Cherchons maintenant la somme des puissances des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5 ... ∞.

93. LEMME. *Dans une progression arithmétique* $\div$ a. b. c. e. &c. *dont la différence* $= 1$, *en premier lieu le quarré d'un terme quelconque est égal au quarré du premier terme, plus au double de la somme des termes précédents, plus au nombre des termes précédents. En second lieu le cube d'un terme quelconque est égal à la somme faite, 1° du cube du premier terme, 2° du triple de la somme des quarrés*

* Pour former une suite récurrente du second ordre, ayant pris les deux premiers termes à volonté, on multipliera le premier par *a* & le second par *b*, la somme des produits donnera le troisiéme. Multipliant le second par *a* & le troisiéme par *b*, la somme des produits donnera le quatriéme; & ainsi de suite.

des termes précédents, 3° du triple de la somme des termes précédents, & enfin du nombre des termes précédents. Car la progression $\div a \cdot b \cdot c \cdot$ &c. est $= \div a \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot$ &c.; donc $c = b + 1$, $c^2 = b^2 + 2b + 1$; & parce que $b = a + 1$, l'on a $b^2 = a^2 + 2a + 1$; donc en substituant, $c^2 = a^2 + 2b + 1$; donc 1°, &c. de même

$$+ 2a + 1$$

$c^3 = b^3 + 3b^2 + 3b + 1$, $b^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$; donc en substituant cette valeur de b^3 dans l'équation précédente, l'on aura

$$c^3 = a^3 + 3b^2 + 3b + 1 \text{; donc } 2^\circ\text{, \&c.}$$
$$+ 3a^2 + 3a + 1$$

94. THÉOREME. 1°. *La somme de la progression* 1, 1, 1, &c. *à l'infini est* $= \infty$. 2°. *La somme* S *des nombres naturels continuée à l'infini* $1, 2, 3, 4, 5 \cdots \infty$ est $= \frac{\infty^2}{2}$. 3°. *La somme* p *des quarrés* 1, 4, 9, 16, $25 \cdots \infty^2$ *des nombres naturels est un infiniment grand du troisiéme ordre, c'est-à-dire*, $p = \frac{\infty^3}{3}$. La premiere partie du théorême est évidente; car l'unité prise une infinité de fois, donne une quantité plus grande qu'aucune quantité assignable. La seconde partie se démontre facilement : car par le lemme précédent, le quarré du terme ∞ est $\infty^2 = 1$ (quarré du premier terme) $+ 2S - 2\infty$ (c'est-à-dire, plus le double de la somme des termes précédents, laquelle somme $= S - \infty$) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précédents); donc réduisant & transposant, $\infty^2 + \infty = 2S$, ou (selon le n°. 91)

$\infty^2 = 2S$, ou $S = \frac{\infty^2}{2}$, en négligeant ∞ qui disparoît devant ∞^2. Pour démontrer la troisiéme partie, je remarque que par le lemme précédent, ∞^3 est $= 1$ (cube du premier terme) $+ 3p - 3\infty^2$ (triple de la somme des quarrés des termes précédents) $+ 3 \times \left(\frac{\infty^2}{2} - \infty\right)$ (triple de la somme des termes précédents) $+ \infty - 1$ (nombre des termes précédents); donc réduisant & transposant, $\infty^3 + 3\infty^2 - 3\frac{\infty^2}{2} + 2\infty = 3p$; donc (en négligeant les infinis des ordres inférieurs (91)) $\infty^3 = 3p$, & $p = \frac{\infty^3}{3}$; donc, &c. En général la somme des puissances m des nombres naturels 1, 2, 3 à l'infini est $= \frac{\infty^{m+1}}{m+1}$.

95. Dans la suite la lettre x désignera le nombre des termes. Le *terme général* d'une suite (nous le désignerons par T) est une fonction de x, dans laquelle, si on substitue successivement à la place de x les nombres 1, 2, 3, &c., on obtiendra tous les termes de la série. Ainsi la série 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37, &c. a pour terme général $6x - 5$. Si dans ce terme général nous substituons 3, *par exemple*, au lieu de x, nous aurons le troisiéme terme 13. Le *terme sommatoire* S d'une série est une fonction de x, dans laquelle, si à la place de x on substitue un nombre entier positif, on aura la somme d'autant de termes que ce nombre contient d'unités. Le terme sommatoire de la série, dont nous venons de parler, étant $3x^2 - 2x$, si on substitue 7 à la place de x, on aura 133, somme des 7 premiers termes de la série. En supposant la série continuée à l'infini, la somme devient $S = 3\infty^2 - 2\infty = 3\infty^2$ (91). Il seroit à souhaiter qu'étant donné le terme général d'une série, on pût

trouver le terme sommatoire correspondant : mais il y a peu d'apparence que ce problême général soit jamais résolu ; c'est pourquoi il est à propos de chercher des formules générales par lesquelles on puisse déterminer la somme de plusieurs séries par leur terme général.

96. THEOREME. *Dans une série quelconque le terme général est égal à la somme de tous les termes jusqu'à* x *inclusivement, moins la somme de tous les termes jusqu'à* x — 1 *inclusivement*. La chose est évidente ; car ce qui reste doit être égal au terme du rang x. De ce théorême si simple, il suit qu'en appellant S la somme de tous les termes pris jusqu'à x, & S′ celle de tous les termes pris jusqu'à $x - 1$ inclusivement, on aura le terme général $T = S - S'$ *, mais il faut pour cela que S exprime la vraie somme, ce qu'on connoîtra si en faisant $x = 1$, on trouve S = T. Si alors $S = T - a$ **, T sera $= S + a$ (vraie somme) ; au contraire il faudra ôter a de S si T est plus petit que S, c'est-à-dire, si $T + a = S$, & l'on aura $T = S - a$ (vraie somme) ; ainsi quoique $\frac{6x - 3}{2} = \frac{3x^2 - 1}{2} - \left(\frac{3 \cdot (x-1)^2 - 1}{2}\right)$, cependant la série dont le terme général est $\frac{6x - 3}{2}$ n'a pas pour terme sommatoire $\frac{3x^2 - 1}{2}$, qui, en faisant $x = 1$, devient $\frac{2}{2} = 1$, tandis que le terme général $\frac{6x^3 - 3}{2}$, devient $\frac{3}{2}$; donc le terme général surpasse alors S de $\frac{1}{2}$; donc $S + a = S + \frac{1}{2} = \frac{3x^2 - 1 + \frac{1}{2}}{2} = \frac{3x^2}{2}$, véritable terme sommatoire de la série dont le terme général est $T = \frac{6x - 3}{2}$.

Mais il faut bien remarquer que $T = S - S'$ exprime deux séries, dont le terme général de l'une = S, & celui

* On voit bien que pour avoir T, il faut avoir S ou la somme des termes exprimée par une fonction de x, autrement T ne seroit pas exprimé par une fonction de x.

** a est une quantité constante.

de l'autre $= S'$. En formant ces deux séries on verra que le premier terme de la premiere détruit le second de la seconde, le second de la premiere, le troisiéme de la seconde, &c. ; & alors comme il ne reste rien que la différence du dernier de la premiere au premier de la seconde, la méthode de trouver T exposée ci-dessus devient inutile. Soit $S = \frac{x}{2+x}$, alors $S' = \frac{x-1}{1+x}$, & $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right)$.

En formant les séries dont S & S' sont les termes généraux & retranchant celle qui répond à S', de celle qui répond à S, l'on a $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right) = \frac{x}{2}$

$$\left.\begin{array}{l} (S)\ \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6} \dots + \frac{x-1}{1+x}, \frac{x}{2+x} \\ -(S')\ \frac{-0}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{5} \dots - \left(\frac{x-1}{1+x}\right) \end{array}\right\} = \frac{x}{2+x} - \frac{0}{2} = \frac{x}{2+x};$$

c'est-à-dire, qu'après avoir retranché les termes de la série S' (si ces termes n'étoient pas retranchés, ils auroient le signe +) de ceux de la série S, il reste le terme général de la série S, ce qui ne donne rien à connoître. Ainsi la méthode du théorême ne peut réussir, tandis que le terme général aura la forme dont nous venons de parler. Il faut donc tâcher de donner une autre forme à $T = S - S'$.

Si on réduit au même dénominateur la valeur de $T = S - S' = \frac{x}{2+x} - \left(\frac{x-1}{1+x}\right)$, on aura $S - S' = \frac{2}{(1+x)\cdot(2+x)} = T$, & la série correspondante sera $\frac{2}{2\cdot 3}, \frac{2}{3\cdot 4}, \frac{2}{4\cdot 5}, \frac{2}{5\cdot 6}$, &c. dont le terme sommatoire sera $\frac{x}{2+x}$. Si $x = \infty$, le terme sommatoire S de cette série deviendra $S = \frac{\infty}{\infty} = 1$.

97. Pour faire l'application de ce que nous venons de dire, cherchons quelles sont les séries dont le terme sommatoire contient x dans tous ses termes. Qu'on demande, *par exemple*,

quelle est la série dont le terme sommatoire est $= ax$, a étant une quantité constante. Ecrivant $x - 1$ au lieu de x, j'ai $S' = ax - a$, & $T = S - S' = a$; donc tous les termes sont égaux à a, & la série est a, a, a, a, dont la somme $S = ax$*.

Je cherche ensuite quelles sont les séries pour lesquelles on a $S = ax + bx^2$. Substituant $x - 1$ au lieu de x, je trouve $S' = ax - a + bx^2 - 2bx + b$, & $S - S' = T = (a - b + 2bx)$. De ce terme général je forme les deux séries $\begin{matrix} a, a, a, a, \&c. \\ b, 3b, 5b, 7b, \&c. \end{matrix}$ L'une de ces séries est la suite des quantités égales, la seconde est une progression arithmétique, dont les termes croissent comme les nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c. Et enfin la série qui résulte de ces deux séries, ajoutées terme à terme, est une progression arithmétique, dont la différence est $= 2b$. Donc si le terme général d'une série contient seulement x linéaire, c'est-à-dire, x élevé à la premiere puissance, on déterminera facilement le terme sommatoire S, en faisant $= a - b$ le terme qui ne contient pas x, & le coefficient de $x = 2b$. *Par exemple*, supposant $T = 15 + 3x$, je fais $15 = a - b$, & $3 = 2b$; donc $b = \frac{3}{2}$ & $a = 15 + \frac{3}{2} = \frac{33}{2}$; ainsi $S = ax + bx^2 = \frac{33x + 3x^2}{2}$.

98. Si l'on a une série telle que 3, 7, 11, &c. dont les premieres différences soient constantes, on trouvera facilement le terme T & le terme S. Car supposant le premier terme 3 de cette série $= (a - b + 2bx)$ en faisant $x = 1$; supposant ensuite le second terme $7 = (a - b + 2bx)$, en faisant $x = 2$, l'on aura $3 = a + b$, & $7 = a + 3b$. Retranchant la premiere équation de la seconde, il vient $7 - 3$ ou $4 = 2b$, & $b = 2$. Substituant cette valeur de b dans la premiere, l'on trouve $a = 1$; donc $T = S - S' = (a - b + 2bx) = -1 + 4x$, & $S = ax + bx^2 = x + 2x^2$.

Si l'on suppose $S = ax + bx^2 + cx^3$; en substituant $x - 1$ au lieu de x, S se changera en S', & l'on aura

* C'est-à-dire, si x est $= 5$, *par exemple*, la somme des 5 premiers termes sera $5a$, ce qui est évident.

T =

$$T = S - S' = \left(\begin{matrix} a & & \\ -b & +2bx & \\ +c & & +3cx^2 \\ & -3cx & \end{matrix}\right)$$

. De ce terme général je forme une série que je divise en trois; la premiere est composée de termes égaux ; la seconde est celle des quantités qui suivent la progression des nombres impairs 1, 3, 5, 7, &c.; la troisiéme est une série, dont les secondes différences sont constantes & égales à $6c$, laquelle propriété convient nécessairement à la série totale qui résulte de ces trois ajoutées terme à terme.

a, a, a, a, &c.
$b, 3b, 5b, 7b$, &c.
$c, 7c, 19c, 37c$, &c.

De-là il suit qu'étant donné le terme général $T = 1 - x + x^2$ pour trouver le terme sommatoire S de la série à laquelle appartient ce terme général, il faut faire $1 = a - b + c$, $-1 = 2b - 3c$, $1 = 3c$ *. De la derniere équation l'on tire $c = \frac{1}{3}$. Substituant cette valeur dans les deux autres, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3}$, $-1 = 2b - 1$. La derniere donne $b = 0$; donc en substituant, l'on a $1 = a - b + \frac{1}{3} = a - 0 + \frac{1}{3}$, ou $a = \frac{2}{3}$. Substituant les valeurs de a, b, c dans la valeur générale de S, l'on a $S = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3$, terme sommatoire de la série, dont le terme général est $T = (1 - x + x^2)$.

COROLLAIRE. Il suit de-là qu'on peut facilement déterminer soit S, soit T dans une série dont les différences secondes sont constantes. Car par la comparaison de trois termes on pourra connoître a, b, c; qui feront connoître T & S. Soit la série 9, 13, 21, 33, 49, &c. dont les secondes différences sont constantes & égales à 4. Comparant le premier terme 9 avec le terme général dans la supposition de $x = 1$, le second terme 13 avec le même terme général dans la supposition de $x = 2$, & enfin le troisiéme terme 21 avec le terme général dans la supposition de $x = 3$, on trouvera trois équations, que j'appellerai *du premier ordre*. Otant la premiere de la seconde, & celle-ci de la troisiéme, l'on aura deux équations *du second ordre* : ôtant enfin la premiere des secondes de la seconde, l'on a une équation que j'appelle *du troisiéme ordre*.

* C'est-à-dire qu'il faut égaler les quantités constantes qui se trouvent dans le terme général donné, & dans la formule du terme général donnée ci dessus ; l'on égale de même les coefficients d'une même puissance de x.

Equations du premier ordre.	*Equations du second ordre.*	*Equations du troisiéme ordre.*
$9 = a + b + c$ $13 = a + 3b + 7c$ $21 = a + 5b + 19c$	$4 = 2b + 6c$ $8 = 2b + 12c$	$4 = 6c.$

De l'équation $4 = 6c$, l'on tire $c = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Cette valeur de c substituée dans la premiere du second ordre, donne $b = 0$; substituant les valeurs de c & de b dans la premiere du premier ordre, l'on a l'équation $a = 8 + \frac{1}{3}$; donc $T = 9 - 2x + 2x^2$, & $S = (8 + \frac{1}{3})x + \frac{2}{3}x^3$.

On trouvera de même que le terme sommatoire S étant $ax + bx^2 + cx^2 + dx^4$, le terme général sera

$$S - S' = T = \left(\begin{array}{l} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \end{array}\right).$$

De ce terme général l'on pourra former une série, dont les troisiémes différences seront constantes. Par la même méthode, si $S = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + fx^5$, on aura

$$T = \left(\begin{array}{l} a \\ -b + 2bx \\ +c - 3cx + 3cx^2 \\ -d + 4dx - 6dx^2 + 4dx^3 \\ +f - 5fx + 10fx^2 - 10fx^3 + 5fx^4 \end{array}\right).$$

De ce terme général on peut former une série dont les quatriémes différences soient constantes.

COROLLAIRE II. De ce que nous venons de dire, il suit 1°. qu'une série, dont les différences de l'ordre m sont constantes, a pour terme général une formule *, dans laquelle x est élevé à la puissance m, & pour terme sommatoire une formule

---

* Cette formule est $T = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \cdots + px^m$. En faisant $= a$ toutes les quantités constantes, toutes les quantités qui multiplient x étant $= b$, &c.

dans laquelle x a l'exposant $m + 1$, & de plus tous les termes de S sont affectés de quelque puissance de x. 2°. Que pour trouver le terme T d'une série, dont les différences d'un ordre quelconque sont constantes, il suffit, ayant fait successivement $x = 1, 2, 3, 4$, &c., de comparer autant de premiers termes de la série qu'il y a d'unités dans $m + 1$ (si la série est de l'ordre m *) avec la formule générale qui convient à cette série, d'où l'on tirera les équations nécessaires pour déterminer a, b, c, &c.

EXEMPLE. La série 2, 9, 24, 50, 90, &c. ayant ses troisiémes différences constantes, je prends la formule du troisiéme degré $a + bx + cx^2 + dx^3$. Faisant successivement $x = 1, 2, 3, 4$; j'ai quatre équations du premier ordre.

Equations du premier ordre.	*Equations du second ordre.*
$a + b + c + d = 2$	$b + 3c + 7d = 7$
$a + 2b + 4c + 8d = 9$	$b + 5c + 19d = 15$
$a + 3b + 9c + 27d = 24$	$b + 7c + 37d = 26$
$a + 4b + 16c + 64d = 90$	

Equations du troisiéme ordre.	*Equation du quatriéme ordre.*
$2c + 12d = 8$	$6d = 3$
$2c + 18d = 11$	

Retranchant la premiere équation du premier ordre de la seconde, celle-ci de la troisiéme, &c. j'ai les équations du second ordre qui, en retranchant la premiere de la seconde, & celle-ci de la troisiéme, donnent les équations du troisiéme ordre. Retranchant la premiere du troisiéme ordre de la seconde, j'ai l'équation du quatriéme ordre $6d = 3$, d'où je tire $d = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Substituant cette valeur de d dans la premiere du troisiéme ordre, l'on trouve $c = 1$. Substituant ces valeurs de d & de c dans la premiere du second ordre, l'on a $b = \frac{1}{2}$. Substituant ces valeurs de b, c, d dans la premiere du premier ordre, l'on trouve $a = 0$; donc $T = a + bx + cx^2 + dx^3 = \frac{1}{2}x + x^2 + \frac{1}{2}x^3$. Je suppose $S = Ax + Bx^2$

* C'est-à-dire si les différences de l'ordre m sont constantes.

$+ Cx^3 + Dx^4$. Dont le terme général est

$$S - S' = T = \left(\begin{array}{l} A \\ -B + 2Bx \\ +C - 3Cx + 3Cx^2 \\ -D + 4Dx - 6Dx^2 + 4Dx^3 \end{array}\right).$$

La comparaison des termes donne les équations suivantes :

$A - B + C - D = 0$
$2B - 3C + 4D = \frac{1}{2}$
$3C - 6D = 1$
$4D = \frac{1}{2}$

d'où l'on tire $D = \frac{1}{8}$, $C = \frac{7}{12}$, $B = \frac{7}{8}$, $A = \frac{1}{12}$. Substituant ces valeurs dans S, on a $S = \frac{1}{12}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{7}{12}x^3 + \frac{1}{8}x^4$.

On voit par-là qu'on peut toujours déterminer S & T dans une série, dans laquelle on peut parvenir à des différences constantes.

99. Venons aux séries dans lesquelles S est une fraction dont les deux termes sont affectés d'une même puissance de x. Soit $S = \frac{fx}{a + bx}$. Ecrivant $x - 1$ au lieu de x, l'on a S', & retranchant S' de S, il vient $S - S' = T = \frac{fx}{a + bx} - \left(\frac{fx - f}{a + b \cdot (x - 1)}\right) = \frac{af}{[a + b \cdot (x - 1)](a + bx)}$, en réduisant les fractions au même dénominateur. Si de ce terme général on forme une série, son terme sommatoire sera $S = \frac{fx}{a + bx}$. Mais la série que donne le terme général que nous venons de trouver, est $\frac{af}{a \cdot (a + b)}$, $\frac{af}{(a + b) \cdot (a + 2b)}$, $\frac{af}{(a + 2b) \cdot (a + 3b)}$, &c. Or il est visible que les diviseurs forment les deux séries que l'on voit ici.

a, $a + b$, $a + 2b$, &c.
$a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, &c.

dans lesquelles le premier terme de la seconde est égal au second de la premiere, le second de la seconde au troisiéme de la premiere, & le dernier de la premiere à l'avant dernier de la seconde. La différence dans les deux séries est $= b$. Si dans S on fait $x = \infty$, l'on aura $S = \frac{f}{b}$. Soit la série $\frac{6}{2 \cdot 7}$, $\frac{6}{7 \cdot 12}$, $\frac{6}{12 \cdot 17}$, $\frac{6}{17 \cdot 22}$, &c. ; le

numérateur de ces fractions étant constant, & les séries $\frac{2,\ 7,\ 12,\ 17}{7,\ 12,\ 17,\ 22}$ &c. que forment les diviseurs étant les mêmes, excepté que l'une commence au second terme de l'autre, il est facile de voir qu'elle appartient à notre formule générale. La comparaison fait voir que $b=5$ & $a=2$. Pour trouver f comme l'on a l'équation $af=6$, ou (à cause de $a=2$) $2f=6$, il est visible que $f=\frac{6}{2}=3$; donc $S=\frac{fx}{a+bx}=\frac{3x}{2+5x}$; & à l'infini $S=\frac{3}{5}$.

Soit maintenant $S=\frac{fx+mx^2}{[a+b(x-1)].(a+bx)}$. Substituant $x-1$ à la place de x, l'on aura S', & $S-S'=$

$$T=\frac{\begin{matrix}af-bfx\\-am-bmx\\+2amx\end{matrix}}{[a+b.(x-2)]\,[a+b.(x-1)].(a+bx)}.$$

Dans cette formule le numérateur est le terme général d'une série du premier ordre, pourvu que le coefficient de x ne soit pas $=0$: car dans ce cas le numérateur seroit le terme général d'une suite de quantités égales. Les facteurs du diviseur représentent chacun une série du premier ordre & de plus la même, avec cette différence que la seconde commence au second terme de la premiere, & la troisiéme au troisiéme terme de la premiere.

Soit la série $\frac{4}{2.3.4.2}, \frac{7}{3.4.5}, \frac{10}{4.5.6}, \frac{13}{5.6.7}$, &c. Le terme général de la série des numérateurs est $T=1+3x$; & les séries des deux premiers facteurs du dénominateur sont dans le cas dont nous venons de parler. Le terme général de la série que forment les troisiémes facteurs est $a+bx=3+x$; de sorte que $a=3$, $b=1$. Substituant ces valeurs de a & de b dans le terme général qui convient à notre série, on en déduira $3f+3m=1$, $-f-m+6m=3$; d'où l'on tirera $m=\frac{2}{2.3}$, $f=\frac{7}{2.3}$; donc $S=\frac{7x+5x^2}{2.3.(2+x).(3+x)}$, & $S=\frac{5}{6}$, en faisant $x=\infty$.

Si le numérateur du terme général T étoit divisible par un des facteurs extrêmes, la division étant faite, il appartiendroit à l'avant derniere formule. Mais si le facteur moyen manquoit, il faudroit multiplier le numérateur & le dénominateur par ce

facteur, afin que le terme général pût se trouver dans le cas de la formule que nous venons de trouver.

Soit maintenant $S = \frac{fx + mx^2 + nx^3}{[a+b\cdot(x-2)]\cdot[a+b\cdot(x-1)]\cdot(a+bx)}$. On trouvera de même le terme T correspondant, dont les facteurs du dénominateur seront des termes généraux de quatre séries qui ne seront qu'une & même série, avec cette différence que la seconde aura pour premier terme le second de la premiere, la troisiéme le 3e, & la quatriéme le 4e; & x ne montera qu'au second degré dans le numérateur de T; si quelque facteur manque dans le dénominateur, du terme général, on multipliera les deux termes de la fraction par le facteur qui manque, &c. *.

100. Passons aux séries dans lesquelles le terme sommatoire renferme une quantité constante multipliée par une quantité exponentielle **. Soit $S = al^x - a$. Substituant $x - 1$ au lieu de x, on a $S' = al^{x-1} - a = \frac{al^x - la}{l}$; donc $S - S' = T = \frac{a(l-1)l^x}{l}$. Si l'on suppose $x = 1$, l'on aura $S = T$. Il est aisé de voir que le terme T désigne une progression ...métrique, dont par conséquent on peut toujours trouver la somme S. Si $l > 1$, la série est croissante; & faisant $x = \infty$, S sera aussi infinie. Si $l = 1$, alors, $T = 0$ & $S = 0$; si $l < 1$, la série est décroissante, & alors supposant $x = \infty$, on auroit $al^\infty - a$, quantité négative. Pour rendre S positive, il faut supposer $S = a - al^x$, & $T = \frac{a(1-l)l^x}{l}$; & alors en supposant $x = \infty$, l'on a $S = a$.

Soit maintenant $S = (a+bx)\cdot l^x - a$. On trouvera $S - S' = T = \frac{[a(l-1)+b+bx\cdot(l-1)]\cdot l^x}{l}$. Si $l < 1$, il

* Si le plus grand exposant de x dans le numérateur de T n'étoit pas plus petit de deux unités que le nombre des facteurs du dénominateur, on verroit si l'on peut le rendre tel par la division, & l'on chercheroit à part le terme S du quotient, qu'on joindroit avec le terme S de la fraction, la somme donneroit le terme sommatoire cherché.

** Une quantité *exponentielle* est une quantité affectée d'un exposant variable, comme a^x qui devient a^2, en supposant $x = 2$, & a^3 en faisant $x = 3$.

faut changer tous les signes, soit dans T, soit dans S, afin d'éviter les quantités négatives.

De même si $S = (a + bx + cx^2) \cdot l^x - a$, T sera

$$= \frac{\left(\begin{array}{lll} al & +blx & +clx^2 \\ -a & -bx & \\ +b & +2cx & -cx^2 \\ -c & & \end{array}\right)}{l} \times l^x.$$

Si $l < 1$, on changera les signes dans S & dans T. On voit par-là qu'une série dont la somme est exprimée par une formule algébrique, multipliée par une quantité exponentielle, & dont on ôte une constante, a pour terme général une formule algébrique du même degré, & multipliée par la même exponentielle.

Supposons *le terme général* d'une série $= (1 + x + x^2) \cdot (2^x)$. Je fais $S = (a + bx + cx^2) \cdot 2^x - a$. Substituant $x - 1$ à la place de x, pour avoir S', l'on aura $S - S' = T$

$$= \frac{\left(\begin{array}{lll} a & +bx & +cx^2 \\ -a & & \\ +b & -bx & \\ -c & +2cx & -cx^2 \end{array}\right)}{2} \cdot 2^x.$$

La comparaison me donne $a + \frac{-a + b - c}{2} = 1$, $b - \frac{b + 2c}{2} = 1$, $c - \frac{c}{2} = 1$; donc $c = 2$, $b = -2$, $a = 6$; donc $S = (6 - 2x + 2x^2) \times 2^x - 6$. Si l'on avoit $T = (\frac{1}{3} + \frac{1}{2}x + x^2) \cdot \left(\frac{1}{2^x}\right)$; parce que la quantité exponentielle est plus petite que l'unité, je supposerois $S = a - \left((a + bx + cx^2) \times \frac{1}{2^x}\right)$. Ensuite je trouverois facilement S', & $S - S' = T$, & par comparaison les valeurs de a, b, c, d'où je tirerois $S = \frac{22}{3} - \left((\frac{22}{3} + \frac{9}{2}x + x^2) \cdot \frac{1}{2^x}\right) = \frac{22}{3}$, en faisant $x = \infty$.

Les séries qui sont représentées par les termes généraux de la forme dont nous venons de parler, sont algébrico-géométriques.

De ce que nous avons dit jusqu'ici, il suit qu'on peut trouver la somme d'une série quelconque qui résulte de l'addition ou de la soustraction des séries, soit géométriques, soit algébrico-géométriques : car on peut trouver le terme général de chacune des séries qu'on ajoute ou qu'on soustrait, & le

terme général de la somme ou de la différence, sera égal à la somme ou à la différence des termes généraux de ces séries, ce qu'on doit entendre de même du terme sommatoire. Mais il n'est pas facile de connoître si une série proposée a été formée par l'addition ou par la soustraction des séries géométriques ou algébrico-géométriques; or je dis que les séries récurrentes sont de ce genre. Pour le prouver:

101. Soit $T = a l^x$, d'où l'on tire la série géométrique $a l$, $a l^2$, $a l^3$, &c. dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par la constante l: ainsi c'est une série récurrente du premier ordre. Si l'on fait $x - l = 0$, il est évident que l sera la racine de cette équation. Pour trouver a, lorsqu'on connoît l, il suffit, en supposant $x = 1$, de comparer le premier terme de la série donnée avec $a l$. Soit, *par exemple*, la série récurrente du premier ordre 6, 4, $2\frac{2}{3}$, $1\frac{7}{9}$, $\frac{5}{27}$, $\frac{64}{81}$, &c. qui, ayant supposé le premier terme $= 6$, se forme en multipliant chaque terme par $\frac{2}{3}$. Donc $l = \frac{2}{3}$, & $T = a\left(\frac{2}{3}\right)^x$. Supposant $x = 1$, l'on a $6 = \frac{2}{3} a$, & $a = 9$; donc $T = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2^x}{3^{x-2}}$.

Soit maintenant $T = a l^x + b f^x$, d'où l'on tire une série composée des deux suivantes $\left.\begin{matrix} a l, a l^2, a l^3, \text{\&c.} \\ b f, b f^2, b f^3, \text{\&c.} \end{matrix}\right\}$. La série qui résulte de ces deux ajoutées terme à terme, est une série récurrente du second ordre; car chaque terme de cette série se trouve en multipliant le second (c'est celui qui précède immédiatement celui qu'on cherche) par $l + f$, & le premier (c'est celui qui précède le second) par $- l f$. En effet en multipliant $a l^{x-1} + b f^{x-1}$ par $l + f$, & $a l^{x-2} + b f^{x-2}$ par $- l f$, la somme de ses deux produits donne $a l^x + b f^x$, terme suivant (on regarde cette quantité comme un seul terme). Soit supposé $l + f = h$, $- f l = i$; donc $h^2 = l^2 + 2 l f + f^2$. En ajoutant $4i$ au premier membre, & $- 4 f l$ au second, on aura $h^2 + 4 i = l^2 - 2 l f + f^2$, & $\sqrt{(h^2 + 4 i)} = l - f$; donc $h + \sqrt{(h^2 + 4 i)} = 2 l$, $\frac{h + \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = l$, & $\frac{h - \sqrt{(h^2 + 4 i)}}{2} = f$. Ces valeurs de l & de f sont les racines de l'équation $x^2 - h x - i = 0$; car $f l = - i$, & $l + f = h$*. l & f étant une fois

* Dans une équation du second degré le dernier terme est le produit des racines; l'on sait aussi que la somme des racines prises avec un signe contraire donne le coefficient du second terme d'une équation.

connues, pour déterminer a & b, il suffit de supposer le premier terme de la série $= al + bf$, & le second $= al^2 + bf^2$. Si l'on suppose $i = -1$, $h = 3$, & les deux premiers termes de la série 3, 2, pour avoir la série récurrente du second ordre 3, 2, 3, 7, 18, 47, 123, &c. on trouvera $l = \frac{h + \sqrt{(h^2 + 4i)}}{2} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, & $f = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (racines de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$). Pour avoir a & b, on fera $a \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 3$, $a \cdot \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5}{4} + b \cdot \frac{9 - 6\sqrt{5} + 5}{4} = 2$, ou $a \cdot \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} + b \cdot \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2} = 2$. De la premiere équation multipliée par 3, retranchant la derniere, on tire $a + b = 7$, cette valeur étant substituée dans la premiere, donne $\frac{1}{2} \cdot 7 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot (a - b) = 3$; donc $a - b = \frac{-15}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{5}$. Ajoutant cette derniere équation à l'avant-derniere, & l'en retranchant ensuite, l'on trouve $a = \frac{7 - 3\sqrt{5}}{2}$, & $b = \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2}$; donc $T = \frac{(7 - 3\sqrt{5})}{2} \times \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^x + \frac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \times \frac{(3 - \sqrt{5})^x}{2^x}$. Si $h^2 = -4i$, alors les racines de l'équation $x^2 - hx - i = 0$ sont égales; & dans ce cas la méthode précédente conduit à une équation, ou identique, ou absurde. Ainsi si l'on suppose $h = 3$, $i = \frac{-9}{4}$, & les deux premiers termes de la série 1, 1, pour avoir la série récurrente 1, 1, $\frac{3}{4}$, 0, $\frac{-27}{16}$, $\frac{-81}{16}$ &c. vous trouverez $l = f = \frac{3}{2}$. C'est pourquoi T devroit être $= a\left(\frac{3}{2}\right)^x + b\left(\frac{3}{2}\right)^x$, & supposant $x = 1$, & ensuite $= 2$, l'on auroit $\frac{3}{2} \cdot (a + b) = 1$, $\frac{9}{4} \cdot (a + b) = 1$, d'où l'on tireroit $\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$, & $12 = 18$, ce qui est absurde. Nous dirons bien-tôt comment il faut s'y prendre dans ce cas pour avoir T.

Si $T = al^x + bf^x + cg^x$, il en naîtra une série récurrente du troisiéme ordre, en multipliant les trois termes antécédens à commencer par le dernier (le dernier est celui qui précéde immédiatement celui qu'on cherche) l'un par $l + f + g$, le second par $-lf - lg - fg$, & le troisiéme par lfg: com-

me il eſt aiſé de le voir en multipliant les trois termes $a l^{x-1} + b f^{x-1} + c g^{x-1}$, $a l^{x-2} + b f^{x-2} + c g^{x-2}$, $a l^{x-3} + b f^{x-3} + c g^{x-3}$, de la maniere que nous venons de le dire ; car l'on aura, en prenant la ſomme des produits, le terme ſuivant $a l^{x} + b f^{x} + c g^{x}$.

Si le terme général d'une ſérie eſt composé de l'addition de pluſieurs quantités de cette forme $a l^{x}$, la ſérie ſe formera en multipliant autant de termes antécédens, qu'il y a de termes dans T, & commençant la multiplication par le dernier, en multipliant, dis-je, par la ſomme de toutes les quantités exponentielles l, f, &c., l'avant dernier par la ſomme des produits de ces quantités priſes deux à deux ; mais laquelle ſomme doit être priſe négativement, le terme qui précéde celui-ci par la ſomme des produits des mêmes quantités priſes trois à trois, le terme qui précéde immédiatement celui dont nous venons de parler, par la ſomme négative de ces mêmes quantités priſes quatre à quatre ; & ainſi de ſuite.

Suppoſant le premier multiplicateur $= t$, le ſecond $= s$, le troiſiéme $= r$, le quatriéme $= q$, &c. il eſt évident que l'équation $x^{m} - l x^{m-1} + l f x^{m-2} - \&c. = 0$, a pour raci-
— &c. + &c. — &c.
nes l, f, &c. * C'eſt pourquoi l'équation $x^{m} - t x^{m-1} - s x^{m-2} - r x^{m-3} - \&c. = 0$, qui réſulte de la premiere, aura pour racines l, f, g &c. ; dans cette équation m doit être égal au nombre des termes antécédens néceſſaires pour former la ſérie. Ayant trouvé les racines de cette équation, le terme général aura la forme $a l^{x} + b f^{x} + c g^{x}$ &c. Pour déterminer a, b, c, &c. comparez ce terme général aux m premiers termes de la ſérie, cette comparaiſon fera connoître a, b, c, &c.

Pour en donner un exemple, ſoit la ſérie 0, 0, 1, 1, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{21}{16}$, $\frac{21}{16}$, $\frac{85}{64}$ &c. qui, (en ſuppoſant les trois premiers termes 0, 0, 1), ſe forme en multipliant les trois premiers termes, à commencer par le dernier, par 1, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{4}$. C'eſt pourquoi l'équation qui doit donner l, f, g, ſera $x^{3} - x^{2} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} = 0$*, dont les racines ſont 1, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; donc le ter-

---

* On ſait que le coefficient du ſecond terme d'une équation, dont le premier terme n'a d'autre coefficient que l'unité eſt égal à la ſomme des racines priſes avec un ſigne contraire, que le coefficient du troiſiéme terme eſt égal à la ſomme des produits des racines multipliées deux à deux, &c.

me général sera $a \cdot 1^x + b \cdot \frac{1}{2^x} + c \cdot \frac{(-1)^x}{2^x}$. Supposant successivement $x = 1, 2, 3$, & comparant ce terme général dans ces différentes suppositions avec les trois premiers termes de la série, l'on aura $a + \frac{b}{2} - \frac{c}{2} = 0$, $a + \frac{b}{4} + \frac{c}{4} = 0$, $a + \frac{b}{8} - \frac{c}{8} = 1$. Retranchant successivement la premiere équation de la seconde & de la troisiéme, on aura $-\frac{b}{4} + \frac{3c}{4} = 0$, $-\frac{3b}{8} + \frac{3c}{8} = 1$; d'où l'on tire aisément $b = -4$, & $c = -\frac{4}{3}$. Ces valeurs substituées dans la premiere donnent $a - 2 + \frac{2}{3} = 0$, ou $a = \frac{4}{3}$; donc le terme général sera $\frac{4}{3} - \frac{4}{2^x} - \frac{4}{3} \frac{(-1)^x}{2^x}$ $= \frac{4}{3} - \frac{1}{2^{x-2}} - \frac{(-1)^x}{3 \cdot 2^{x-2}}$.

202. Nous venons de voir quelles séries récurrentes se forment par l'assemblage des séries géométriques, parlons maintenant des séries algébrico-géométriques. Soit le terme général $T = (a + bx)\, l^x$, duquel on peut former la série $(a+b)l$, $(a + 2b)\, l^2$, $(a + 3b)\, l^3$, &c. En multipliant deux termes antécédens quelconques $[a + b \cdot (x - 1)] \cdot l^{x-1}$, $[a + b \cdot (x - 2)] \cdot l^{x-2}$, le dernier par $2l$, & le précédent par $-l^2$. Le terme suivant $(a + bx)\, l^x$ sera la somme des deux produits; donc cette série est récurrente. Si l'on fait $2l = h$, & $-l^2 = i$, il est évident que $4i$ sera $= -h^2$, & que l'équation $x^2 - hx - i = 0$ a deux racines égales, ce qui donne le cas (101) qui exclut le terme général de la forme $al^x + bf^x$, ici $l = \frac{h}{2}$.

Soit la série 0, 1, 4, 12, 32, 120 &c. qui (en supposant les deux premiers termes 0, 1), se forme en multipliant les deux termes antécédens, le dernier par 4, & l'autre par -4. Parce que $h = 4$, & $i = -4$, on aura $4i = -h^2$; l'équation $xx - hx - i = 0$ aura deux racines égales, & l'on trouvera $l = 2$. Donc le terme général sera $(a + bx)\, 2^x$. Fai-

* Nous avons ici $m = 2$, $s = 1$, $f = -\frac{1}{4}$, $r = -\frac{[illegible]}{4}$, & l'on peut remarquer que r est le coefficient de $x^0 = 1$.

ſant $x = 1$, & enſuite $x = 2$, l'on aura en comparant ſucceſſivement le terme général avec les deux premiers termes de la ſérie, $2a + 2b = 0$, $4a + 8b = 1$; donc $b = \frac{1}{4}$, $a = -\frac{1}{4}$. C'eſt pourquoi $T = \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{4}\right) 2^x = (x-1) \cdot 2^{x-2}$.

Si l'on ſuppoſe $T = (a + bx + cx^2) l^x$, la ſérie qui en naîtra ſera récurrente du troiſiéme ordre. On la formera en multipliant trois termes antécédens (en commençant par le dernier) par $3l$, $-3l^2$, l^3. En général ſi $T = (a + bx + cx^2 + dx^3 + \&c.) l^x$, de maniere que le nombre des termes du multiplicateur de l^x ſoit $= m$, & le plus grand expoſant de x (dans ce multiplicateur) $= m - 1$, il en réſultera une ſérie récurrente de l'ordre m, en multipliant m termes antécédens, le dernier par ml, l'avant dernier par $-\frac{m \cdot (m-1)}{2} \cdot l^2$, celui qui précéde par $\frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{2 \cdot 3} \times l^3$ &c., en donnant alternativement les ſignes $+$ & $-$ à ces multiplicateurs. Si l'on fait l'équation $x^m - mlx^{m-1} \frac{m \cdot (m-1)}{2} \times l^2 x^{m-2}$ &c. $= 0$, qui a toutes ſes racines égales à l, & ſi l'on appelle $t, ſ, r, p$ &c. les multiplicateurs des termes antécédens, à commencer par le dernier, on aura l'équation $x^m - tx^{m-1} - ſx^{m-2} - rx^{m-3}$ &c. qui eſt la même que nous avons déja trouvée (101). C'eſt pourquoi toutes les fois que cette équation aura toutes ſes racines égales, T aura la forme dont nous venons de parler, & les quantités a, b, c, &c. ſe trouveront par la même méthode, c'eſt-à-dire, par la comparaiſon du terme général avec les m premiers termes de la ſérie.

Soit la ſérie $0, 0, 0, 1, 2, 2\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 2\frac{3}{16}, 1\frac{3}{4}$, &c. qui (ayant ſuppoſé les quatre premiers termes $0, 0, 0, 1$) ſe forme en multipliant quatre termes antécédens, à commencer par le dernier, par $2, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{16}$. On aura l'équation $x^4 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$, dont les quatre racines ſont toutes $= \frac{1}{2}$; c'eſt pourquoi T ſera de cette forme $(a + bx + cx^2 + dx^3) \cdot \frac{1}{2^x}$; & faiſant enſuite ſucceſſivement $x = 1, 2, 3, 4$, on trouvera quatre équations d'où l'on tirera $a = -16$, $b = \frac{88}{3}$, $c = -16$, $d = \frac{8}{3}$; ainſi $T = (-16 + \frac{88}{3}x - 16x^2 + \frac{8}{3}x^3) \frac{1}{2^x}$. Mais ſi l'équation avoit des ra-

cines en partie égales & en partie inégales, T résulteroit de l'assemblage des séries, dont les unes seroient géométriques, & les autres algébrico-géométriques, & par conséquent T seroit composé des quantités, dont les unes seroient de la forme présente, & les autres de la forme ci dessus (101).

Soit, *par exemple*, la série 0, 3, — 2, 23, — 14, 87, — 90, 303 &c. qu'on forme en multipliant cinq termes antécédens, à commencer par le dernier, par 0, 4, — 2, — 3, 2. Dans ce cas l'équation générale sera $x^5 * - 4x^3 + 2x^2 + 3x - 2 = 0$, (on a mis * à la place du second terme qui manque). Les racines de cette équation sont 1, 1, 1, — 1, — 2; trois sont égales & deux inégales. Donc T aura cette forme $(a + bx + cx^2)\, 1^x + d \cdot (-1)^x + e \cdot (-2)^x$. Ayant fait successivement $x = 1, 2, 3, 4, 5$, on comparera T avec les cinq premiers termes de la série; & les cinq équations que l'on tirera de cette comparaison donneront $a = 1$, $b = -2$, $c = 1$, $d = -2$, $e = 1$; c'est pourquoi $T = 1 - 2x + x^2 - 2(-1)^x + 1 \cdot (-2)^x$.

De ce que nous avons dit sur les séries récurrentes, l'on doit conclure que ces séries ont pour terme général des formules exponentielles multipliées ou par des constantes, ou par des fonctions rationelles & entieres de x; & parce que nous avons donné la méthode de trouver le terme sommatoire S des séries qui ont T de cette forme, il s'ensuit qu'on peut trouver soit le terme général, soit le terme sommatoire de toutes les séries récurrentes.

103. Il y a une autre espece de séries récurrentes qui different de celles dont nous venons de parler, en ce qu'elles se forment d'un certain nombre de termes antécédens, multipliés par des quantités constantes, en ajoutant de plus à leur somme une quantité constante, positive, ou négative, que nous appellerons l'*Ajoutée*, en nommant les séries dont il est ici question, *séries récurrentes composées*.

Etant donnée la série 0, 1, 1, 2, 4, 9, 21, 50 &c. Pour trouver un terme de cette série, les deux précédens étant donnés, multipliez le dernier par 2 & le premier par 1, ajoutez — 1 à la somme des produits, le résultat donnera le terme cherché. Soit une série récurrente composée du premier ordre, dont le premier terme $= a$, la quantité par laquelle on doit multiplier chaque terme pour avoir le suivant étant $= t$, & l'a-

joutée $= z$. Nous aurons la série récurrente, composée du premier ordre qu'on voit ici.

$$\begin{array}{l} a, at, at^2, at^3 \ldots\ldots at^{x-1} \\ z, zt, zt^2 \ldots\ldots zt^{x-2} \\ z, zt^2 \ldots\ldots zt^{x-3} \\ z \ldots\ldots zt^{x-4} \\ \vdots \\ zt^2 \\ zt \\ z \end{array}$$

Si l'on multiplie le premier terme par t, & qu'on lui ajoute z, on aura le second terme $= at + z$; & multipliant celui-ci par t, & ajoutant z, l'on aura le troisiéme, & ainsi de suite; de sorte que la somme des termes de chaque colonne représente un seul terme, & la derniere colonne à droite représente le terme général T, en supposant que x représente le nombre des termes. Les séries horisontales sont récurrentes simples du premier ordre, & à compter de la seconde toutes sont la même série, excepté que le nombre de leurs termes n'est pas le même. Le terme général résulte du terme at^{x-1}, & d'une série récurrente simple du premier ordre z, zt, zt^2 &c. dans laquelle le nombre des termes est $= x - 1$, où il faut remarquer que z répond non à $x = 1$, mais à $x = 2$. Si $t = 1$, le terme sommatoire S de cette série sera $a + (x - 1)z$. Si t n'est pas $= 1$, la série z, $zt \ldots zt^{x-2}$ sera une série géométrique dans laquelle $S = \frac{zt^{x-1} - z}{t - 1}$, & le terme général de toute la série sera $T = at^{x-1} + \frac{zt^{x-1} - z}{t - 1} = \frac{at^x + (z - a)t^{x-1} - z}{t - 1}$ (on suppose t plus grand que 1, autrement l'on n'auroit pas $S = \frac{zt^{x-1} - z}{t - 1}$*).

Soit la série 2, 3, 7, 15, 31 &c. dans laquelle chaque terme est égal au précédent multiplié par 2, en ajoutant $- 1$; l'on aura le terme général $= 2^x - 1$.

* Si t est supposé $= 1$, l'on aura $S = \frac{z - z}{0} = \frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien. Si $t < 1$, la valeur de S se trouvera comme nous l'avons dit en parlant des progressions géométriques, en multipliant le plus grand terme par le dénominateur du quotient qui regne dans la progression, retranchant le plus petit terme du produit, & divisant le reste par ce dénominateur diminué de l'unité; mais alors il faut renverser la progression, afin qu'elle aille en croissant.

Si l'on a la ſérie 2, 3, 6, 15 &c. qu'on forme en multipliant le terme précédent par 3, & ajoutant — 3. Le terme général deviendra $\frac{2 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{x-1} + 3}{2} = 3^x - \frac{5}{2} \cdot 3^{x-1} + \frac{3}{2} = \left(3 - \frac{5}{2}\right) 3^{x-1} + \frac{3}{2} = \left(\frac{1}{2}\right) 3^{x-1} + \frac{3}{2} = \frac{3^{x-1} + 3}{2}$.

Soit maintenant la ſérie récurrente compoſée du ſecond ordre, repréſentée par les ſéries que l'on voit ici. a eſt le premier terme, b le ſecond avec l'ajoutée z. Pour avoir le troiſiéme on multiplie a par $ſ$, & b par t, leur ſomme eſt ſuppoſée $= p$; & multipliant par t l'ajoutée z qui eſt ſous b, on ajoutera tz à p pour avoir $p + tz$, & ajoutant z à cette ſomme, on aura le troiſiéme terme $(p + tz + z)$. Pour avoir le quatriéme terme, on multiplie b par $ſ$, & p par t; & faiſant la ſomme de cés produits $= p'$, on multiplie z par $ſ$ & tz par t, & l'on fait la ſomme $= q$, on multiplie auſſi le z du troiſiéme terme par t, & l'on ajoute encore z & l'on a le quatriéme terme, &c. Il faut avoir ſoin de faire $= p'$, p'' &c. les termes que donne la premiere ſérie horiſontale. On fera $= q$, q', q'' &c. les termes que donnent les autres ſéries horiſontales, & l'on aura la formule ci-deſſus.

$$
\begin{array}{llllll}
a, & b, & p, & p', & p'', & p''' \\
 & z, & tz, & q, & q', & q'' \\
 & & z, & tz, & q, & q' \\
 & & & z, & tz, & q \\
 & & & & z, & tz \\
 & & & & & z
\end{array}
$$

Il eſt viſible que les ſéries horiſontales ſont récurrentes du ſecond ordre, & qu'on les forme en multipliant deux termes antécédens, le dernier par t & l'autre par $ſ$. Les deux premiers termes de la premiere ſérie ſont a & b, ceux de la ſeconde z & tz. Le nombre des termes de la ſeconde eſt $x - 1$ celui de la troiſiéme $x - 2$ &c. & celui de la premiere x. Le premier de la ſeconde répond à $x = 2$, le premier de la troiſiéme à $x = 3$ &c.

Selon ce que nous avons vu ci-deſſus, le terme général de ces ſéries dépend de la réſolution de l'équation $x^2 - tx - ſ = 0$ *, dont les racines ſont $x = \frac{t}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{t^2}{4} + ſ\right)}$, que nous ſuppoſerons $= h$ & $= K$. Si ces racines ſont inégales, le terme général de la premiere ſérie horiſontale eſt de cette forme $AK^x + Bh^x$ (101). On déterminera A & B en faiſant ſucceſſivement

* Ici nous appellons t & $ſ$ les quantités que nous avons déſignées (101) par h & i.

$x = 1, 2$, & comparant le terme général de la série dans ces différentes suppositions, avec les deux premiers termes de la série proposée. Les termes généraux de la seconde, troisiéme, &c. séries horisontales sont de cette forme $CK^{x-1} + Dh^{x-2}$, $fK^{x-2} + Gh^{x-2}$ &c. Pour déterminer A & B, on aura les deux équations $AK + Bh = a$, $AK^2 + Bh^2 = b$. Multipliant la premiere par h, & la retranchant ensuite de la seconde, l'on en tirera $A = \frac{b - ah}{K(K-h)}$. Multipliant la premiere par K pour en retrancher ensuite la seconde, l'on aura $B = \frac{aK - b}{h(K-h)}$. Par une méthode semblable on trouvera $C = \zeta \frac{(t-h)}{K(K-h)}$, & $D = \zeta \cdot \frac{(K-t)}{h(K-h)}$. Ce qui étant bien compris, il est évident que le terme général d'une pareille série est de la forme suivante :

$$AK^x + CK^{x-1} + CK^{x-2} + CK^{x-3} \ldots\ldots CK.$$
$$Bh^x + Dh^{x-1} + Dh^2 + Dh^{x-} \ldots\ldots\ldots Dh.$$

où les quantités A, B, C, D, sont déterminées. Et le terme général $T = AK^x + Bh^x + \begin{pmatrix} CK, CK^2 \ldots CK^{x-1} \\ Dh, Dh^2 \ldots Dh^{x-1} \end{pmatrix}$ (P). Dans les dernieres séries le premier terme se trouve en faisant $x = 2$; & la somme de ces dernieres séries est $S = \frac{CK^x - CK}{K-1} + \frac{Dh^x - Dh}{h-1}$, donc le terme général sera $T = AK^x + \frac{CK^x - CK}{K-1} + Bh^x + \frac{Dh^x - Dh}{h-1} = \frac{AK^{x+1} + (C-A)K^x - CK}{K-1} + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{h-1}$.

Si on suppose $K = 1$ la premiere des dernieres séries sera une suite de quantités égales, & le terme sommatoire de cette série sera $S = (x-1) \times C$; donc le terme général deviendra

$$T = A + x \cdot C - C + \frac{Bh^{x+1} + (D-B)h^x - Dh}{-1}.$$

Supposons maintenant $K = h$; dans ce cas le terme général de la premiere série horisontale aura la forme $(A + Bx) K^x$ (102).

(102). Les quantités A & B se déterminent par les premiers termes de la série : les termes généraux des autres séries seront pour la seconde $T = [C + (x-1) \cdot D] K^{x-1}$; pour la troisiéme T sera de cette forme $[C + (x-2) \cdot D] K^{x-2}$, &c. Par les deux premiers termes de la premiere série, l'on trouvera $A = \frac{2aK - b}{K^2}$, $B = \frac{b - aK}{K^2}$. Par les deux premiers termes de la seconde série, l'on aura $C = z \times \frac{2K - t}{K^2}$, $D = z \cdot \frac{(t - K)}{K^2}$; & T sera $= (A + Bx) \cdot K^x + [C + (x-1) \cdot D] K^{x-1} + [C + (x-2) \cdot D] K^{x-2} \ldots + (C + D) K = (A + Bx) \cdot K^x + \left[(C + D) \cdot K + (C + 2D) \cdot K^2 + (C + 3D) \cdot K^3 \cdots + [C + (x-1) \cdot D] \cdot K^{x-1}\right]$. Or la derniere partie est évidemment une série récurrente simple du second ordre, dont on peut facilement trouver la somme S. Si $K = h = 1$, on aura facilement la somme S. Si K n'est pas $= 1$, cette série sera algébrico-géométrique, & la somme S se trouvera par la méthode ci-dessus (102).

EXEMPLE. Soit la série o, $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 2$, &c. qui, en supposant les deux premiers termes o, 1 se forme en faisant le multiplicateur $t = 0$, le multiplicateur $s = 1$, & l'ajoutée $z = \frac{1}{2}$. C'est pourquoi $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$. L'équation à résoudre est $x^2 - 1 = 0$, d'où l'on tire $x = \pm 1$; donc $K = 1$, & $h = -1$. Nous servant des formules qui conviennent à ce cas, nous trouverons $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$; & le terme $T = \frac{1}{4} + \frac{x-1}{4} + \frac{1}{4}(-1)^x + \frac{\left[-\frac{1}{4} \cdot (-1)^x - \frac{1}{4}\right]}{-2}$ * $= \frac{2x+1}{8} + \frac{1}{8} \cdot (-1)^x$.

104. On peut voir maintenant comment il faut s'y prendre pour avoir T dans les séries récurrentes composées des ordres

* Car dans ce cas $AK^x = \frac{1}{4}$, $Bh^x = \frac{1}{4}(-1)^x$. la somme de la série CK, CK², &c. est $S = (x-1) C = \frac{x-1}{4}$, & la somme de la série $Dh, Dh^2 \ldots Dh^{x-1}$ est $S = \frac{Dh^x - Dh}{-2} = \frac{-\frac{1}{4}(-1)^x - \frac{1}{4}}{-2}$; donc la formule P ci-dessus deviendra T = &c.

supérieurs ; & parce que le terme général de ce ces séries fait voir qu'elles sont composées de séries algébriques, ou géométriques, ou algébrico-géométriques, dont nous savons trouver le terme sommatoire, l'on peut sommer ces sortes de séries, pourvu qu'on puisse avoir les racines de l'équation qu'on doit résoudre pour avoir leur terme général.

Usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Equations.

105. LEMME. *Si l'on a une fraction dont le numerateur soit* $= 1$, *& le dénominateur un polynome, dont le premier terme soit aussi* $= 1$ *& dont les autres termes contiennent une inconnue élevée aux puissances* 1e, 2e, 3e, *&c. je dis que la valeur de cette fraction sera exprimée par une serie récurrente.*

Soit la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3}$, &c. Si l'on divise le numérateur par le premier terme du dénominateur, l'on aura 1 au quotient. Multipliant ce quotient par le divi-

$$\left.\begin{array}{l} 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 \\ \qquad\quad + bz^2 + 2abz^3 + \text{\&c.} \\ \qquad\qquad\qquad + cz^3 \end{array}\right\} B$$

seur & retranchant le produit du dividende, on aura un reste $az + bz^2 + cz^2 +$ &c. dont le premier terme étant divisé par le premier terme du même dénominateur, on trouve $+ az$ pour quotient. Multipliant encore ce diviseur par le quotient & retranchant le produit du premier reste, il vient $(a^2 + b)z^2 + (c + ab)z^3 +$ &c. Divisant $(a^2 + b)z^2$ par le premier terme 1 du même dénominateur, je trouve $a^2z^2 + bz^2$ pour quotient ; multipliant le diviseur par le quotient, retranchant le produit du dividende, & continuant d'opérer de même, en prenant toujours pour un seul terme la somme de tous ceux qui contiennent une même puissance de z, je trouverai tant de termes qu'il me plaira de la série B, qui, si elle est convergente, donnera la valeur de la fraction proposée, du moins par approximation. Mais si elle est divergente, il faudra faire la division en prenant le dénominateur dans un ordre renversé $- cz^3 - bz^2 - az + 1$, & la série qui en résultera sera convergente.

Si quelqu'un des termes qui suivent le premier manquoit dans le dénominateur, on supposeroit son coefficient $= 0$: Ainsi si le terme $- bz^2$ manquoit, on feroit $b = 0$.

Maintenant il eſt viſible que les coefficients de la ſérie B, joints au premier terme, forment une ſérie récurrente du troiſiéme ordre, dans laquelle les trois premiers termes ſeroient o + o + 1, & dont les termes ſuivants ſe trouvent par cette loi : on écrit dans un ordre renverſé & avec des ſignes contraires les coefficients des termes du dénominateur qui ſuivent le premier, pour avoir $c + b + a$. Multipliant le premier terme o par c, le ſecond + o par b, & le troiſiéme par a, l'on aura a pour le quatriéme terme (qu'on doit multiplier par z). Et continuant de même, on multipliera le ſecond terme + o par c, le troiſieme 1 par b, & le quatriéme par a, pour avoir le terme ſuivant $(a^2 + b)$, qu'on multipliera par z^2; & ainſi de ſuite.

Si le dénominateur étoit $1 - az - bz^2 - cz^3 - ez^4$, les quatre premiers termes de la ſérie étant ſuppoſés o + o + o + 1, on prendroit les coefficients $e + c + b + a$, & multipliant le premier terme o par e, le ſecond par c, le troiſiéme par b, le quatriéme par a, & continuant de même, il ſeroit aiſé de trouver la ſérie récurrente cherchée. Si la fraction étoit $\frac{1}{1 - az}$, *l'échelle de relation* (c'eſt-à-dire, les quantités par leſquelles on multiplie les termes antécédents pour avoir le terme ſuivant) ſeroit compoſée d'un ſeul terme $+ a$, & le premier terme de la ſérie étant ſuppoſée $= 1$, le ſuivant ſeroit $+ az$, le troiſiéme $+ a^2 z^2$, &c. de ſorte que la ſérie ſeroit $1 + az + a^2 z^2 + a^3 z^3 +$ &c. Cette ſérie devient $= 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} +$ &c. (D), en ſuppoſant $a = 2$, & $z = \frac{1}{3}$; de ſorte que la fraction $\frac{1}{1 - az}$, qui dans ce cas devient $\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{3-2} = 3$, eſt la limite de la ſérie D; de maniere que cette ſérie ne peut jamais ſurpaſſer 3, mais à l'infini elle eſt $= 3$.

Si l'on vouloit réduire en ſérie la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2}$, l'échelle de relation ſeroit $b + a$, & les deux premiers termes de la ſérie étant o + 1, on trouveroit le troiſiéme en mul-

tipliant o par b & 1 par a (& encore par z), &c. de maniere qu'en prenant toujours pour un seul terme tous ceux dans lesquels z se trouve avoir le même exposant, l'on auroit

$$\begin{aligned}1 + az + a^2z^2 &+ a^3z^3 + a^4z^4 + \&c.\\ + bz^2 &+ 2abz^3 + 3a^2bz^4 + \&c.\\ &+ b^2z^4 + \&c.\end{aligned}$$

Si $a = -3$, & $b = -2$, de maniere que $b + a$ soit $= -2 - 3$, si en même temps on suppose $z = \frac{1}{4}$, notre série deviendra $1 - \frac{3}{4} + \frac{7}{16} - \frac{15}{64} + \frac{31}{256}$ &c. qui sera la limite de la fraction $\frac{1}{1 + \frac{3}{4} + \frac{2}{8}} = \frac{8}{8+6+1} = \frac{8}{15}$. Mais si on supposoit $b = -2$, $a = -3$ & $z = 1$, la série deviendroit $1 - 3 + 7 - 15 + 31$ &c. qui s'éloigneroit d'autant plus de la véritable valeur de la fraction $\frac{1}{1+3+2} = \frac{1}{6}$ qu'on prendroit plus de termes.

Si on vouloit développer en série la fraction $\frac{A + Bz + Dz^5}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 - \&c.}$ on développeroit d'abord la fraction $\frac{1}{1 - az - bz^2 - cz^3 - dz^4 - \&c.}$ en une série récurrente par la méthode ci-dessus, & multipliant ensuite tous les termes de cette série par le numérateur $A + Bz + Dz^5$, le Problême seroit résolu. Si la fraction étoit de cette forme $\frac{A + Bz + \&c.}{p - qz - rz^2 \&c.}$ on diviseroit tous les termes du numérateur & du dénominateur par p, & l'on auroit $\frac{D + Ez + \&c.}{1 - az - bz \&c.}$, en faisant $\frac{A}{p} = D$, $\frac{B}{p} = E$, &c. $\frac{q}{p} = a$, $\frac{r}{p} = b$, &c. & ce cas rentreroit dans le précédent.

106. PROBLEME. *Etant donnée la fraction* $\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 \&c.}$ *de laquelle on ait formé une série récurrente, trouver une progression géométrique dont chaque*

terme soit positif & plus grand que le coefficient du terme correspondant de la série récurrente dont il s'agit, en le prenant même positivement, supposé qu'il fût négatif. Soit l'échelle de relation $c' + b' + a'$ dans laquelle nous prenons tous les termes positivement. Si quelqu'un de ces termes est plus petit que l'unité, s'il est négatif ou fractionnaire, comme si l'échelle étoit $-\frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{2}$, augmentez-les arbitrairement pour les rendre plus grands, entiers & positifs, de maniere que l'échelle devienne $1 + 1 + 2$, *par exemple*; prenez ensuite la somme de ces termes & formez une série dans laquelle chaque terme soit au suivant comme 1 est à cette somme, & le problême sera résolu.

Pour le faire voir, * soit $c + b + a$ la nouvelle échelle de relation substituée à la véritable $c' + b' + a'$, c', b' & a' étant pris affirmativement, c'est-à-dire, ayant seulement égard à leur grandeur & non au signe, nous aurons $a = a'$ ou $a' > a$, $b = b'$ ou $b > b'$, $c = c'$ ou $c > c'$. Supposons maintenant que la série récurrente, dont l'échelle de relation est $c + b + a$, soit $= p + qz + rz^2 + fz^3 + tz^4 +$ &c., la série ou progression géométrique, dont l'exposant est $c + b + a$, étant représentée par $P + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 +$ &c., & que P soit $= p = 1$.

Par la nature de ces séries, $Q = (c + b + a) P$, $q = ap$ *; donc Q est $> q$. De même $R = (c + b + a) Q$; $r = bp + aq$. Mais $bQ > bq > bp$, & $aQ > aq$; donc $R > r$. On a encore $S = (c + b + a) R$, & $f = cp + bq + ar$. Mais $cR > cr > cq > cp$, & $bR > br > bq$, tandis que $aR > ar$; donc aussi $S > f$. L'on prouveroit de même que $T > t$, & ainsi de suite.

Les termes de la série géométrique ci-dessus sont, à compter du second, plus grands que leurs correspondants dans la série récurrente dont nous venons de parler; or dans celle-ci les termes sont plus grands que dans celle dont l'échelle de relation seroit $c' + b' + a'$, ce qu'on peut prouver de la maniere suivante.

Si dans la série récurrente $p + qz + rz^2 + fz^3 +$ &c.

* Cette derniere équation résulte de ce que les trois premiers termes de la série récurrente doivent être supposés $0 + 0 + 1$, & qu'on doit trouver les coefficiens des autres en multipliant le premier par c, le second par b, & le troisiéme par a.

on met a' au lieu de a, b' à la place de b, & c' à la place de c, &c. ayant pris toutes ces quantités affirmativement, les coefficients q, r, s, t, u, &c. resteront les mêmes; parce que a' n'est pas plus grand que a, ni $b' > b$, ni $c' > c$. Mais si on veut avoir égard aux signes de a', b', c', &c. la grandeur des coefficients ne peut changer que parce que quelqu'une de leurs parties pourroit être détruite par des signes contraires, ce qui les rendroit plus petits; ainsi les coefficients de la série, dont l'échelle de relation est c', $+ b'$, $+ a'$, seront dans ce cas plus petits que les coefficients correspondants q, r, s, t, &c. qui sont eux-mêmes plus petits que les coefficients correspondants Q, R, S, T, &c. de la série géométrique.

Si on fait $c + b + a = d$, l'exposant de la progression géométrique ci dessus, c'est-à-dire d, pourra surpasser d'une quantité quelconque la somme $c' + b' + a'$ des termes de l'échelle pris affirmativement. Plus d est grand, plus un terme (à compter du second) de la progression géométrique surpasse le terme correspondant de la série récurrente. Mais si on prend $f > d$, la raison $f^2 : d^2$ est plus grande que celle de $f : d$; & la raison de $f^3 : d^3$ plus grande encore que celle de $f^2 : d^2$. De sorte que si m est un nombre fort grand, la raison de $f^m : d^m$ pourra tellement surpasser celle de $f : d$, que d^m disparoîtra, pour ainsi dire, devant f^m; & la série récurrente étant supposée continuée jusqu'au terme qui contient z^m, dont le coefficient soit supposé B, l'on aura $d^m > B$, & f^m pourra tellement surpasser B, que cette derniere quantité sera presque infiniment petite par rapport à f^m. Si donc d est maintenant supposé représenter f, ayant écrit par ordre les deux séries C & D, $1 + dz + d^2z^2 + d^3z^3 + d^4z^4$ &c. C il est visible qu'on $1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4$ &c. D pourra tellement les continuer que le coefficient du terme Bz^m sera fort petit par rapport à d^m, coefficient du terme correspondant $d^m z^m$ de la série géométrique.

Si l'échelle de relation est 3, -2, $+5$, la série récurrente sera $1 + 5z + 23z^2 + 108z^3 + 529z^4$ &c., pour laquelle si on prend $d = 3 + 2 + 5 = 10$; & que par le moyen de cet exposant on forme la série géométrique $1 + 10z + 100z^2 + 1000z^3 + 10000z^4$ &c. il est facile de voir que les coefficients de celle-ci surpasseront de beaucoup les coefficients correspondants de l'autre. Si l'échelle de rela-

lation est 10, $+6$, $+2$, la série récurrente sera $1 + 2z + 10z^2 + 42z^3 + 164z^4 + 680z^5$ &c. Mais la série géométrique correspondante, dont l'exposant est $= d = 10 + 6 + 2 = 18$, sera $1 + 18z + 324z^2$ &c. dont les coefficients surpassent de beaucoup leurs correspondants dans la série récurrente.

107. THÉOREME. *Si* $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 -$ &c., *dénominateur d'une fraction dont le numérateur est* $= 1$, *a un facteur simple réel* $1 - dz$, *dans lequel* d *soit assez grand, la série récurrente qui naîtra de l'évolution de cette fraction, approchera d'autant plus d'être une progression géométrique, dont l'exposant seroit* $=$ d, *qu'on la poussera plus loin.* Supposons que la valeur de cette fraction soit y, de maniere que l'on ait $\frac{1}{1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 - \&c.} = y$; puisque le dénominateur de cette fraction a un facteur simple & réel $1 - dz$, si l'autre facteur est $1 - az - bz^2 - cz^3 -$ &c., on aura

$$y = \left(\frac{1}{1 - dz}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 - a^2 - bz^2 - cz^3 - \&c.}\right).$$

L'un & l'autre de ces facteurs pouvant être développés en séries, le premier donnera la progression géométrique $1 + dz + d^2z^2 + d^3z^3 +$ &c., le second une série récurrente qu'on peut représenter par $1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 +$ &c. Si on multiplie ces deux séries l'une par l'autre, ce qui se fait en multipliant tous les termes de l'une successivement par tous ceux de l'autre, leur produit sera $= y$. Or ce produit est

$$\left.\begin{array}{l} 1 + qz + rz^2 + sz^3 + tz^4 + uz^5 + \&c. \\ \quad + dz + dqz^2 + drz^3 + dsz^4 + dtz^5 + \&c. \\ \qquad + d^2z^2 + d^2qz^3 + d^2rz^4 + d^2sz^5 + \&c. \\ \qquad\quad + d^3z^3 + d^3qz^4 + d^3rz^5 + \&c. \\ \qquad\qquad + d^4z^4 + d^4qz^5 + \&c. \\ \qquad\qquad\quad + d^5z^5 + \&c. \\ \qquad\qquad\qquad + \&c. \end{array}\right\} = y \text{ (A)}.$$

Si nous supposons qu'on développe la fraction proposée, dont la valeur est y, en une série récurrente $1 + Qz + Rz^2 + Sz^3 + Tz^4 + Vz^5 +$ &c., il est évident que cette série ne peut être égale au premier membre de l'équation A pour toutes les valeurs de z, à moins que les quantités qui

multiplient une même puissance de z ne soient égales de part & d'autre. On aura donc les équations suivantes

$$Q = d + q$$
$$R = d^2 + dq + r$$
$$S = d^3 + d^2q + dr + s$$
$$T = d^4 + d^3q + d^2r + ds + t$$
$$V = d^5 + d^4q + d^3r + d^2s + dt + u.$$
&c.

Si d est fort grand, les derniers termes q, r, s, t, u pourront être négligés sans une erreur bien considérable, & même l'erreur sera peu digne d'attention en négligeant les puissances inférieures de d respectivement aux supérieures, en négligeant, *par exemple*, d^4 devant d^5. On pourra donc supposer

$$\frac{R}{Q} = \frac{d^2 + dq + r}{d + q} = \frac{d^2}{d} = d$$
$$\frac{S}{R} = \frac{d^3 + d^2q + dr + s}{d^2 + dq + r} = \frac{d^3}{d^2} = d$$
$$\frac{T}{S} = \frac{d^4 + d^3q + d^2r + ds + t}{d^3 + d^2q + dr + s} = \frac{d^4}{d^3} = d$$
$$\frac{V}{T} = \frac{d^5 + d^4q + d^3r + d^2s + dt + u}{d^4 + d^3q + d^2r + ds + t} = \frac{d^5}{d^4} = d.$$

Il est donc visible que dans cette série la raison de Q : R differe souvent fort peu de celle de 1 : d, que celle de R : S en approche davantage, que celle de S : T en approche encore plus, & ainsi de suite ; de sorte qu'à l'infini cette série se change en une progression géométrique, dans laquelle l'exposant $= d$.

Si d étant une quantité réelle, $1 - dz$ est un diviseur du dénominateur $1 - a'z - b'z^2 - c'z^3 -$ &c. l'équation simple $1 - dz = 0$, contiendra une racine réelle de l'équation $0 = 1 - a'z - b'z^2 - c'z^3$ &c. En effet, on a dans ce cas $1 = dz$ & $z = \frac{1}{d}$. Si donc cette racine est assez petite (c'est-à-dire, si d est assez grand), on pourra la trouver en formant une série récurrente par le moyen de l'échelle que

fournit l'équation : car une telle ſérie pourra, après un certain nombre de termes, être regardée comme une progreſſion géométrique, dont l'expoſant ſeroit $= d$; de ſorte qu'en diviſant un terme aſſez éloigné du premier par celui qui le ſuit, le quotient ſera à très-peu près $= \frac{1}{d}$ racine cherchée. Mais ſi la ſérie ne tendoit pas à devenir géométrique, ce qu'il eſt facile de reconnoître, on ne pourroit par cette méthode trouver aucune des racines de l'équation. A l'égard de l'échelle, on la trouvera aiſément en prenant avec un ſigne contraire, pour premier terme, le coefficient de la plus haute puiſſance de l'inconnue ; pour ſecond terme, le coefficient du terme ſuivant ; & ainſi de ſuite, & ſuppoſant $= 0$, les coefficients des termes qui manquent dans l'équation.

Soit l'équation du 3e degré $1 - 5z - 40z^2 - 50z^3 = 0$. Je forme, par le moyen de l'échelle 50, 40, 5 la ſérie récurrente $1 + 5z + 65z^2 + 575z^3 +$ &c., ou n'ayant pas égard à z, $1 + 5 + 65 + 575 + 5725 + 54875 + 532125 +$ &c. Si on diviſe le ſecond terme par le premier, le quotient eſt 5, le troiſiéme étant diviſé par le ſecond donne 13, le quatriéme étant diviſé par le troiſiéme donne 8·8. Le quotient du cinquiéme par le terme précédent eſt 9·9 ; le ſixiéme terme étant diviſé par le cinquiéme, on trouve 9·5, & le ſeptiéme diviſé par le ſixiéme donne 9·7. Comme ces derniers quotients ne different pas beaucoup, c'eſt une marque que la progreſſion tend à devenir géométrique, & il eſt viſible qu'une des racines $\frac{1}{d}$ eſt à-peu-près $= \frac{54875}{532125}$.

Dans une équation quelconque on peut toujours diminuer toute racine poſſible, autant qu'on le voudra : car ſi l'équation a un diviſeur ſimple $dz - 1 = 0$, qui détermine cette racine, & qu'on faſſe $z = x + p$, ce diviſeur devient $dx + dp - 1 = 0$, qui repréſente la racine $x = \frac{1}{d} - p$ de la transformée que donne cette ſuppoſition. Or en prenant pour p une quantité convenable, la racine $\frac{1}{d} - p$ pourra être auſſi petite qu'on le voudra ; cependant on ne peut pas découvrir par ce moyen toutes les racines réelles de toutes

les équations, comme semble le promettre cette observation. Si l'équation $o = 1 - a' z - b' z^2 - c' z^3 -$ &c. a un facteur simple $1 - dz = o$, & un autre facteur quelconque $o = 1 - az - bz^2 - cz^3 -$ &c., sans que la série que doit fournir l'équation $o = 1 - a' z - b' z^2 -$ &c. tende à devenir une progression géométrique, dont l'exposant soit d, si vous voulez faire ensorte que cela arrive, il ne suffit pas d'augmenter d, ce qu'on pourroit faire en diminuant la racine $\frac{1}{d}$; il est encore nécessaire qu'en augmentant ainsi la quantité d, les coefficients a, b, c de l'autre facteur restent les mêmes, ou du moins ne subissent pas des grands changements; autrement en changeant l'échelle de relation, les termes de la série récurrente pourront différer de beaucoup de leurs correspondants dans la progression géométrique, dont l'exposant $= d$. D'autre côté il est visible qu'en faisant $z = x + p$, chaque racine est diminuée de la même quantité p; or cette diminution peut changer & augmenter les coefficients a, b, c, de maniere que quoique d soit augmenté, il soit cependant trop petit relativement à ces coefficients.

Mais quoique par cette méthode l'on ne puisse pas toujours parvenir à trouver la plus petite racine d'une équation, j'ai cru ne devoir pas la passer sous silence, parce qu'elle est facile & que les tentatives sont rarement infructueuses.

108. EXEMPLE I. On demande les racines de l'équation $y^2 + 8y - 10 = o$. Puisqu'en supposant $y = 2$, le premier membre devient $4 + 16 - 10 = 10$, & qu'en prenant $y = 1$, l'on trouve $1 + 8 - 10 = - 1$, il est visible qu'une des racines est contenue entre 2 & 1, mais qu'elle approche plus de 1 que de 2; car le résultat que donne $+ 1$ est moins éloigné de o (résultat que donneroit la racine exacte) que celui que donne $+ 2$. On peut diminuer encore cette racine, en substituant dans la proposée $1 + z$ au lieu de y, pour avoir

$$\begin{aligned} y &= 1 + z \\ y^2 &= 1 + 2z + z^2 \\ 8y &= 8 + 8z \\ -10 &= -10, \end{aligned}$$

ce qui donnera $o = - 1 + 10z + zz = o$, ou $o = 1 - 10z - zz$. Cette derniere équation donne l'échelle de relation

$+1, +10$, par le moyen de laquelle on peut former une ſérie récurrente (dont nous nous contenterons de rapporter les coefficients en régardant 1 comme le coefficient de z^0) $1 + 10 + 101 + 1020 + 10301 + 104030 + 1050601$ &c. qui tend évidemment vers une progreſſion géométrique. C'eſt pourquoi, ſi on diviſe l'avant-dernier terme par le dernier, on aura $z = \frac{104030}{1050601} = 0 \cdot 0990193$, d'où l'on tire $1 + z = y = 1 \cdot 099019$. C'eſt donc là la racine approchée cherchée qui étant ſubſtituée dans $y^2 + 8y - 10 = 0$, au lieu de y donne $y^2 + 8y - 10 = -0 \cdot 000006$, réſultat qui fait voir que cette racine n'eſt pas fort éloignée de la véritable. Si on diviſe la propoſée par $y - 1 \cdot 099019 = 0$, on aura facilement la ſeconde racine. Mais on peut la trouver encore plus facilement, en retranchant $1 \cdot 099019$ du coefficient -8 du ſecond terme, pris négativement, ou de la ſomme des racines de l'équation, ce qui donnera $-8 - 1 \cdot 099019 = -9 \cdot 099019$ pour la ſeconde racine.

Si on avoit voulu trouver celle-ci avant l'autre, il auroit fallu remarquer qu'elle tombe entre -10 & -9, ce qui eſt évident; parce que ſi on fait $y = -9$, la propoſée devient $81 - 72 - 10 = -1$; mais en ſuppoſant $y = -10$, on trouve $100 - 80 - 10 = 10$, ce qui fait voir qu'il y a une racine entre -10 & -9, mais plus proche de -9 que de -10. Si donc on fait $y = -9 - z$, on trouvera $0 = -1 + 10z + z^2$, ou $0 = 1 - 10z - z^2$, cette équation étant la même que celle que nous avons traitée ci-deſſus, donnera la même ſérie recurrente & la même valeur de z que nous avons déja trouvée, & l'on aura $y = -9 - z = -9 \cdot 099019$.

109. EXEMPLE II. Soit l'équation $x^2 - 7x - 5 = 0$, dans laquelle ſi on fait $x = 0$, le réſultat ſera -5; mais en ſuppoſant $x = -1$ l'équation devient $1 + 7 - 5 = 3$. Cela marque qu'une des racines de l'équation tombe entre 0 & -1, & qu'elle eſt plus près de -1 que de 0. Il ſera commode de ſuppoſer dans ce cas-ci, $x = 5z$, afin d'avoir $25z^2 - 35z - 5 = 0$, ou $5z^2 - 7z - 1 = 0$, $0 = 1 + 7z - 5zz$. L'échelle de relation eſt donc $+5 - 7$, & la ſérie des coefficients $1 - 7 + 54 - 413 + 3161 - 24191 + 185142$ &c.; d'où l'on tire $z = \frac{-24191}{185142} = -0 \cdot 130661$, & $x = 5z = -0 \cdot 653305$. Le coefficient du ſecond terme de la propoſée pris négativement étant $+7$, l'autre racine ſera $x = 7 + 0 \cdot 653305 = 7 \cdot 653305$.

110. EXEMPLE III. On demande les racines de l'équation $x^2 + 6x + 10 = 0$. Si on fait $x = 10z$, on trouvera après les opérations ordinaires $0 = 10 + 60z + 100zz$, ou, en divisant par 10, afin que le terme constant devienne $= 1$, $0 = 1 + 6z + 10zz$. Donc l'échelle de relation sera $-10, -6$, qui donne la série des coefficients $1 - 6 + 26 - 96 + 316 - 336 + 2456$ &c. Il ne paroît pas que cette série tende à devenir géométrique. Mais parce qu'il est facile de voir qu'une des racines de la proposée est assez proche de -3, on peut faire $x = -3 + z$, ce qui donne $0 = 1 + zz$. Comme le second terme de l'équation manque, on supposera son coefficient $= 0$, & l'on aura l'échelle de relation $-1 + 0$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + 0$ &c ; mais cette série ne peut rien faire connoître, & les racines de l'équation proposée sont $x = -3 \pm \sqrt{(-1)}$. Néanmoins, en négligeant les termes alternes, la série précédente se réduit à celle-ci : $1 - 1 + 1 - 1$ &c., dont chaque terme divisé par le suivant donne -1, qui est le quarré de la racine de la transformée, puisque l'on a $zz = -1$, $z = \pm \sqrt{(-1)}$, & par conséquent $x = -3 \pm \sqrt{(-1)}$.

111. EXEMPLE IV. Soit l'équation cubique $x^3 - 5x^2 + 5x + 12 = 0$, qui a une racine réelle comprise entre -1 & -2. Car si on fait $x = -1$, elle se réduit à $+1$; mais elle devient $-8 - 20 - 10 + 12 = -26$, en supposant $x = -2$; ainsi cette racine approche plus de -1 que de -2. On pourra donc supposer commodément $x = -1 - z$, d'où l'on tirera $0 = 1 - 18z - 8z^2 - z^3$, qui donne l'échelle de relation $+1, +8, +18$, d'où l'on tire la série des coefficients $1 + 18 + 332 + 6121 + 112852 + 2080636 +$ &c. qui tend rapidement vers une progression géométrique ; ainsi la racine cherchée sera à-peu-près $z = \frac{112852}{2080636} = 0 \cdot 054239$, & $x = -1 - z = -1 \cdot 054239$.

REMARQUE. Il sera plus sûr, pour ne pas se tromper dans la détermination de l'échelle de relation, d'ordonner la transformée de maniere que l'unité positive étant dans le second membre de l'équation, les autres termes se trouvent dans le premier, de maniere que les exposants aillent en décroissant à l'ordinaire. Ainsi dans cet exemple, on auroit pu disposer la transformée de cette maniere $z^3 + 8z^2 + 18z = 1$,

& alors les termes de l'échelle seront les coefficients 1, + 8, + 18, dans le rang qu'ils occupent, & avec les signes des termes dont ils sont les coefficients.

112. Soit l'équation $x^3 - 4x^2 + 6x - 20 = 0$, qui a une seule racine réelle comprise entre 3 & 4, mais plus proche de 4 que de 3. Si donc on fait $x = 4 - z$, l'on trouve $0 = 4 - 22z + 8z^2 - z^3$, équation que je dispose ainsi $\frac{1}{4}z^3 - 2z^2 + \frac{11}{2}z = 1$, ou de cette maniere $\frac{2}{8}z^3 - \frac{8}{4}z^2 + \frac{11}{2}z = 1$. Si je fais maintenant $\frac{1}{2}z = y$, j'aurai la nouvelle transformée $2y^3 - 8y^2 + 11y = 1$, qui donne pour échelle de relation 2, − 8, + 11, d'où naît la série $1 + 11 + 113 + 1157 + 11845 + 121265 +$ &c. qui tend à devenir géométrique. On aura donc $\frac{1}{2}z = y = \frac{11845}{121265} = 0 \cdot 097678$; donc $z = 0 \cdot 195356$, & $x = 4 - z = 3 \cdot 804644$.

113. Afin de rendre notre Algebre plus complette, nous croyons devoir dire un mot de la maniere dont le célebre Euler emploie les séries récurrentes dans la recherche des racines des équations. Le fondement de sa méthode consiste à déterminer pour chaque équation une suite de nombres, comme a, b, c, &c. tels que chaque terme de la suite divisé par le précédent, indique la valeur de la racine d'autant plus exactement qu'on aura continué plus loin cette suite de nombres.

Supposons, dit-il dans son Algebre, que nous soyons parvenus déja aux termes p, q, r, s, t, &c. il faudra que $\frac{q}{p}$ indique la racine x déja assez exactement; c'est-à-dire, qu'on ait à très-peu-près $\frac{q}{p} = x$. On aura de même $\frac{r}{q} = x$, & la multiplication des deux valeurs donnera $\frac{r}{p} = xx$. De plus comme $\frac{s}{r} = x$, on aura aussi $\frac{s}{p} = x^3$; ensuite, puisque $\frac{t}{s} = x$, on aura $\frac{t}{p} = x^4$, & ainsi de suite.

Soit l'équation $xx = x + 1$, & supposons que dans la série ci-dessus se présentent les termes p, q, r, s, t, &c. Or comme $\frac{q}{p} = x$, & $\frac{r}{p} = xx$, nous obtiendrons l'équa-

tion $\frac{r}{p} = \frac{q}{p} + 1$, ou $q + p = r$. Et comme nous trouvons de la même maniere que $s = r + q$, & $t = s + r$; nous conclurons que chaque terme de notre suite est la somme des deux termes précédents; de sorte qu'ayant les deux premiers termes on est en état de continuer la suite aussi loin qu'on voudra. Quant à ces deux premiers termes (dit ce Savant), on peut les prendre à volonté; si nous supposons donc qu'ils soient 0, 1, notre suite sera 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, &c. & telle que si on divise un terme par celui que le précéde, on aura une valeur de x d'autant plus approchante de la véritable qu'on aura choisi un terme plus éloigné. L'erreur véritablement est très-grande au commencement, mais plus on avance, plus elle diminue. Si, *par exemple*, on fait $x = \frac{21}{13}$, on a $\frac{441}{169} = \frac{21}{13} + 1 = \frac{442}{169}$, où l'erreur n'est que de $\frac{1}{169}$: les termes suivants la donneroient encore plus petite.

Considérons l'équation $xx = 2x + 1$, & puisque $x = \frac{q}{p}$ & $xx = \frac{r}{p}$, nous aurons $\frac{r}{p} = \frac{2q}{p} + 1$, ou $r = 2q + p$; d'où l'on peut conclure que le double de chaque terme ajouté au terme précédent donne le terme suivant. Si nous commençons donc encore par 0, 1, nous aurons la série 0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, &c., d'où il suit que la valeur cherchée de x sera exprimée de plus en plus exactement par les fractions suivantes : $\frac{1}{0}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{12}{5}$, $\frac{29}{12}$, $\frac{70}{29}$, $\frac{169}{70}$, $\frac{408}{169}$, &c. qui approcheront toujours davantage de la véritable valeur de $x = 1 + \sqrt{2}$.

Soit l'équation $x^3 = x^2 + 2x + 1$. On fera $x = \frac{q}{p}$, $x^2 = \frac{r}{p}$, & $x^3 = \frac{s}{p}$, & l'on aura $s = r + 2q + p$, par où l'on voit comment par les trois termes p, q, r, on doit déterminer le suivant s, & comme le commencement de la suite cherchée est arbitraire, on peut former la série suivante : 0, 0, 1, 1, 3, 6, 13, 28, 60, 129, &c. ainsi les valeurs de x sont $\frac{0}{0}$, $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{6}{3}$, $\frac{13}{6}$, $\frac{28}{13}$, $\frac{60}{28}$, $\frac{129}{60}$, &c. *. Si nous prenons pour x la fraction $\frac{60}{28} = \frac{15}{7}$, on trouvera

* Nous parlerons dans la seconde partie de cet Ouvrage de la valeur de la fraction $\frac{0}{0}$, qui peut être finie ou infinie, ou 0 :

pour le premier membre de l'équation proposée la quantité $\frac{3375}{343}$, & pour le second membre $\frac{225}{49} + \frac{30}{7} + 1 = \frac{3388}{343}$, où l'erreur n'est que de $\frac{13}{343}$.

Il faut remarquer cependant (dit M. Euler) que toutes les équations ne sont pas de nature à pouvoir y appliquer cette méthode; & particuliérement lorsque le second terme manque, elle ne peut être employée. Car soit, *par exemple*, $xx = 2$; si on vouloit faire $x = \frac{q}{p}$, & $xx = \frac{r}{p}$, on auroit $\frac{r}{p} = 2$, ou $r = 2p$; c'est-à-dire, $r = 0 \times q + 2p$, d'où résulteroit la suite 1, 1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, 32, 32, &c. de laquelle on ne peut rien conclure, parce que chaque terme divisé par le précédent donne toujours $x = 1$, ou $x = 2$. Mais si dans l'équation proposée, on suppose $x = y - 1$, on trouvera $y^2 = 2y + 1$ *; & si l'on fait maintenant $y = \frac{q}{p}$, & $yy = \frac{r}{p}$ on aura l'approximation que nous avons donnée ci-dessus.

Il faut observer de plus (ajoute ce Savant au sujet de cette méthode) que lorsque l'équation a une racine rationelle, & qu'on choisit le commencement de la période tel que cette racine en résulte, chaque terme de la suite divisé par le terme précédent, donnera également la racine exactement. Soit l'équation $xx = x + 2$, dont une des racines est $x = 2$; comme on a ici, pour la série, la formule $r = q + 2p$, si on prend 1, 2 pour les deux premiers termes, on a la suite 1, 2, 4, 8, 16, 64, &c. qui est une progression géométrique croissante dont l'exposant est 2.

Mais lorsque le commencement de la suite s'écarte de la racine;

---

ainsi $\frac{(2-2)3}{(2-2)\cdot 5} = \frac{0\times 3}{0\times 5} = \frac{3}{5}$; $\frac{(1-1)\cdot 3}{(1-1)\cdot(1-1)} = \frac{3}{(1-1)} = \frac{3}{0} = \infty$, en considérant o comme une quantité infiniment petite. Mais $\frac{(1-1)\,(1-1)3}{(1-1)\cdot 2} = \frac{(1-1)\cdot 3}{2} = \frac{0\times 3}{2} = \frac{0}{2} = 0$. C'est tout ce que je dirai maintenant sur cette matiere, que je traiterai plus au long dans le calcul différentiel.

* Dans la traduction françoise de l'algébre de M. Euler, on trouve $y^2 + 2y - 1 = 2$, équation fausse; ce qui sans doute est une faute d'impression.

il ne faut pas croire qu'on ira du moins en s'approchant de cette racine ; la suite ne donne par approximation que la plus grande racine (il ne s'agit pas ici des équations du premier degré) ; & l'on ne trouve pas une des moindres, à moins d'avoir choisi les premiers termes convenablement pour cet effet. Soit l'équation $xx = 4x - 3$, dont les deux racines sont $x = 1$ & $x = 3$. La formule pour la suite est $r = 4q - 3p$; & si l'on prend 1, 1 pour le commencement de la série, qui indique par conséquent la plus petite racine, on a pour la suite entiere : 1, 1, 1, 1, &c. Mais si on adopte pour premiers termes les nombres 1, 3, qui contiennent la plus grande racine, on a la suite : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, &c. qui indique avec précision la racine 3. Enfin si on adopte un autre commencement, pourvu qu'il soit tel que la plus petite racine n'y soit pas comprise, la série sera telle que le quotient d'un terme par le précédent approchera toujours de plus en plus de la racine 3 à proportion qu'on s'éloignera du premier terme de la série ; mais les quotients n'approcheront pas de la plus petite racine.

Soit l'équation $x^{\infty} = x^{\infty-1} + x^{\infty-2} + x^{\infty-3} +$ &c. La série doit être telle pour cette équation, que chaque terme soit égal à la somme de tous les précédents, c'est-à-dire, qu'on aura 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, &c. ce qui fait voir qu'une des racines de l'équation proposée est 2 exactement. En divisant l'équation par x^{∞}, on trouve $1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{xx} + \frac{1}{x^3}$ &c. $= \frac{1}{x-1}$; d'où l'on tire $1 = \frac{1}{x-1}$, $x - 1 = 1$, & $x = 2$.

En examinant cette méthode avec un peu d'attention, on s'apperçoit facilement que les premiers termes de la série ne doivent pas tous être $= 0$, & qu'ils ne sont pas entiérement arbitraires, comme l'Auteur semble vouloir le faire entendre ; ce qui n'empêche pas qu'elle ne soit très élégante.

Des Fractions continues.

114. Il y a encore une autre espece de séries, dont je crois devoir donner une notion aux Commençants : je veux parler *des fractions continues*. Lorsqu'une fraction a pour dénominateur l'assemblage d'un entier & d'une fraction ; que cette seconde fraction a aussi pour dénominateur l'assemblage d'un entier & d'une fraction, & ainsi de suite : l'expression

qui

qui en résulte s'appelle *fraction continue* : ainsi l'expression

$$\cfrac{a'}{a + \cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c + \cfrac{d'}{d + \&c.}}}}$$

est une fraction continue. J'appellerai *fractions intégrantes* les fractions $\frac{a'}{a}, \frac{b'}{b}, \frac{c'}{c}$, &c. de l'assemblage desquelles résulte la fraction continue. Si les numérateurs a', b', c', &c. sont chacun $= 1$, la série ou fraction continue précédente sera $\cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \&c.}}}$

115. Pour réduire la fraction continue $\cfrac{a'}{a + \cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c}}}$ en fraction ordinaire, j'opere en allant de droite à gauche & je réduis le dénominateur $b + \frac{c'}{c}$ de la seconde fraction en la fraction équivalante $\frac{bc + c'}{c}$; ainsi l'assemblage des deux fractions $\cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c}}$ peut être regardé comme une fraction dont le numérateur $= b'$ & dont le dénominateur est $\frac{bc + c'}{c}$; donc on aura la valeur de $\cfrac{b'}{b + \cfrac{c'}{c}}$ en divisant b' par $\frac{bc + c'}{c}$, c'est-à-dire que cette valeur est $= \frac{b'c}{bc + c'}$; c'est pourquoi la fraction continue proposée est $= \cfrac{a'}{a + \cfrac{b'c}{bc + c'}}$. Mais $a + \frac{b'c}{bc + c'} = \frac{abc + ac' + b'c}{bc + c'}$; donc notre fraction continue est $= \frac{a'(bc + c')}{abc + ac' + b'c}$. Il est clair qu'en remontant ainsi de droite à gauche, on pourra réduire toute fraction continue, dont le nombre des termes sera fini en une fraction ordinaire.

Appellons S la valeur totale de la fraction continue $\frac{a'}{a + \frac{b'}{b + \frac{c'}{c + \frac{d'}{d + \&c.}}}}$; il est aisé de voir que si en allant de gauche à droite on prend la premiere fraction intégrante seule, puis les deux premieres fractions intégrantes seules, puis les trois premieres fractions intégrantes seules, & ainsi de suite, on aura des quantités alternativement plus petites & plus grandes que S; c'est-à-dire, que

$S < \frac{a'}{a}$, $S > \frac{a'}{a + \frac{b'}{b}}$, $S < \frac{a'}{a + \frac{b'}{b + \frac{c'}{c}}}$, &c. Car dans la premiere expression $\frac{a'}{a}$, le dénominateur a est plus petit que le véritable dénominateur, puisque le dernier est formé de l'addition de a avec toutes les fractions qui suivent à droite. Dans la seconde expression le dénominateur b étant aussi trop petit, la fraction $\frac{b'}{b}$ est trop grande, & par conséquent le dénominateur $a + \frac{b'}{b}$ est trop grand; ainsi la fraction dont le numérateur est a' & le dénominateur $a + \frac{b'}{b}$ est trop petite. Il est maintenant facile de voir que l'assemblage des trois premieres fractions est plus grand que S; que l'assemblage des quatre premieres fractions intégrantes est plus petit que S; &c.

116. Soient A & B deux nombres entiers & positifs, mais $A > B$. Pour réduire la fraction $\frac{A}{B}$ en fraction continue, opérez comme si vous cherchiez le plus grand commun-diviseur de A & de B (31); divisez donc A par B pour avoir le quotient a; divisez ensuite le dénominateur B par le reste, & nommez le quotient b; divisez après cela le premier reste par le second, & faites le quotient $= c$; continuez ainsi en divisant toujours l'avant-dernier reste par le dernier reste, jusqu'à ce que vous parveniez à une division qui ne laisse aucun

reste, ce qui doit nécessairement arriver, puisque les restes sont des nombres entiers qui vont en diminuant; vous aurez la fraction continue $a + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} +$ &c. qui sera égale à la fraction $\frac{A}{B}$; & cette fraction continue contient un entier a.

Soit $\frac{A}{B} = \frac{1103}{887}$. Divisant 1103 par 887, on a le quotient $a = 1$, & le reste 216. Divisant 887 par 216, on aura le quotient $4 = b$ & le reste 23; on divisera 216 par 23, ce qui donnera le quotient 9 & le reste 9; on divisera encore 23 par 9, on aura le quotient 2 & le reste 5; on divisera 9 par 5, on aura le quotient 1 & le reste 4; on divisera 5 par 4, on aura le quotient 1 & le reste 1 : enfin divisant 4 par 1, on aura le quotient 4 & le reste 0, de sorte que l'opération sera finie. Rassemblant donc par ordre les quotients trouvés, on aura cette série 1, 4, 9, 2, 1, 1, 4; & la fraction continue cherchée sera $= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$.

Si nous retranchons 887 de 1103 pour avoir le reste 216, la fraction $\frac{216}{887}$ sera $= \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4}$; or on trouvera facilement ce résultat en divisant 887 par 216; divisant ensuite 216 par le reste que donne la premiere division; divisant après cela le premier reste par le second; & ainsi de suite pour avoir les quotients 4, 9, 2, 1, 1, 4, dont on formera la fraction continue $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$ &c.

Et selon ce que nous avons dit ci-dessus, faisant $\frac{216}{887} = S$, nous aurons $S < \frac{1}{4}$, $S > \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$, $S < \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{2}$, &c.

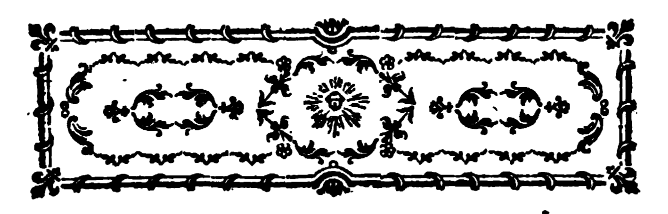
Soit la fraction numérique & positive $\frac{A}{B}$, dans laquelle A est $>$ B, telle que l'on ait $\frac{A}{B} = S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} +$ &c. Cette fraction étant réduite en fraction ordinaire donne, en

ſe bornant à trois fractions intégrantes, $S = \frac{bc+1}{abc+a+c}$; & l'on ne peut avoir une valeur plus approchée de S au moyen d'une fraction qui ſoit exprimée en des plus petits nombres que la fraction $\frac{bc+1}{abc+a+c}$. De ſorte que ſi l'on ſuppoſe

$S = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{p}}}}$, en ajoutant une fraction intégrante de plus, pour avoir $S = \frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1}$, cette fraction ſera exprimée par des plus grands nombres que la précédente.

La fraction $\frac{216}{887}$ étant $= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{9 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4}}}}}}$, ſi nous faiſons $a = 4$, $b = 9$, $c = 2$, $p = 1$, nous aurons $\frac{bc+1}{abc+a+c}$ $= \frac{9 \cdot 2 + 1}{4 \cdot 9 \cdot 2 + 4 + 2} = \frac{19}{78}$, & $\frac{bcp+b+p}{abcp+ab+ap+cp+1}$ $= \frac{28}{115}$.

Fin du Calcul.



ÉLEMENS DE GÉOMÉTRIE.

1. LA GÉOMÉTRIE *est la science de l'espace ou de l'étendue en longueur, largeur & profondeur.* *La ligne* n'est autre chose que l'étendue considérée sans largeur ni profondeur. La *surface* est l'étendue considérée en longueur & largeur seulement. On appelle *solide* * les trois dimensions prises ensemble, c'est-à-dire, la longueur, la largeur & la profondeur. L'extrémité d'une ligne s'appelle *un point*, & il est évident que la ligne n'ayant ni longueur ni profondeur (ou étant considérée comme telle), on ne peut concevoir dans le point ni largeur, ni profondeur : on peut cependant, pour aider l'imagination, considérer le point comme une étendue d'une longueur, largeur & profondeur très-petites.

La ligne droite est celle qui va d'un point à

* On n'entend pas ici par *solide* un amas de parties matérielles ; mais seulement un espace long, large & profond, que cet espace contienne un corps, ou qu'il soit parfaitement vuide.

l'autre ſans ſe détourner à droite ni à gauche, telle eſt *a b* (figure premiere). On peut la concevoir formée par le mouvement d'un point qui va de *a* en *b* ſans ſe détourner d'aucun côté.

2. COROLLAIRE. Delà il ſuit que la ligne droite eſt la plus courte qu'on puiſſe tirer entre deux points.

La *ligne courbe* eſt celle qui eſt engendrée par le mouvement d'un point qui à chaque moment s'écarte très-peu de la ligne droite. Telles ſont les lignes *a c b*, *a d b*. On appelle *ligne mixte*, une ligne *p x b*, compoſée d'une ligne droite *p x* & d'une ligne courbe *x b*. Enfin j'appelle *ligne anguleuſe* une ligne *a p x* compoſée de deux lignes droites *ap*, *p x*, qui n'ont pas la même direction.

3. COROLLAIRE. On ne peut tirer qu'une ligne droite *a b*, entre deux points *a* & *b*; mais on peut faire paſſer tant de courbes que l'on voudra par ces mêmes points *a* & *b*.

La *ligne circulaire* eſt une ligne courbe (fig. 2) décrite par l'extrémité *a* de la ligne *ac*, qui tourne autour d'un point fixe *c*. Ce point *c* eſt appellé *le centre*, & il eſt évident que tous les points de la ligne circulaire (qu'on appelle encore *circonférence du cercle*) ſont également éloignés du centre. On appelle *cercle* l'eſpace renfermé dans la circonférence *; c'eſt-à-dire, que le cercle eſt une *ſurface plane*, terminée par une ligne courbe qu'on appelle *circonférence*, dont tous les points ſont également éloignés d'un point qu'on nomme *centre*.

4. COROLLAIRE. Delà il ſuit que toutes

* Quelquefois cependant on ſe ſert du mot *cercle* pour déſigner la circonférence.

les droites tirées du centre à la circonférence (on les appelle des *rayons*) sont égales. De même tous les diametres sont égaux ; car un *diametre b d* est une ligne droite, qui passant par le centre est terminée de part & d'autre à la circonférence ; de sorte qu'il est composé de deux rayons égaux. Mais les lignes qui sont terminées de part & d'autre à la circonférence sans passer par le centre, ne sont pas égales. Ces sortes de lignes sont appellées *cordes* ; or il est visible qu'une corde *f d* est d'autant plus petite qu'elle est plus éloignée du centre.

5. COROLLAIRE. Tout diametre *b d* partage la circonférence & le cercle en deux parties égales ; car si l'on conçoit la partie *b f d* pliée sur le diametre *b d*, il est clair que tous les points de la partie *d f b*, s'appliqueront exactement sur tous les points de la partie *b a d* : car si le point *f*, *par exemple*, tomboit en dedans ou en dehors de la partie *b a d*, tous les points de la circonférence ne seroient pas également éloignés du centre *c*.

Les Géometres conçoivent la circonférence de tout cercle grand ou petit divisée en 360 parties égales, qu'ils appellent *degrés*. Chaque degré se divise en 60 parties égales qu'on nomme *minutes*, chaque minute en 60 parties égales qu'on nomme *secondes*, chaque seconde en 60 *tierces*, & ainsi de suite. Le caractere qui désigne le degré est $^{\circ}$, celui de la minute $'$, celui de la seconde $''$, celui des tierces $'''$, &c. ainsi $35^{\circ}\ 7'\ 12''\ 30'''$ signifient 35 degrés, 7 minutes, 12 secondes, 30 tierces.

On appelle *cercles concentriques*, ceux qui ont un même centre *c* (fig. 3). On nomme *cercles excentriques*, ceux qui ont différens centres (fig. 4). On appelle *sécantes* les lignes qui coupent un cer-

cle, telles que *ad* (fig. 16); & *tangentes*, celles qui le touchent ſans le couper, comme *ab* (fig. 4). On appelle *arc d'un cercle*, une partie de ſa circonférence *xd* (fig. 5). Un ſecteur de cercle eſt l'eſpace renfermé entre deux rayons *md*, *mx*, & l'arc *xd* terminé par ces deux rayons. On appelle *ſegment* l'eſpace compris entre un arc *dx* & ſa corde.

6. Les *lignes perpendiculaires* ſont celles qui tombent ſur une autre ligne ſans pencher d'un côté ni de l'autre. Ainſi *hx* (fig. 6) eſt perpendiculaire ſur *ab*. Il eſt évident auſſi que ſi *hx* ne penche ni du côté de *a*, ni du côté de *b*, *ab* ne penchera pas non plus ni du côté de *h*, ni du côté de *x*; c'eſt-à-dire, que ſi une ligne eſt perpendiculaire ſur une autre ligne, la ſeconde ſera auſſi perpendiculaire ſur la premiere. On appelle *lignes obliques* celles qui en rencontrent une autre en penchant plus d'un côté que de l'autre : ainſi *hf* & *ha* ſont obliques ſur *ab*; car la premiere penche plus du côté de *a*, que du côté de *b*, & la ſeconde penche plus du côté de *b*, que du côté de *a*. Les *lignes paralleles* ſont celles qui ſont partout également éloignées l'une de l'autre. Ainſi elles ne peuvent ſe rencontrer quelques prolongées qu'elles ſoient : telles ſont les lignes *hp*, *mn*, dont tous les points correſpondants *h* & *m*, *p* & *n* ſont toujours également éloignés.

Un *angle* n'eſt autre choſe que l'ouverture que laiſſent entr'elles deux lignes *ac*, *dc*, qui ſe rencontrent en un point *c* (fig. 3); ainſi *dca* eſt un angle. Il eſt viſible qu'à proportion que le point *d* s'éloigne du point *a*, l'angle *dca* devient plus grand, auſſi-bien que l'arc *ad*; de ſorte que l'arc *ad* croît en même temps que l'angle. Il eſt viſible auſſi

que l'angle *gef*, dont les côtés sont plus petits que ceux de l'angle *acd*, lui est cependant égal.

7. COROLLAIRE. Donc premiérement la grandeur d'un angle ne dépend pas de la grandeur de ses côtés. Secondement l'angle doit s'estimer par le nombre des degrés, minutes, secondes, &c. de l'arc de cercle compris entre ses côtés, en supposant que la pointe de l'angle est au centre du cercle.

Lorsqu'un angle est formé par deux lignes courbes, on l'appelle *curviligne*; mais on le nomme *mixtiligne* lorsqu'il est formé par une ligne droite & une ligne courbe : l'angle *pon* est curviligne, & l'angle *nab* est mixtiligne (fig. 4). Pour désigner un angle l'on se sert de trois lettres, dont celle du milieu désigne la pointe, & les autres les extrémités des côtés, ou bien on se sert d'une seule lettre située au *sommet* de l'angle. Un angle est appellé *droit* lorsqu'il a pour mesure le quart du cercle; il est *aigu* s'il a pour mesure moins que le quart du cercle. Ainsi l'angle *dcp* (fig. 7) est droit, & l'angle D*cx* est aigu. On appelle *angle obtus*, celui qui a pour mesure plus que le quart du cercle, tel est l'angle *dca*. On appelle *complément* d'un angle la différence de cet angle avec un angle droit, & *supplément* d'un angle ce qui manque à cet angle pour valoir deux angles droits ou 180°.

8. COROLLAIRE VI. Donc les angles égaux ont des complémens & des supplémens égaux, & réciproquement si deux angles ont des complémens ou des supplémens égaux, ils sont égaux *.

* Quand on dit que les angles qui ont des complémens égaux sont égaux, on suppose qu'ils sont de la même espece; c'est-à-dire, tous les deux aigus ou tous les deux obtus : car l'angle de 100°

DÉFINITIONS. Un espace terminé par des lignes est une *figure* ; & une figure de trois côtés s'appelle *un triangle*.

9. THÉOREME. *Une ligne* a y *tombant sur une autre ligne* b d, *forme sur cette ligne deux angles* a c d, a c b *du même côté, qu'on appelle* contigus, *qui pris ensemble valent deux angles droits.* En effet si du point *c*, comme centre, on décrit le cercle *a b d*, il est évident que *b d* sera un diametre & *b a d* une demi-circonférence ; mais l'angle *b c a* a pour mesure l'arc *b a*, & l'angle *a c d* a pour mesure l'arc *a d* ; ainsi ces deux angles, pris ensemble, ont pour mesure la demi-circonférence *b a d*, & par conséquent ils valent deux angles droits.

10. COROLLAIRE I. Deux angles contigus ou de suite sont supplémens l'un de l'autre, & si l'un *d c p* est droit, l'autre *b c p* doit l'être ; & la mesure de l'angle droit doit être $\frac{180°}{2} = 90°$; or dans ce cas *p c* ne penchant pas plus du côté de *b* que du côté de *d* est perpendiculaire sur *b d*.

11. COROLLAIRE II. Les angles *d c y*, *b c y*, formés par la ligne *b d* & la ligne *a c* prolongée, auront aussi pour mesure une demi-circonférence de cercle *b y d*, & par conséquent ils vaudront ensemble 180°. Si par le point *c* on tire tant de lignes que l'on voudra, tous les angles *b c a*, *a c p*, *p c x*, *x c d*, formés au-dessus de la ligne *b d*, auront pour mesure la demi-circonférence *b a d*. De même tous les angles formés au-dessous de *b c d*,

---

& l'angle de 80° ont le même complément 10°, cependant ils ne sont pas égaux. Il y a des Auteurs qui disent que le complément d'un angle est ce qui manque à cet angle pour valoir un angle droit.

auront pour mesure la demi-circonférence inférieure *byd*; donc ils vaudront deux angles droits; donc tous les angles qu'on peut former autour d'un point *c* valent précisément 360°.

12. THÉOREME. *Les angles opposés au sommet sont égaux.* Les angles opposés au sommet sont ceux qui ont leurs pointes opposées & qui sont faits par deux lignes qui se coupent : tels sont les angles *acb*, *dcx* (fig. 5), qui sont égaux; car l'angle *acd* est supplément de l'un & de l'autre; donc (8) ces angles sont égaux; donc, &c.

13 THÉOREME. *Une ligne* fx *qui coupe deux paralleles* la, bd, *forme avec elles des angles* a, b *situés de la même maniere* (fig. 8), on les appelle *correspondans*, *égaux.* Car il est visible que les lignes *bd*, *la* ne sont pas plus inclinées l'une que l'autre sur la ligne *fx* du côté du point *f*; autrement ces lignes s'approcheroient l'une de l'autre d'un côté, & par conséquent ne seroient point paralleles; mais c'est de l'inclinaison des lignes que dépend la grandeur des angles; donc l'angle *a* est égal à l'angle *b*.

On appelle *angles alternes-internes* les angles *b* & *c* situés entre les paralleles, mais de différens côtés de la sécante; *angles alternes-externes* les angles qui sont situés hors des paralleles de différens côtés de la sécante, comme *a*, *x*. Les angles alternes appartiennent toujours l'un à l'une des paralleles, & l'autre à l'autre parallele.

COROLLAIRE I. Il suit de ce théorême que les angles alternes-internes sont égaux entr'eux, aussi-bien que les angles alternes-externes : car (par le théorême) $b = a$; or $a = c$, parce qu'ils sont opposés au sommet; donc $b = c$; donc 1° &c.

2° $a=b$, parce qu'ils ſont correſpondans, $b=x$, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet; donc $a=x$; donc 2° &c.

COROLLAIRE II. Deux angles ſoit internes, ſoit externes du même côté de la ſécante, valent toujours deux angles droits; car a & m étant contigus valent deux angles droits (9); mais $a=b$; donc m & b valent deux angles droits. De plus g & b étant contigus valent 180°; mais $b=a$; donc g & a valent deux angles droits; donc ſi l'un de ces angles eſt droit, l'autre le ſera auſſi; c'eſt-à-dire, ſi la ſécante fq eſt perpendiculaire à l'une des paralleles, elle le ſera de même à l'autre.

14. COROLLAIRE III. Donc ſi deux angles ont leurs côtés paralleles, ils ſeront égaux ou ſupplémens l'un de l'autre. Les angles rsp, fai ſont égaux; car $s=q$, parce qu'ils ſont correſpondans (à cauſe des paralleles fq, rs), $q=a$, parce qu'ils ſont de même correſpondans; donc $a=s$. Les angles rsq, fai ont leurs côtés paralleles; mais rsq & fqN ſont correſpondans, & celui-ci eſt correſpondant de fal ſupplément de fai. Si l'on conçoit que la ligne rsM ſe meut ſur pq en reſtant toujours parallele à la ligne fq, & qu'étant arrivée en q, l'angle rsp (qui eſt devenu fqp), ou ſon oppoſé au ſommet Msq (qui eſt devenu AqN) ſe meut le long de la ligne fq, de maniere que la ligne rs ſoit toujours ſituée ſur fq, juſqu'à ce que la ligne sp tombe ſur ai, l'angle rsp ſe confondera avec fai, & l'angle Msq ſera oppoſé au ſommet à l'angle fai; mais les angles rsq, Msp ne ſe confondront avec l'angle fai, ni ne lui ſeront oppoſés au ſommet. On peut donc, par ce qu'on vient de

dire, connoître dans quels cas les angles dont les côtés sont paralleles sont égaux ou supplémens l'un de l'autre. En général si les angles *rsp*, *fai*; dont les côtés sont parelleles, ont leurs pointes tournées vers la même région ils sont égaux; & comme l'angle M*sq* est égal *rsp*, on peut dire aussi que deux angles *fai*, M*sq* seront égaux toutes les fois qu'ils auront leurs côtés paralleles, & que l'un des deux (en prolongeant ses côtés, s'il le faut) sera opposé au sommet à un angle qui aura sa pointe tournée vers la même région que l'autre. Quand dans la suite de cet Ouvrage on conclura que les angles dont les côtés sont paralleles sont égaux, ils ne se trouveront jamais dans le cas de ceux qui sont supplémens l'un de l'autre.

15. Théoreme. *Si les angles correspondans sont égaux, les lignes seront paralleles; il en sera de même si les angles alternes-internes, ou alternes-externes, ou si deux angles* m, b, *ou* a, g, *internes ou externes situés du même côté de la sécante, l'un appartenant à la ligne supérieure & l'autre à l'inférieure sont égaux.* Car dans tous ces cas les lignes *la*, *bd* doivent être également inclinées sur la sécante *fq* du même côté, ce qui ne peut être, à moins qu'elles ne soient paralleles.

16. Probleme. *Par un point* i *mener une parallele à la ligne* bd. Du point *i*, comme centre, & d'une ouverture de compas à discrétion décrivez un arc de cercle *th*, du point *h* où cet arc rencontre la ligne *bd*, & de la même ouverture de compas décrivez l'arc *di*. Ouvrez le compas de *d* en *i*, portez cette ouverture de *b* en *t*; par le point *t* & le point *i* tirez la ligne *it* & le problême sera résolu. En effet les angles *hit*, *ihd*

alternes-internes ſont égaux étant meſurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas ; donc les lignes *bd*, *ti* ſont paralleles.

17. PROBLEME. *Mener une perpendiculaire ſur une ligne* ab (fig. 9). Des points *a* & *b*, comme centres & d'une même ouverture de compas *, décrivez deux arcs *xx*, *gg* qui ſe rencontrent en *h* au-deſſus de *ab* ; faites la même choſe en-deſſous, & par les points *h*, *h* tirez la ligne *hph* ; vous aurez la perpendiculaire que vous demandez. Car tous les points de l'arc *xx* ſont également diſtans du centre *a* de cet arc, de même tous les points de l'arc *gg* ſont également diſtans du centre *b* ; donc les points *h*, qui ſont les interceſſions de ces arcs, ſont également diſtans de *a* & de *b*; donc auſſi tous les autres points de la ligne *hh* ſont également diſtans de *a* & de *b* ; car la poſition d'une ligne droite ne dépendant que de deux points, le point *p* de cette ligne ne ſauroit être plus près de *a* que de *b*, à moins que la ligne *hph* ne ſoit pas droite. Donc la ligne *hh*, a tous ſes points également diſtans de *a* & de *b*, donc elle eſt perpendiculaire ſur *ab*, c'eſt-à-dire qu'elle ne penche pas plus du côté de *a* que de *b*, & de plus elle coupe *ab* en deux également.

COROLLAIRE I. De ce que nous venons de dire, il ſuit que toutes les fois qu'une ligne droite aura deux de ſes points également diſtans des deux autres points d'une autre ligne, elle lui ſera perpendiculaire.

COROLLAIRE II. Donc pour mener une perpendiculaire ſur la ligne *ab* (fig. 10) par un point *d* de

* Il faut que l'ouverture du compas ſoit plus grande que la moitié de la ligne *ab*, autrement les arcs *xx*, *gg* ne ſe couperoient pas.

cette ligne, il suffit, après avoir décrit du point *d* comme centre une demi-circonférence *a c b*, de décrire deux arcs qui se coupent en *h*, en décrivant ces arcs de la même ouverture de compas, & prenant pour centres les points *a* & *b*, où la demi-circonférence coupe la ligne donnée *a b*. Tirant ensuite la ligne *h d*, dont les points *h* & *d* sont également distans des points *a* & *b*, l'on aura la perpendiculaire demandée.

COROLLAIRE III. Si du point *h*, hors d'une ligne *a b* (fig. 11), on veut mener une perpendiculaire à cette ligne; du point *h* on décrira un arc de cercle *c c*, qui coupe la ligne *ab* en deux points, des points d'intersection comme centre & de la même ouverture de compas décrivant deux arcs qui se couperont en *p*, l'on tirera la ligne *h p*, qui sera la perpendiculaire demandée. En effet les points *c* & *c* sont également éloignés du point *p* & du point *h* (centre de l'arc *c c*); donc la ligne *hp* a deux points également éloignés des deux autres points de la ligne *a b*; donc (Corollaire I.) la ligne *h p* est perpendiculaire sur *a b*.

18. THÉOREME. *D'un point* p *dans une ligne, ou d'un point* h *pris hors d'une ligne* ab, *on ne peut mener qu'une perpendiculaire à cette ligne* (fig. 6). Car toute autre ligne *cp*, ou *h d* penche nécessairement d'un côté ou de l'autre de la ligne *a b*; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc deux lignes *hp*, *m n* perpendiculaires sur une même ligne *a b*, sont paralleles: car si elles se rencontroient, on pourroit du point de rencontre tirer deux perpendiculaires sur la même ligne *a b*, ce qui (par le Théorême) est impossible.

19. THÉOREME. *La perpendiculaire est plus courte*

que l'oblique tirée d'un même point h *sur la même ligne* ab. Ayant prolongé *hp* jusqu'en *x*, en sorte que *ph*=*px*; il est visible qu'en pliant la figure de maniere que *af* serve de plis, & que *hp* tombe sur *px*, *hd* tombera sur *dx*, & *ha* sur *ax*; donc *hd*= *dx*, & *ha*=*ax*; mais la ligne anguleuse *hdx*>*hx*; donc *hd* moitié de la premiere ligne est plus grande que *hp*, moitié de la seconde; donc la perpendiculaire *hp* est plus courte que *dh*; donc, &c.

COROLLAIRE I. La ligne anguleuse *hax* s'écartant plus de la droite *hpx*, que la ligne anguleuse *hdx*, la premiere doit être plus grande que *hdx*; donc *ha* moitié de la premiere ligne anguleuse est plus longue que *hd*, moitié de l'autre; donc de toutes les obliques, celles qui s'écartent le plus de la perpendiculaire, sont les plus longues. Mais si deux obliques *hf*, *hd* s'écartent également de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche il est visible qu'elles seront égales; & parce qu'il ne peut y avoir que deux droites également éloignées de la perpendiculaire, l'une à droite & l'autre à gauche, on ne peut d'un même point *h*, mener plus de deux lignes égales sur une même ligne *ab*.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que si la perpendiculaire *hp* est la même (ce seroit la même chose si l'on avoit deux perpendiculaires égales) & si les obliques *hd*, *hf* sont égales de part & d'autre, leur écartement de la perpendiculaire, savoir *dp*, *pf* (on appelle cet écartement, *éloignement de perpendicule*) sera égal de part & d'autre; si les obliques & les éloignemens de perpendicule sont égaux, la perpendiculaire *hp* (qu'on peut prendre pour un éloignement de perpendicule,

en

en prenant dp, fp pour les perpendiculaires) ſera égale de part & d'autre; & enfin ſi la perpendiculaire & l'éloignement de perpendicule ſont égaux de part & d'autre, les obliques ſeront évidemment égales; car alors pliant la figure de maniere que le plis tombe ſur hp, f tombera ſur d; donc $hd = hf$. De même ſi $hd = hf$, hp reſtant la même, les deux obliques égales ſeront également éloignées de la perpendiculaire (Corollaire précédent); donc les éloignemens de perpendicule ſeront égaux. Donc de ces trois choſes, la perpendiculaire, l'oblique, l'éloignement de perpendicule, ſi deux ſont égales de part & d'autre, la troiſiéme le ſera auſſi.

Corollaire III. Donc une ligne ca (fig. 12) tirée du centre c ſur la tangente ga, au point de contingence a, eſt perpendiculaire ſur cette tangente; car la ligne ca eſt la plus courte qu'on puiſſe mener du point c à la ligne ga, puiſque toute autre ligne menée du point c à la ligne ga ſortiroit du cercle & ſeroit par conſéquent plus longue que le rayon ca. De plus la tangente ne touche le cercle qu'en un ſeul point, autrement du même point on pourroit tirer deux perpendiculaires ſur la même ligne; ce qui (18) eſt impoſſible. Il n'eſt pas moins évident qu'une ligne ga perpendiculaire à l'extrémité a d'un rayon ca eſt une tangente.

20. Théoreme. *Une ligne* cp *menée du centre d'un cercle perpendiculairement à la tangente* gh *coupe les cordes paralleles à cette tangente en deux parties égales* (fig. 13). Car cp eſt perpendiculaire à ces cordes (13), & parce que cp a de plus un point c également éloigné de a & de d (points de la circonférence du cercle), le point d'interſection s doit être auſſi égale-

ment éloigné de *a* & de *d*, autrement la ligne *c p* pencheroit d'un côté ou de l'autre de la ligne *a d*, & ne lui seroit pas par conséquent perpendiculaire. Donc *c p* coupe *a d* en deux également ; donc, &c.

REMARQUE. Si une ligne *c p* a deux points *c*, *s* également éloignés chacun des extrémités *a*, *d* de la corde *a d*, elle lui est perpendiculaire, parce qu'elle ne penche pas plus d'un côté que de l'autre par rapport à cette corde.

COROLLAIRE I. Si le point d'intersection *s* est également éloigné des extrémités *a* & *d* de la corde *a d*, & que la ligne *c s* soit perpendiculaire à cette corde, elle aura par la démonstration du théorême, tous ses autres points également éloignés de *a* & de *d*; donc *c s* passera par le centre *c*, point également éloigné de *a* & de *d*.

COROLLAIRE II. Donc une ligne *c s* qui passe par le sommet d'un angle *a c d*, dont les côtés sont égaux, & par le milieu du côté opposé à cet angle, passe aussi par le milieu de l'arc & le divise en deux parties égales, aussi-bien que l'angle mesuré par cet arc.

COROLLAIRE III. Il suit du Théorême, de la Remarque & du Corollaire précédent que si des trois propriétés passer par le centre, êtr eperpendiculaire à la corde, couper la corde en deux parties égales, une ligne *c s* en a deux, elle doit avoir la troisiémé.

21. PROBLEME. *Faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés* a, b, d (fig. 14). Ayant joint ces points par les lignes *a b*, *d b*, coupez ces lignes (17) en deux également par les perpendiculaires *h h*, *x x*, le point d'intersection *c* de ces perpendiculaires sera le centre du cercle cherché ; & si du point *c* & de l'intervale *c b*, *c a* ou *c d* on décrit une circonférence, elle passera par les

trois points donnés; car tous les points de la ligne *hh* étant également éloignés (17) de *a* & de *b*, & tous ceux de *xx* étant aussi également éloignés de *b* & de *d*, le point *c* commun aux deux lignes *hh*, *xx*, sera également éloigné de *a*, *b*, *d*; donc, &c. *

COROLLAIRE. Il suit de-là que si l'on avoit un arc *abd* dont on voulût trouver le centre, après avoir tiré deux cordes *ab*, *bd* dans cet arc, on chercheroit le centre *c*, comme nous venons de le dire.

22. PROBLEME. *Couper un arc* ab *en deux parties égales.* Tirez la perpendiculaire *hh* de maniere qu'elle coupe la corde *ab* en deux également (17), cette ligne passera par le centre *c* (20); donc elle aura un point *c* également éloigné de *a* & de *b*, & puisque d'ailleurs elle passe par le milieu de *ab*, elle aura deux points *c*, *s* également éloignés de *a* & de *b*; donc tous les points de cette ligne seront également éloignés de *a* & de *b*; donc le point *o* est également éloigné de *a* & de *b*; ainsi l'arc *ao* est égal à l'arc *ob*; donc, &c.

23. THÉOREME. *Les arcs compris entre une tangente & une corde, ou entre deux cordes paralleles, sont égaux* (fig. 13). Car la ligne *cp* passant par le centre & aboutissant au point de contingence est perpendiculaire sur la tangente *gh* (19), & par conséquent sur ses paralleles *ad*, *mn* (13); mais le point *c* de la ligne *cp* est également éloigné de *a* & de *d*, de *m* & de *n*; donc tous les autres points de la ligne *cp* sont également éloignés de *a*

* Pour que le Problême soit possible, il faut que les trois points ne soient pas en ligne droite; car il est visible qu'une droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points.

& de d; donc $ap=pd$; de même $mp=pn$; donc $ap-mp=dp-np$, ou $am=nd$; donc, &c.

24. THÉOREME. *De toutes les sécantes extérieures tirées d'un point* a *à la partie convexe* bd *de la circonférence, la plus courte est celle qui prolongée passeroit par le centre* (fig. 15); *mais si les sécantes sont tirées à la partie concave* db (fig. 16), *celle qui passe par le centre est la plus longue. Si les sécantes sont intérieures, la plus courte sera celle qui prolongée passeroit par le centre lorsque l'origine se trouve au-dessous du centre* (fig. 17); *mais si le point* a *est au-dessus du centre* (fig. 18), *la plus longue est celle qui passe par le centre.* Ayant tiré le rayon dc, la ligne anguleuse adc (fig. 15) est plus longue que abc; donc retranchant de ces deux lignes les rayons égaux cb, cd, il restera $ad>ab$; donc 1°. &c. 2°. (fig. 16) $acd>ad$; mais $acd=acb$, puisque ces deux lignes ayant la partie commune ac, ont encore les parties égales dc, bc; donc $acb>ad$; donc 2°. &c. 3°. (fig. 17) $cad>cd=cb=ca+ab$; donc $(ad+ac-ac)>(ca+ab-ac)$, ou $ad>ab$; donc 3°. &c. 4°. (fig. 18) $ac+cd=ac+cb$; or $ac+cd>ad$, puisque ad est une ligne droite & acd une ligne anguleuse; donc $ab>ad$; donc 4°. &c.

COROLLAIRE. Donc si le point a est à la circonférence (fig. 19), le diametre $acb=acd$ sera plus grand que la corde ad; donc de toutes les cordes le diametre est la plus grande.

REMARQUE. D'un point a pris en dedans ou en dehors, ou à la circonférence d'un cercle (fig. 15, 16, 17, 18 & 19) l'on ne peut évidemment tirer que deux lignes ad, ap, qui s'éloignent également de la ligne ab, l'une d'un côté

& l'autre de l'autre; & par conséquent il ne peut y avoir (fig. 19) que deux cordes égales *ad*, *ap* tirées d'un même point *a* de la circonférence d'un cercle; c'est-à-dire, que les cordes également éloignées du centre sont égales. Il est d'ailleurs évident que les plus petites cordes répondent aux plus petits arcs & réciproquement.

25. THÉOREME. *On ne peut faire passer aucune ligne droite entre la circonférence & la tangente; mais on peut y faire passer une infinité de courbes.* Car si *ab* (fig. 20) est tangente, *ca* lui sera perpendiculaire (19); donc *ca* seroit oblique sur la ligne *ad* qu'on voudroit faire passer entre la tangente *ab* & la circonférence; donc du point *c* menant *co* perpendiculaire sur *ad*, *co* seroit plus courte que *ca* (19); donc le point *o* est dans le cercle; donc *ad* coupe le cercle, & par conséquent ne passe pas entre la circonférence & la tangente; donc, &c. Mais si dans la figure 21 on prolonge *ac* jusqu'en *p*, & que du rayon *pa* & du point *p* comme centre on décrive le cercle *adh*, il est évident que *ab* sera encore tangente à ce cercle, comme elle l'est au cercle *ao*, & de plus que ces deux cercles n'auront d'autre point commun que le point *a*; car le point *d*, *par exemple*, ne sauroit être commun aux deux cercles. En effet tirant *dc*, on aura, par rapport au grand cercle, une sécante intérieure, qui prolongée ne passeroit point par le centre *c*. Donc (24) $dc > ac = co$; donc le point *o* du petit cercle ne peut pas se confondre avec le point *d* du grand; donc ces deux cercles n'ont d'autre point commun que le point *a*, & le grand embrasse le petit sans le couper; donc, &c. En prolongeant le rayon *ap* on pourroit

décrire un troisiéme cercle qui embrasseroit le cercle *adh*, & n'auroit avec lui d'autre point commun que le point *a*, & ainsi de suite. Donc on peut faire passer autant de circonférences que l'on voudra entre la tangente *ab* & la petite circonférence, sans couper ni l'une ni l'autre ligne.

REMARQUE. Cela vient de ce que la circonférence du cercle *adh* se détourne pour embrasser la petite circonférence, & la circonférence d'un troisiéme cercle se détourneroit de même pour embrasser le cercle *adh*; mais la ligne droite *ad* allant toujours dans la même direction, doit couper la petite circonférence.

COROLLAIRE. De-là il suit que l'espace *bo*, si petit qu'il soit, peut se diviser en une infinité de parties, puisqu'en faisant passer tant de cercles qu'on voudra (on prend ici la circonférence pour le cercle) entre la tangente & la circonférence, ces cercles couperont la ligne *ob* en tant de parties que l'on voudra.

De la mesure des Angles.

26. Nous avons déja dit (7) que la mesure d'un angle qui a son sommet au centre d'un cercle, doit s'estimer par le nombre des degrés, minutes, secondes, &c. de l'arc compris entre ses côtés; de sorte qu'un angle qui a son sommet au centre du cercle, a pour mesure l'arc compris entre ses côtés. D'où il suit qu'étant donné un angle *bac* (fig. 22), pour faire un autre angle *hfg* sur la ligne *fg*, égal au premier, du point *a* & d'un intervale à discrétion *ac* décrivez l'arc *bc*, du point *f* comme centre & de la même ouverture de compas décrivez un arc indéfini *gh*, prenant

avec le compas la grandeur de l'arc bc, portez-la de g en h, par les points f, h, tirez la ligne fh, & l'angle hfg sera égal à l'angle bac : car ces deux angles sont mesurés par des arcs égaux décrits de la même ouverture de compas.

27. Théoreme. *L'angle à la circonférence formé par deux cordes* ab, ad, *ou par une tangente* ga *& par une corde* ba, *a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés* (fig. 12). Car si l'on suppose qu'un de ses côtés soit un diametre, en tirant par le centre c la ligne hf parallele au côté ba, les angles bad, fcd (étant correspondans) sont égaux (13); mais l'angle fcd ayant son sommet au centre, a pour mesure l'arc $fd = ah$ (parce que ces deux arcs mesurent des angles opposés au sommet) $= bf$ à cause des paralleles ba, fh (23); donc $fd = bf$; donc $bad = fcd$ a pour mesure fd ou bf, ou la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Mais par la propriété de la tangente, la ligne ca lui est perpendiculaire, & par conséquent l'angle gad est droit; donc gad a pour mesure la moitié de la demi-circonférence abd, ou $\frac{ab}{2} + \frac{bd}{2}$; or bad a pour mesure $\frac{bd}{2}$; donc gab a pour mesure $\frac{ab}{2}$; donc, &c. *

Remarque. Nous avons supposé qu'un des côtés ad de l'angle passoit par le centre, mais la

* L'angle formé par une corde & une tangente, s'appelle *angle du segment*, tel est l'angle gab. L'angle bad formé par deux cordes, ou par un diametre & une corde, est appellé *angle inscrit*.

même chose a lieu dans le cas contraire (fig. 23); car l'angle baf, entre les côtés duquel se trouve le centre c, peut être divisé en deux parties par le diametre ad, & par le Théorême présent, l'une de ses parties a pour mesure $\frac{bd}{2}$, & l'autre $\frac{df}{2}$; or ces deux moitiés valent $\frac{bf}{2}$; donc, &c. A l'égard de l'angle gaf, hors duquel se trouve le centre c, ayant tiré le diametre ad, il est visible, par le Théorême, que l'angle dag a pour mesure $\frac{gd}{2} = \frac{df}{2} + \frac{fg}{2}$; mais l'angle fad a pour mesure $\frac{df}{2}$; donc l'angle gaf a pour mesure $\frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc l'angle pab formé par une corde ab, & le prolongement pa d'une autre corde, a pour mesure la moitié de la somme des arcs ab, ag soutendus par ces cordes; car les angles pab, bag sont deux angles contigus, qui par conséquent (9) valent deux angles droits, c'est-à-dire, la moitié du cercle entier. Or le seul angle bag vaut la moitié de l'arc bdg; donc l'angle pab a pour mesure la moitié du reste du cercle, c'est-à-dire $\frac{ab}{2} + \frac{ag}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc 1°. les angles inscrits a & b appuyés sur le même arc df sont égaux (fig. 24), & chacun d'eux vaut la moitié de l'angle central dcf. 2°. Un angle bad appuyé sur le diametre bd, & qui a son sommet à la circonférence, est droit (fig. 25), parce qu'il a pour mesure la moitié de la demi-circonférence bfd, ou 90°. L'angle fad appuyé sur un arc plus petit que la

demi-circonférence eſt aigu, & l'angle bag, appuyé ſur un arc bfg plus grand que la demi-circonférence eſt obtus. En général le plus grand angle eſt meſuré par la moitié d'un plus grand arc, & un plus petit angle par la moitié d'un plus petit arc, lorſqu'il eſt queſtion des angles inſcrits, ou des angles qui ont leur ſommet à la circonférence du cercle.

REMARQUE. Si deux angles dcf, daf ſont appuyés ſur la même baſe df (fig. 24) & que leur ſommet ſoit ſitué ſur la même ligne ac perpendiculaire à df, celui qui aura ſon ſommet a plus éloigné de df, ſera le plus petit, puiſqu'il eſt évident qu'à proportion que les côtés da, af s'alongent pour que le point a parvienne juſqu'à la circonférence du cercle dfb, l'angle daf doit diminuer; à plus forte raiſon il diminuera davantage ſi les côtés ſe rencontrent au-delà de cette circonférence.

28. PROBLEME. *Sur l'extrémité de la ligne* ab (*qu'on ſuppoſe ne pouvoir être prolongée*) *mener une perpendiculaire* db (*fig.* 26). D'un point quelconque c hors de cette ligne & d'un intervale cb décrivez un cercle dba: par le point a, où ce cercle coupe la ligne ab, tirez le diametre acd, & du point d la ligne db, qui ſera perpendiculaire ſur ab. En effet l'angle dba eſt appuyé ſur un diametre; donc (27) il eſt droit; donc, &c.

29. PROBLEME. *D'un point* a *hors d'un cercle* dp, *mener une tangente à ce cercle* (fig. 27). Diviſez en deux également la diſtance ac entre le point a & le centre du cercle donné; du point o milieu de la ligne ac & de l'intervale ao, décrivez un cercle apd qui coupera le premier en d & en p. Par le point a & les points d & p tirez les lignes ad, ap, elles ſeront tangentes du cercle adp: car les

angles *adc*, *apc*, étant appuyés ſur le diametre *ac*, ſont droits; donc les lignes *ap*, *ad* ſont perpendiculaires ſur les rayons *cd*, *cp*; donc les lignes *ap*, *ad* ſont des tangentes (19).

30. THÉOREME. *L'angle excentrique* * bad *a pour meſure la moitié de deux arcs* bd, fg *compris entre ſes côtés prolongés* (fig. 28). Car ayant tiré *gh* parallele à *fd*, les angles correſpondans *bad*, *bgh* ſeront égaux (13); or (27) la meſure de l'angle *bgh* eſt $= \frac{bdh}{2} = \frac{bd}{2} + \frac{gh}{2}$; mais $dh = fg$ (23) à cauſe des paralleles *fd*, *gh*; donc la meſure de l'angle *bad* eſt $= \frac{bd}{2} + \frac{fg}{2}$; donc, &c.

REMARQUE. Si la ligne *gh* devenoit tangente, l'arc *gh* s'évanouiroit, & alors *gf* ſeroit égal à *gd*, & le Théorême auroit également lieu.

31. THÉOREME. *L'angle circonſcrit* dab (*c'eſt-à-dire dont le ſommet eſt hors du cercle*) *a pour meſure la moitié de l'arc concave* bd, *compris entre ſes côtés moins la moitié de l'arc convexe* gf (fig. 29). Car ayant tiré *gx* parallele à *da*, les angles correſpondans *dab*, *xgb* ſeront égaux; mais l'angle inſcrit *xgb* a pour meſure $\frac{xb}{2}$; & *xb* eſt égal à $db - dx$, & *dx* eſt $= gf$ à cauſe des paralleles *df*, *gx*; donc $\frac{xb}{2} = \frac{db}{2} - \frac{fg}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE. Si la ligne *ad* devient tangente, de maniere que *ad* ſe confonde avec *ap*, l'arc *fpd*

* Un angle qui a ſon ſommet entre la circonférence & le centre, eſt appellé *ex-centrique*; mais on appelle *angle circonſcrit* celui qui a ſon ſommet hors du cercle.

s'évanouira, les deux points f & d se confondront en p, & l'angle pab aura pour mesure $\frac{pnb}{2} - \frac{pg}{2}$. On voit aussi que l'angle pam, formé par deux tangentes ap, am, a pour mesure la moitié de l'arc concave, moins la moitié de l'arc convexe, c'est-à-dire $\frac{pbm}{2} - \frac{pgm}{2}$.

Des Polygones.

32. Une *figure rectiligne* ou un *polygone rectiligne*, est un espace renfermé par des lignes droites, qu'on appelle *côtés du polygone*, ou *de la figure.* Il est évident qu'il faut au moins trois lignes pour renfermer un espace. Les polygones prennent différens noms, selon le nombre de leurs côtés. Le *triangle* est un polygone de trois côtés, le *quadrilatere* en a quatre, le *pentagone* cinq, l'*exagone* six, l'*eptagone* sept, l'*octogone* huit, l'*énéagone* neuf, le *décagone* dix, l'*ondécagone* onze, le *dodécagone* douze, &c. On appelle *polygone régulier* celui dont les côtés sont égaux entr'eux aussi-bien que les angles; dans le cas contraire les polygones sont dits *irréguliers.* Les *polygones symmétriques* sont ceux qui sont composés des côtés paralleles & égaux deux à deux; d'où il suit qu'ils doivent avoir un nombre pair de côtés.

Un triangle, dont les trois côtés sont égaux entr'eux, s'appelle *triangle équilatéral* : tel est le triangle bac (fig. 30); si deux de ses côtés seulement sont égaux, on le nomme *isocelle*, tel est le triangle bac (fig. 31); mais si les trois côtés du triangle bac (fig. 32) sont inégaux, le triangle est

appellé *ſcalene*. Un triangle dont tous les angles ſont aigus s'appelle *acutangle*, celui qui a un angle droit s'appelle *triangle rectangle*, & l'on nomme *triangle obtuſangle* celui qui a un angle obtus. La figure 30 repréſente un triangle acutangle, la figure 31 un triangle rectangle, & la figure 32 un triangle obtuſangle. Dans un triangle le côté oppoſé à un angle s'appelle *la baſe* de cet angle; ainſi *b c* eſt la baſe de l'angle *a* (fig. 32). Mais ſi l'angle *a* eſt droit (fig. 31) la baſe *b c* eſt appellée *hypothénuſe*.

33. THÉOREME. *Les trois angles d'un triangle quelconque* abc *valent deux angles droits* (fig. 33). Ayant fait paſſer une circonférence de cercle par les trois points *b*, *a*, *c* (21), chaque angle aura pour meſure la moitié de l'arc compris entre ſes côtés; donc les trois angles *a*, *b*, *c* auront pour meſure $\frac{bc}{2} + \frac{ac}{2} + \frac{ab}{2} = \frac{abca}{2} = 180°$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un triangle ne peut avoir qu'un ſeul angle droit ou un ſeul angle obtus, autrement la ſomme de ſes trois angles vaudroit plus de deux angles droits.

COROLLAIRE II. Si le triangle *bac* eſt ſuppoſé rectangle en *a*, les angles *b* & *c*, ſitués ſur l'hypothénuſe *b c*, vaudront un angle droit, & ſeront complémens l'un de l'autre (7).

COROLLAIRE III. Si dans un triangle on connoît deux angles, on connoîtra le troiſiéme, en ôtant la valeur de ces deux angles de 180°.

COROLLAIRE IV. Dans un triangle *a b c*, le plus grand angle *a* eſt oppoſé au plus grand côté, & le plus petit angle *b* au plus petit côté *a c*, & réciproquement le plus grand côté eſt oppoſé

au plus grand angle, & le plus petit côté au plus petit angle; car si *a* est plus grand que *b*, donc la moitié de l'arc *bc*, mesûre du premier angle, sera plus grande que la moitié de l'arc *ac*, mesure du second; donc l'arc *bc* sera plus grand que l'arc *ac*; donc la corde *bc* sera plus grande que la corde *ac*; donc 1°. &c. 2°. si la corde *bc* est plus grande que la corde *ac*, l'arc *bc* sera plus grand que l'arc *ac*, & la moitié du premier arc plus grande que la moitié du second, c'est-à-dire que la mesure de l'angle *a* sera plus grande que la mesure de l'angle *b*; ainsi l'angle *a* sera plus grand que l'angle *b*.

COROLLAIRE V. Il suit du dernier Corollaire que si les trois angles *a*, *b*, *c* sont égaux, les trois côtés opposés le seront aussi, c'est-à-dire qu'un triangle équiangle est équilatéral & réciproquement. De plus si deux angles *d* & *b* seulement sont supposés égaux, les côtés opposés à ces angles seront égaux, & réciproquement si un triangle a deux côtés égaux, les angles opposés à ces côtés seront égaux; donc dans un triangle isocelle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.

34. THÉOREME. *L'angle extérieur* acd *formé par un côté* ac *& le prolongement* cd *d'un autre côté vaut les deux angles intérieurs opposés* a *&* b (fig. 32). Car l'angle *acd* avec l'angle *acb* valent deux angles droits; mais le même angle *acb* avec les deux autres angles *a* & *b* valent de même 180° (Théorême précédent); donc l'angle *acd* vaut les deux angles *b* & *a* opposés; donc, &c.

35. THÉOREME. *Deux triangles* abc, dfg (fig. 34) *qui ont un angle* a *&* d *égal, & les côtés qui comprennent cet angle égaux de part & d'autre, sont*

égaux en tout. Car si l'on conçoit le côté df exactement appliqué sur ab, le point d sur le point a, le point f sur le point b; ces deux côtés égaux se confondront; & parce que l'angle a est égal à l'angle d, le côté dg tombera sur ac & le point g sur le point c; donc fg tombera sur bc; donc les deux triangles se confondront; donc ils sont égaux.

COROLLAIRE. Deux triangles abc, dfg qui ont leurs trois côtés égaux, chacun à chacun, sont égaux en tout. Car posant df sur ab, ces deux côtés égaux se confondront; or je dis que dg tombera sur ac, le point g sur le point c, & que l'angle d sera égal à l'angle a; car autrement fg ne seroit pas $= bc$, puisque le côté dg s'écarteroit plus ou moins du côté df, que ac de ba; donc l'angle a est égal à l'angle d. Mais les deux côtés qui comprennent l'angle a & ceux qui comprennent l'angle d sont égaux; donc par le Théorême, les deux triangles sont égaux.

36. THÉOREME. *Deux triangles* abc, fdg *qui ont un côté* bc, fg *égal de part & d'autre, & les angles* b *&* c, f *&* g *sur ce côté, égaux chacun à chacun, sont égaux en tout*. Car posant fg sur bc, le point f sur le point b, le point g sur le point c, il est visible (à cause de $f = b$ & de $g = c$) que fd tombera sur ba & gd sur ca; donc d tombera sur a, & les deux triangles se confondant ne feront qu'un seul & même triangle. Ils sont donc égaux.

37. PROBLEME. *Faire un triangle* abc *égal au triangle* dfg. Ayant tiré $bc = fg$, faites (26) l'angle abc égal à l'angle dfg, & l'angle acb égal à l'angle dgf, tirant les lignes ab, ac jus-

qu'à ce qu'elles ſe rencontrent en *a*, vous aurez les deux triangles *bac*, *dfg* qui auront un côté égal de part & d'autre, & les deux angles ſur ce côté égaux chacun à chacun; donc par le Théorême précédent ces triangles ſeront égaux.

38. THÉOREME. *La ſomme de tous les angles d'un Polygone* abcdf (fig. 35) *vaut autant de fois deux angles droits, que le Polygone a de côtés moins deux.* Car ſi du ſommet d'un des angles *a* du Polygone on tire à tous les autres angles (excepté aux deux angles voiſins) des lignes *ad*, *ac*, il eſt viſible qu'on formera autant de triangles moins deux qu'il y a de côtés, & les angles de ces triangles ſeront formés des angles mêmes du Polygone. Mais les angles de chacun de ces triangles valent deux angles droits; ainſi les angles du Polygone valent autant de fois deux angles droits, qu'il a de côtés moins deux.

REMARQUE. Lorſque dans les Polygones il y a un angle rentrant *d** (fig. 36), le Théorême ne peut être vrai, à moins qu'on ne prenne pour cet angle ſon ſupplément à 360°, parce que les angles *adf*, *adc*, joints à l'angle *fdc*, valent 360° (11); or la ſomme des angles *adf*, *adc* jointe aux autres angles du Polygone, vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc pour avoir la ſomme des angles d'un Polygone de 8 côtés, il faut multiplier 180° par $8 - 2 = 6$, le produit 1080° ſera la valeur des angles du Polygone. En général appel-

* On appelle *angle rentrant* celui qui rentre dans la figure, l'*angle ſaillant* eſt celui qui ſort pour ainſi dire de la figure.

lant n le nombre des côtés, s la ſomme des angles du Polygone, r l'angle droit, on aura $s = 2r \times (n - 2) = 2nr - 4r$.

COROLLAIRE II. Si le Polygone eſt régulier, la valeur de chaque angle ſe trouvera en diviſant la ſomme des angles par le nombre des angles ou des côtés (parce que dans ce cas tous les angles du Polygone ſont égaux (32)); ainſi la valeur de chaque angle ſera $= \frac{2nr - 4r}{n}$. Dans le cas du triangle équilatéral, cette quantité, que j'appelle x, eſt $= 60°$; pour le quarré on a $x = 90°$, $108°$ pour le pentagone, $120°$ pour l'exagone, $135°$ pour l'octogone, &c.

39. THÉOREME. *La ſomme des angles extérieurs d'un Polygone vaut 4 angles droits, ou 360°* (fig. 37). Car chaque angle intérieur abc, joint à ſon extérieur cbp, vaut deux angles droits, puiſque ce ſont deux angles contigus; donc la ſomme des angles intérieurs & extérieurs vaut autant de fois deux angles droits qu'il y a d'angles ou de côtés. Mais (Théorême précédent) les ſeuls angles intérieurs valent autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux; donc les angles extérieurs valent ſeulement deux fois deux angles droits, ou quatre angles droits.

COROLLAIRE. Si le Polygone eſt régulier, les angles extérieurs ſeront égaux entr'eux auſſi-bien que les intérieurs; donc l'angle extérieur d'un Polygone régulier ſe trouvera en diviſant 360° par le nombre des angles ou des côtés, ou par n; ainſi la formule générale de la valeur y de l'angle extérieur d'un Polygone régulier quelconque ſera $y = \frac{360}{n}$. Si $n = 8$ l'on aura $y = 45$; c'eſt-à-dire que l'angle

l'angle extérieur de l'octogone régulier vaut 45°.

40. THÉOREME. *Si par tous les angles* a, b, d *&c. d'un Polygone régulier* (fig. 38) *on tire des lignes* a c, b c, d c *&c. qui partagent ces angles en deux également, ces lignes partageront le Polygone en autant de triangles égaux qu'il a de côtés.* Car l'angle *a* étant égal à l'angle *b* (puisque le Polygone est supposé régulier), *b a c* moitié de *a* sera = *a b c* moitié de *b*; donc le triangle *b a c* a deux angles égaux *b a c*, *a b c*; donc (33) les côtés *a c*, *b c* opposés à ces angles sont égaux. On démontrera de même que le côté *b c* = *d c*, &c.; donc les deux triangles *b a c*, *b d c* qui ont tous leurs côtés égaux seront égaux (35): on peut prouver la même chose pour les autres triangles; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc si du point *c* comme centre, & de l'intervalle *a c* on décrit un cercle, il passera par tous les angles du Polygone qui se trouvera inscrit dans le cercle *; de sorte qu'on peut toujours inscrire un Polygone régulier dans un cercle.

REMARQUE. On appelle *rayon oblique* une ligne *a c* menée du centre *c* à un angle *a* quelconque du Polygone régulier; mais on appelle *rayon droit* une perpendiculaire *c p* tirée du centre *c* sur un côté quelconque *g h* du Polygone régulier.

COROLLAIRE I. Le point *c* est le centre du Polygone, & les angles au centre *a c b*, *b c d*, &c. opposés à des côtés égaux, sont évidemment égaux: en effet les cordes *a b*, *d b* ne peuvent être égales sans que les arcs correspondans le soient; donc les angles dont ces arcs sont les mesures, sont égaux.

* Un Polygone *inscrit* dans un cercle, est un Polygone dont les côtés sont des cordes; un Polygone *circonscrit* à un cercle, est celui dont les côtés sont des tangentes du cercle.

COROLLAIRE II. Les angles au centre d'un Polygone régulier, ayant pour mesure le cercle entier, valent 360°, & chacun d'eux est égal à $\frac{360}{n}$ (*n* étant le nombre des angles du Polygone); mais (39) les angles extérieurs d'un Polygone régulier valent aussi 360°, & chacun d'eux est $= \frac{360}{n}$; donc la somme des angles au centre d'un Polygone régulier est égale à la somme des angles extérieurs, & chacun des premiers est égal à chacun des seconds.

COROLLAIRE III. Si le Polygone régulier *abdfgh* est un exagone, l'angle au centre sera de 60°; car l'angle au centre aura pour mesure la sixiéme partie de la circonférence du cercle, & à cause du triangle isocelle *bac*, chacun des angles sur la base *bc* sera aussi de 60°; donc le triangle *bac* sera équiangle & équilatéral; donc le côté *ab* de l'exagone régulier est égal au rayon du cercle.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire précédent, que pour inscrire un Exagone régulier dans un cercle, il suffit de porter le rayon *ac* du cercle 6 fois sur la circonférence; & pour inscrire un dodécagone régulier dans le cercle, il suffira de diviser en deux également les arcs *ba*, *bd*, &c: (22), & par les points de division tirant les lignes *ma*, *mb*, *nb*, *nd*; &c. l'on aura un dodécagone régulier inscrit.

REMARQUE. Etant donné un angle *bca* pour le diviser en deux également, du sommet de l'angle *c* on décrira l'arc *ba* qu'on coupera en deux parties égales au point *m*, si par le point *c* & par le point *m* on tire la ligne *cm*, l'on aura les angles *acm*, *bcm* mesurés par des arcs égaux *ma*, *bm*; donc ces angles sont chacun la moitié de l'angle *acb*; donc, &c.

41. THÉORÈME. *Tous les rayons droits* $c\,p$, $c\,q$, *&c. d'un Polygone régulier sont égaux*. Car le rayon oblique $c\,h$ divisant en deux également l'angle h (voyez le Théorême précédent), les triangles rectangles $c\,h\,p$, $c\,h\,q$ ont le côté commun $h\,c$, & les angles sur ce côté égaux. En effet $c\,h\,p = c\,h\,q$, mais p & q étant droits, les angles $q\,c\,h$, $p\,c\,h$ sont complémens des angles égaux $c\,h\,p$, $c\,h\,q$; donc ils sont égaux; donc les triangles $c\,h\,p$, $c\,h\,q$ ont deux angles égaux sur un même côté; donc ils sont égaux; donc $c\,p = c\,q$; donc, &c.

42. THÉOREME. *Le rayon droit d'un Polygone régulier est d'autant plus petit que le Polygone a moins de côtés* : par exemple, *le rayon droit du pentagone régulier* (fig. 39) *est plus petit que le rayon droit de l'exagone régulier*. Car moins le Polygone a de côtés, plus chacun de ses côtés est grand; donc en supposant les Polygones inscrits dans le même cercle, le rayon droit du pentagone sera une perpendiculaire abaissée du centre sur une plus grande corde; donc cette perpendiculaire sera plus petite que si la corde étoit plus petite; c'est-à-dire, si le Polygone avoit plus de côtés : puisque les cordes sont d'autant plus éloignées du centre, qu'elles sont plus petites; donc, &c.

43. PROBLEME. *Inscrire un cercle dans un Polygone régulier* a b d f g (fig. 39). Tirez les rayons obliques $b\,c$, $d\,c$ qui partagent les angles b, d, &c. en deux également. Menez par le centre c sur le côté $f\,g$ la perpendiculaire $c\,p$, qui coupera $f\,g$ en deux également (20). Du point c comme centre & de l'intervalle $c\,p$ décrivez un cercle $p\,p$, il est visible que tous les rayons droits $c\,p$, $c\,p$, &c. étant égaux & perpendiculaires sur les côtés $a\,g$, $g\,f$,

&c., ces côtés seront des tangentes du cercle; donc tous les côtés de ce Polygone seront des tangentes du cercle, ou (ce qui revient au même) le Polygone sera circonscrit au cercle $p\,p$.

REMARQUE. Si du point c & de l'intervalle cd on décrit un second cercle $db\,a\,g\,f$, le Polygone sera inscrit dans ce second cercle & circonscrit au premier.

44. PROBLEME. *Inscrire un Polygone régulier dans un cercle.* Cherchez, par le moyen du *rapporteur* (qui n'est autre chose qu'un demi-cercle $a\,p\,d$ (fig. 40) divisé en degrés *), l'arc correspondant au côté du Polygone; *par exemple*, l'arc de 72° s'il est question d'un pentagone. Du centre c du rapporteur & du cercle donné tirez le rayon cm, qui n'est autre chose que le rayon du rapporteur prolongé. Par le point p que je suppose répondre à la division 72 tirez le rayon cn, l'arc $m\,n$ sera de 72°. Portant la corde mn cinq fois sur la circonférence, vous aurez le pentagone inscrit $n\,m\,s\,q\,x$. Il est visible que cette méthode ne peut s'étendre qu'aux Polygones, dont le nombre des côtés peut diviser exactement 360.

REMARQUE. Pour trouver géométriquement ** l'arc de 30°, ou pour diviser le quart de cercle af

* Cet instrument se trouve dans les étuis de Mathématiques. On peut s'en servir pour partager un angle en deux également. Supposons, *par exemple*, qu'on ait un angle de 30°, ayant appliqué le centre du rapporteur sur le sommet de l'angle, ensorte que le diametre de l'instrument réponde à un des côtés, l'autre répondant à la division 30, on tirera par le centre du rapporteur & la division 15 une ligne qui coupera l'angle donné en deux également; cela suppose que le nombre des degrés est pair.

** Une opération est géométrique lorsqu'on peut l'exécu-

(fig. 41) en trois parties égales, par le moyen de la regle & du compas; il suffit de porter le rayon du cercle d'abord de *a* en *m*, & ensuite de *f* en *n*, pour avoir les arcs *an*, *nm*, *mf* chacun de 30°. En effet, le rayon ou le côté de l'exagone est la corde de 60° (40); donc l'arc $am = 60°$, de même l'arc $fn = 60°$; donc l'arc $an = af - fn = 90° - 60° = 30°$. De même *mf* est de 30 degrés; donc aussi *nm* est de 30°.

COROLLAIRE. Donc on peut facilement inscrire dans un cercle un dodécagone régulier, en portant 12 fois sur la circonférence la corde de 30 degrés.

Des Lignes Proportionelles.

45. On appelle *figures semblables* celles qui ayant un même nombre d'angles & de côtés, ont tous leurs angles égaux chacun à chacun, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels.

LEMME. *Les lignes paralleles* a b, c g (fig. 42) *comprises entre deux lignes paralleles* a c, b g *sont égales*. Des points *a* & *c* ayant abaissé les perpendiculaires *ap*, *cp* sur la ligne *bg* prolongée s'il le faut, les angles *b* & *g* correspondans seront évidemment égaux. De plus les angles en *p* sont égaux & droits, & les perpendiculaires *ap*, *cp* égales (puisqu'elles mesurent la distance des paralleles, qui est par-tout la même); donc le troisiéme angle *bap*, *gcp* dans les deux triangles *bap*, *gcb* sera égal de part & d'autre; donc ces deux triangles ont un côté égal de part & d'autre, & les deux angles sur ce côté égaux; ainsi ces deux triangles sont égaux en tout (36); donc $ab = cg$.

ter par le moyen de la regle & du compas & sans tâtonement, en suivant les principes de la Géométrie.

COROLLAIRE. Si deux lignes paralleles *ac*, *bg* sont autant éloignées l'une de l'autre que deux autres lignes paralleles *xy*, *pp*, & que les paralleles *ab*, *cg* soient autant inclinées sur les lignes *ac*, *bg* que les paralleles *xp*, *yp* le sont entre les lignes *xy*, *pp*, l'on aura les lignes *ba*, *cg* égales entr'elles & aux lignes *xp*, *yp*.

46. THÉOREME. *Si deux lignes* ab, ac (fig. 43) *qui se rencontrent en un point, sont divisées par des paralleles* md, mg, &c. *également éloignées les unes des autres, un nombre quelconque des parties de la ligne* ab, *sera au même nombre des parties de la ligne* ac, *comme une partie de* ab, *à une partie de* ac. Car les parties *dg*, *gf* sont des obliques également inclinées entre paralleles également éloignées; de même les lignes correspondantes *mm*, *mm* sont également inclinées entre paralleles égales. Donc (45) les lignes *dg*, *gf* sont égales entre elles aussi-bien que les lignes correspondantes *mm*, *mm*. D'ailleurs en tirant les perpendiculaires *dp*, *ap*, *mp*, &c., il est visible que les triangles rectangles *apd*, *dpg* ont les côtés égaux *ap*, *dp*, les angles en *d* & en *g* correspondans égaux, & à cause des angles droits *p*, les angles *pad*, *pdg* égaux, de sorte que ces deux triangles ont les côtés *ap*, *pd* égaux & les angles sur ces côtés égaux; donc ces triangles sont égaux en tout & *ad* est = *dg*. Il n'est pas difficile de voir que les triangles *amp*, *mpm* sont dans le même cas, & que par conséquent *am* = *mm*. Cela posé il est évident que *am* : 3·*am* :: *ad* : 3·*ad*, ou *am* : *ad* :: 3·*am* : 3·*ad*; & en général une partie quelconque *am* de la premiere ligne, est à une partie *ad* correspondante de la seconde, comme un nom-

bre quelconque des parties de la premiere, au même nombre des parties de la seconde.

COROLLAIRE. L'on a de même comme deux parties de *a b* à deux parties de *a c*, ainsi trois parties de *a b* sont à trois parties correspondantes de *a c*. Et en général une partie quelconque de *a c* comprise entre deux paralleles, ou entre le sommet & une parallele est à la partie correspondante de *a b* comme une autre partie de la premiere, comprise entre deux paralleles, ou entre le sommet *a* & une parallele, à la partie correspondante de la seconde.

47. THÉOREME. *Deux triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre sont équiangles* (fig. 44). Soit le triangle *g f m* dont les côtés soient supposés perpendiculaires aux côtés du triangle *a b c*, il est visible qu'en faisant tourner le triangle *f g m* sur le point *g*, le côté *f g* perpendiculaire sur *a c* deviendra parallele au côté *a c* lorsque la ligne *g f* aura décrit un quart de cercle, de même *g m* sera parallele à *b a* & *f m* à *b c*; c'est-à-dire que les côtés qui forment les angles correspondans de ces deux triangles seront paralleles; donc les angles correspondans sont égaux (14) & les triangles équiangles.

COROLLAIRE. Il suit, de ce qu'on vient de dire, que les triangles dont les côtés sont paralleles, sont équiangles.

48. THÉOREME. *Les triangles équiangles sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont leurs côtés homologues proportionels* (*les côtés homologues sont ceux qui sont opposés à des angles égaux*). Soient les deux triangles *a b c*, *d f g* (fig. 45) qu'on suppose équiangles. Posant le point *d* sur le point *a*, ensorte que le côté *d f* tombe sur *a b*, il est visible, à cause de l'angle *d* égal à l'angle *a*, que *d g* tom-

bera sur ac ; & prenant $as = df$, $ap = dg$, fg tombera sur sp, & le triangle asp sera égal au triangle dfg ; donc l'angle $s = f$, & $p = g$. Mais par supposition $f = b$ & $g = c$; donc $s = b$ & $p = c$; donc les angles correspondans s & b sont égaux ; donc (15) sp est parallele à bc ; donc (46) $ab : ac :: as$ ou $df : ap = dg$. Si l'on avoit posé l'angle f sur l'angle b, on auroit démontré de même que $ba : bc :: df : fg$. Il est évident (46) que $as : ap :: sb : pc :: ba : ac$.

49. REMARQUE. Si l'on tire la ligne xa parallele à bd, on voit que les lignes as, ap qui sont autant inclinées entre les paralleles xa, sp que les lignes sb & pc le sont entre les paralleles sp, bc, sont proportionelles à ces dernieres.

COROLL. I. Les triangles qui ont leurs côtés perpendiculaires ou paralleles l'un à l'autre sont semblables, car (47) ces triangles sont équiangles ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Deux triangles asp, abc qui ont un angle a égal de part & d'autre, & des bases sp, bc paralleles, sont équiangles & semblables.

50. THÉOREME. *Deux triangles qui ont un angle égal, & les côtés qui comprennent cet angle proportionels, sont semblables.* Supposons l'angle a dans le triangle bac, égal à l'angle d du triangle fgd, & qu'on ait en même tems la proportion $ab : ac :: df : dg$. Prenant sur ab la ligne $as = df$, & tirant sp parallele à bc, il est visible que les deux triangles asp, abc seront équiangles & semblables. Or $dfg = asp$; car (par supposition) $ba : ac :: df : dg$; mais $fd = as$; donc $ba : ac :: sa : dg$. Mais à cause des paralleles sp, bc l'on a (49) $ba : ac :: as = df : ap$; donc $ap = dg$; donc les deux triangles dfg, asp ont un angle

d & *a* égal de part & d'autre, & les côtés qui comprennent cet angle égaux ; donc ils sont égaux en tout. Mais *asp* est semblable à *bac* ; & par conséquent *bac* est aussi semblable à *dfg* ; donc, &c.

51. THÉOREME. *Deux triangles* abc, dfg *qui ont leurs trois côtés proportionels sont semblables.* Car si sur *fg* on fait l'angle *gfh* égal à l'angle *b*, & *fgh* = *c*, il est évident que l'angle *a* sera égal à l'angle *h* ; donc les triangles *abc*, *hfg* seront équiangles & semblables. Or *hfg* = *dfg* : car (par supposition) *bc* : *ab* :: *fg* : *fd* ; mais à cause des triangles semblables *abc*, *hfg* on a de même *bc* : *ab* :: *fg*, *fh* ; donc (puisque les deux premiers termes de cette proportion sont les mêmes) l'on a *fg* : *fd* :: *fg* : *fh*, ou (*alternando*) *fg* : *fg* :: *fd* : *fh* ; mais *fg* = *fg* ; donc *fd* = *fh*. De plus *bc* : *ac* :: *fg* : *dg*, & *bc* : *ac* :: *fg* : *gh* ; donc *fg* : *dg* :: *fg* : *gh*, ou (*alternando*) *fg* : *fg* :: *dg* : *dh* ; mais *fg* = *fg* ; donc *dg* = *gh* ; donc les trois côtés du triangle *dfg* sont égaux aux trois côtés du triangle *hfg* ; donc (35) ces deux triangles sont égaux en tout. Mais *hfg* est semblable à *bac* ; donc *dfg* est aussi semblable au triangle *bac* ; donc, &c.

52. THÉOREME. *Une ligne droite* ap *qui divise en deux également l'angle* bac *d'un triangle quelconque* bac (fig. 46), *coupe le côté opposé en deux parties* bp, pc *proportionelles aux côtés correspondans* ab, ac. Par le point *b* tirez *bd* parallele à *pa*, & prolongez *ca* jusqu'à la rencontre de *bd*. A cause des paralleles *ap*, *db*, les triangles *apc*, *dbc* sont semblables *, & (par les numéros 46

* Car à cause des paralleles *ap*, *db*. les angles *cdb*, *cap* correspondans sont égaux aussi-bien que les angles *cbd*, *cpa* ; donc, &c.

& 49), l'on aura $pb : pc :: da : ac$. Mais à cause des paralleles bd, ap, l'angle $d = pac = bap$ (autre moitié de l'angle bac) $= abd$, puisque ces angles sont alternes-internes entre les paralleles db, ap; donc les angles d & b du triangle dba sont égaux, & par conséquent les côtés qui sont opposés à ces angles sont égaux (33); donc $ba = da$. Mais nous venons de voir que $bp : pc :: da : ac$; donc en substituant, $bp : pc :: ab : ac$.

53. THÉOREME. *Si deux cordes* ab, gf *se coupent dans un cercle* (fig. 47), *les parties de l'une seront réciproques aux parties de l'autre; de sorte que l'on aura la proportion* $ac : gc :: fc : cb$. Car ayant tiré les cordes ag & fb, les deux triangles gac, fcb ont les angles, opposés au sommet, acg, fcb égaux : de plus l'angle a du premier & l'angle f du second sont égaux (étant appuyés sur le même arc gb); donc le troisiéme angle est égal de part & d'autre; donc les deux triangles sont équiangles & semblables; donc leurs côtés homologues sont proportionels; & l'on a $ac : gc :: fc : cb$.

COROLLAIRE I. Si l'une des cordes ab (fig. 48) est un diametre & que l'autre corde fg lui soit perpendiculaire, à cause que cette perpendiculaire est divisée en deux également au point c (20), fc sera $= cg$; donc la proportion du Théorême deviendra $ac : fc :: cg$ ou $fc : cb$. C'est-à-dire qu'une perpendiculaire quelconque fc sur un diametre est moyenne proportionelle entre les deux parties de ce diametre.

COROLLAIRE II. Supposant le diametre $ab = a$, la perpendiculaire $fc = y$, la partie ac du diametre comprise entre l'extrémité a & la rencontre de la perpendiculaire (on l'appelle *abscisse*) $= x$,

l'autre partie cb du diametre sera $a - x$, & la proportion du Corollaire précédent deviendra $x : y$ :: $y : a - x$, ou (faisant le produit des extrêmes égal à celui des moyens) $y^2 = ax - x^2$ *.

COROLLAIRE III. Le triangle afb étant rectangle en f (parce que l'angle f est appuyé sur un diametre), il s'ensuit que dans un triangle rectangle la perpendiculaire abaissée sur l'hypothénuse est moyenne proportionelle entre les deux parties de l'hypothénuse déterminées par cette perpendiculaire.

54. PROBLÊME. *Trouver une moyenne géométrique entre deux lignes données* x & n. Joignez ces deux lignes, ensorte qu'elles ne fassent qu'une seule & même ligne. Divisez leur somme ab en deux également au point p. De ce point comme centre & du rayon pa moitié de ab décrivez un cercle $bfag$, par le point d'union élevez sur ab la perpendiculaire cf jusqu'à la rencontre de la circonférence en f, elle sera moyenne proportionelle entre x & n, par le premier Corollaire du Théorême précédent.

55. THÉOREME. *Si du sommet* f *de l'angle droit d'un triangle rectangle quelconque on abaisse une perpendiculaire* fc *sur l'hypothénuse* ab, *ce triangle sera divisé en deux autres triangles* afc, bfc, *semblables au grand triangle & par conséquent semblables*

* C'est ce qu'on appelle *l'équation du cercle*, & cette propriété convient à toutes les perpendiculaires fc ; de sorte qu'en donnant plusieurs valeurs successives à x & prenant les racines des quantités $ax - x^2$ correspondantes, on déterminera les fc correspondantes aux x, & faisant passer une courbe par tous les points f, on aura un cercle d'autant plus exact que les y seront plus exacts & plus près les uns des autres.

entr'eux. Car 1°. le triangle *afc* a un angle droit en *c*, & un angle *a* commun avec le grand triangle qui a aussi un angle droit en *f*; donc le troisiéme angle est égal de part & d'autre; donc ces deux triangles sont équiangles & semblables. 2°. Le triangle *bfc* a un angle *b* commun avec le grand triangle, un angle droit en *c* comme le grand triangle en a un en *f*; donc ces deux triangles sont équiangles; donc les deux petits triangles sont semblables au grand triangle, & par conséquent semblables entr'eux.

COROLLAIRE I. Il suit de-là que *ac* : *af* :: *af* : *ab*, parce que *ac*, *af* côtés du petit triangle *afc* sont homologues aux côtés *af*, *ab* du grand triangle *a.fb*. De même *bc*, *fb* côtés du triangle *fcb* étant homologues aux côtés *bf*, *ba* du grand triangle, l'on a *bc* : *bf* :: *bf* : *ba*; c'est-à-dire, chaque côté du triangle rectangle *afb* est moyen proportionel entre l'hypothénuse & le segment correspondant *. Il est visible aussi que les deux triangles *acf*, *cfb* donnent *ac* : *cf* :: *cf* : *cb*, ou que la perpendiculaire *fc* est moyenne proportionelle entre les deux parties de l'hypothénuse, ainsi que nous l'avons dit ci-dessus.

COROLLAIRE II. Les côtés *af*, *fb* étant des cordes tirées du même point *f* aux extrémités du diametre *ab*, il suit du Corollaire précédent que si de l'extrémité *f* d'une corde *af* ou *fb* l'on abaisse une perpendiculaire sur le diametre *ab* qui passe par l'autre extrémité de la même corde, cette corde sera moyenne proportionelle entre le diametre & le segment correspondant.

* Les parties d'une ligne s'appellent aussi les *segmens* de cette ligne.

56. Théoreme. *Deux sécantes extérieures* ab, ac *tirées d'un même point à la partie concave* bc *de la circonférence, sont réciproquement proportionelles à leurs parties extérieures au cercle* (fig. 49). Ayant tiré les lignes bd, cf, l'on a les triangles adb, afc semblables, puisqu'ils ont un angle a commun, & les angles b & c appuyés sur le même arc fd; & partant $ab : ac :: ad : af$.

Corollaire. Si l'arc dc s'évanouit, le point c tombera sur le point d, la sécante ac deviendra tangente (fig. 50), & l'on aura toujours $ab : ac :: ac : af$. Ainsi la tangente sera moyenne proportionelle entre la sécante entiere ab, & sa partie hors du cercle.

On dit qu'une ligne ab est divisée *en moyenne & extrême raison* (fig. 51), lorsqu'elle est divisée en deux parties ad, db telles que la ligne entiere est à l'une de ces parties, comme celle-ci est à l'autre partie.

57. Probleme. *Diviser une ligne* ab *en moyenne & extrême raison*. Sur l'extrémité b de cette ligne, élevez la perpendiculaire $ob = \frac{ab}{2}$; du point o comme centre; avec le rayon ob, décrivez le cercle cbf, par le point a & le centre o du cercle, tirez la sécante ac, & prenant $ad = af$, je dis que $ab : ad :: ad : db$. Car ob étant perpendiculaire sur ab, ab sera tangente; donc (Corollaire précédent) $ac : ab :: ab : af = ad$, & (*dividendo*) $ac - ab$, ou $ac - cf$ (à cause du diametre $cf = ab$), ou $fa = ad : ab :: ab - af = ab - ad = db : af = ad$; donc $ad : ab :: bd : ad$, ou mettant les antécédens à la place des conséquens & réciproquement (ce qui ne peut détruire la proportion, puisque le produit des extrêmes reste égal à celui des moyens) $ab : ad :: ad : bd$.

58. Probleme. *Diviser une ligne donnée* ab (fig. 52) *en parties proportionelles aux parties d'une autre ligne* ac. Faites avec ces lignes un angle quelconque cab. Ayant joint les

extrémités b & c par la ligne cb, par les points de division de la ligne ac, menez des paralleles à la ligne cb jusqu'à la rencontre de la ligne ab. A cause des paralleles dx, fp, &c. la ligne ab aura toutes ses parties proportionelles aux parties correspondantes de ac (46).

59. PROBLEME. *Diviser une ligne* ad *en parties égales* (fig. 53). Prenez une ligne indéfinie bc plus grande que ad, portez autant d'ouvertures égales de compas sur cette ligne que vous voulez avoir de parties égales dans ad, disposez ensuite ad parallelement à bc, par le point b & l'extrémité c de la derniere division, tirez les lignes ba, cd qui se rencontreront en un point quelconque x au-dessus de ad (nous supposons $bc > ad$); du point x aux points m, n, p, &c. des divisions de la ligne bc, menez les lignes xp, &c. ces lignes diviseront ad en parties égales aux points o, i, s, &c. En effet à cause des paralleles ao & pb; oi & pm, les triangles xao, xbp sont semblables entr'eux, aussi-bien que les triangles xio, xpm; donc $bp : ao :: xp : xo$. De même les deux derniers triangles dont nous venons de parler donnent $pm : oi :: px : xo$; donc $bp : pm :: ao : oi$; donc $ao = oi$. On démontrera de même que $oi = is$ en se servant des triangles xpm, aio & des triangles xmn, xis; & quel que soit le nombre des parties égales de bc, en procédant de cette maniere l'on démontrera que les parties correspondantes de ad sont toutes égales entr'elles.

60. PROBLEME. *Trouver une quatriéme proportionelle à trois lignes données* a, b, c (fig. 54). Avec les lignes indéfinies pr, ps je fais un angle quelconque p. Je porte la ligne a sur pr de p en x, & b sur ps de p en g, je tire xg. Portant ensuite c de x en o, & tirant oq parallele à xg; il est évi-

dent (à cause des paralleles xg, oq) que px : xo :: pg : gq, ou que $a : c :: b : gq$; donc gq est la ligne cherchée. Si $b = c$, gq sera troisiéme proportionelle aux lignes a & b.

61. DÉFINITION. Deux Polygones sont appellés *semblables* lorsqu'ils ont un même nombre d'angles, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels.

62. THÉORÈME. *Deux Polygones semblables peuvent être divisés par des diagonales qui partent des angles homologues en un même nombre de triangles semblables* (fig. 55). Du point a du pentagone $abcdf$ tirez les diagonales ac, ad, & du point g correspondant du pentagone semblable $ghilm$ tirez les diagonales gi, gl; je dis que les triangles afd, adc, acb sont semblables aux triangles gml, gli, gih. Puisque les Polygones sont semblables, les angles correspondans f & m sont égaux, & les côtés qui comprennent ces angles proportionels (61); donc (50) les triangles afd, gml sont semblables; donc $fd : ml :: ad : gl$; or $fd : ml :: dc : li$ (par la propriété des Polygones semblables); donc $ad : gl :: dc : li$, ou (*alternando*) $ad : dc :: gl : li$; mais l'angle $d = l$ & l'angle $adf = glm$; donc $gli = adc$; donc les triangles adc, gli ont un angle égal, & les côtés autour de cet angle proportionels; donc ils sont semblables. On démontrera la même chose pour les triangles acb, ghi; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les périmetres ou contours des figures semblables p & x, sont entr'eux comme deux côtés homologues (c'est-à-dire semblablement situés dans les figures) quelconques af, gm, ou comme deux diagonales homologues ad, gl sem-

blablement tirées dans les figures. Car à cause de la similitude des figures p & x, $af : gm :: fd : ml :: dc : li :: bc : ih :: ba : hg$; donc la somme des antécédens est à la somme des conséquens, c'est-à-dire, le périmetre de p est au périmetre de x comme $af : gm$, ou comme $ad : gl$, à cause des triangles semblables afd, gml.

COROLLAIRE II. Donc les périmetres de deux Polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont entr'eux comme un des côtés du premier Polygone à un des côtés du second. Car les Polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont des Polygones semblables.

63. THÉOREME. *Deux Polygones réguliers semblables, c'est-à-dire, d'un même nombre de côtés, ont leurs périmetres proportionels à leurs rayons droits & obliques* (fig. 56). Car les rayons obliques oa, rs partagent les angles égaux a & r en parties égales ; mais à cause des angles droits x & p les triangles rxs, aop ont deux angles égaux p & x, pao & srx ; donc le troisiéme angle est égal de part & d'autre, & les deux triangles sont semblables ; ainsi $rs : oa :: sx : op :: rx : pa$; mais xr est la moitié de rn & pa la moitié de ag (parce que la perpendiculaire abaissée du centre sur une corde d'un cercle divise cette corde en parties égales), & les moitiés sont comme les tous ; donc les rayons droits & obliques sont comme les côtés qui (62) sont entre eux comme les périmetres ; donc les périmetres sont entr'eux comme les rayons droits & comme les rayons obliques ; & en général comme les lignes semblablement tirées, qui nécessairement sont entr'elles comme les côtés & les rayons droits ou obliques.

COROLLAIRE. Donc les circonférences des cercles

cercles ſont entr'elles comme leurs rayons, & par conſéquent comme leurs diametres, comme les arcs *ſemblables*, c'eſt-à-dire, d'un même nombre de degrés, comme les cordes de ces arcs, &c. : car les cercles peuvent être conſidérés comme des polygones réguliers d'un même nombre de côtés infiniment petits; donc, &c.

64. THÉOREME. *De tous les Polygones réguliers inſcrits au cercle, celui-là eſt le plus grand qui a plus de côtés, au contraire de tous les Polygones circonſcrits, celui qui a le moins de côtés eſt le plus grand.* Car dans la fig. 39 le pentagone inſcrit differe plus de ſon cercle que l'exagone inſcrit (fig. 38) ne differe du ſien; mais il eſt viſible auſſi qu'en circonſcrivant un quarré & un octogone à un cercle (fig. 57), le quarré différera plus du cercle que l'octogone & ſera plus grand que l'octogone; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc ſi un Polygone régulier inſcrit ou circonſcrit avoit un très-grand nombre de côtés, il ne différeroit pas ſenſiblement du cercle, & l'on pourroit prendre l'un pour l'autre ſans erreur ſenſible.

De la meſure & du rapport des Surfaces.

65. La *ſurface plane* eſt celle qui n'a ni enfoncement ni élevation, & ſur laquelle par conſéquent une ligne droite peut s'appliquer exactement. La *ſurface courbe* au contraire eſt telle qu'on ne peut lui appliquer exactement une ligne droite : telle eſt la ſurface d'une boule.

DÉFINITION. Un quadrilatere *abcd* qui a ſeulement deux côtés *ab*, *cd* paralleles (fig. 58) eſt appellé *trapeze*. S'il n'a aucun côté parallele (fig. 59) on l'appelle *trapézoïde*. S'il a ſes côtés paralleles

deux à deux, on le nomme *parallélogramme* (fig. 60). Si les côtés du parallélogramme sont égaux & que les angles ne soient pas droits, il prend le nom de *rhombe*, & celui de *rhomboïde* lorsque les côtés opposés seulement sont égaux. Si les angles du parallélogramme sont droits (fig. 61), on l'appelle *rectangle* ; mais si les angles étant droits les côtés sont égaux, il se nomme *quarré* (fig. 62). Une ligne *bc* (fig. 58, 60, 62) menée d'un angle d'un quadrilatere à l'angle opposé s'appelle *diagonale*. Une ligne *cd* (fig. 58) sur laquelle on conçoit qu'est posée la figure *cabd*, ou le triangle *cbd*, est appellée *base* de cette figure, ou du triangle *cbd*. Une ligne *ap* tirée du sommet d'un angle *a* perpendiculairement sur la base *cd* (fig. 63), prolongée, s'il le faut, est appellée *hauteur* du triangle *acd*. Si on mene la perpendiculaire *pm* entre les côtés paralleles d'un trapeze (fig. 58), ou d'un parallélogramme (fig. 60), cette perpendiculaire sera la hauteur du trapeze ou du parallélogramme.

66. PROBLEME. *Décrire un parallélogramme dont un des côtés soit égal à la ligne donnée* a (fig. 64), *l'autre côté égal à la ligne* b, *& l'angle compris entre ces côtés* = g. Tirez *cd* = *a*, faites ensuite l'angle *acd* = *g* (26). Prenez *ac* = *b*, tirez *ab* parallele & égal à *cd*, tirant ensuite *bd*, vous aurez le parallélogramme cherché. Si l'angle *g* étoit droit, le parallélogramme seroit un rectangle, & un quarré si les côtés étoient de plus supposés égaux.

67. REMARQUE. Nous avons démontré (45) que les paralleles entre paralleles étoient égales ; donc les côtés opposés d'un parallélogramme sont toujours égaux entr'eux.

68. THÉOREME. *Une diagonale* bc *partage un*

parallélogramme quelconque a b d c *en deux triangles égaux*. En effet $ab = cd$ & $bd = ac$ (remarque précédente); & la ligne *bc* étant commune aux deux triangles *abc*, *cdb*, ces triangles ont leurs côtés égaux chacun à chacun; donc (35) ils sont égaux en tout.

Corollaire. Donc un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur *.

69. Théoreme. *Un parallélogramme & un rectangle de même base & de même hauteur sont égaux en surface*. Des extrémités *a*, *b* du côté opposé à la base ayant abaissé les perpendiculaires *ap*, *bp* sur cette base prolongée s'il le faut; les triangles *acp*, *bdp* auront les angles correspondans *c* & *d* égaux, & les angles droits en *p*; donc ils sont semblables & ont de plus les angles égaux sur les côtés égaux *ac*, *bd*; donc ils sont égaux en tout, & $dp = cp$; donc $pp = ab = cd$; donc le parallélogramme *acdb* & le rectangle *appb* ont même base & même hauteur (puisqu'ils sont compris entre les mêmes paralleles). De plus pour avoir le rectangle il suffit d'ajouter au parallélogramme le triangle *bdp* & d'en retrancher en même tems le triangle $acp = bdp$; donc ces deux figures sont égales; donc, &c.

70. Théoreme. *La surface d'un rectangle est égale au produit de la base par sa hautenr* (fig. 65). Supposant la base *cd* de 6 pieds, la hauteur *ac* de 4; divisez *cd* en 6 parties égales & *ca* en 4. Par les points de division de *cd* menez des pa-

* Le triangle *cbd* a pour hauteur la perpendiculaire *bp* aussi-bien que le parallélogramme *abcd*.

ralleles au côté ac, & par les points de division de ac des paralleles à cd, vous aurez quatre tranches, dont chacune contiendra 6 quarrés égaux, chacun au quarré $poco$ ($poco$ est évidemment un pied quarré) ; donc le rectangle vaut 4 fois 6 pieds quarrés ou 24 pieds quarrés, produit * de la base 6 par la hauteur 4 ; donc, &c.

REMARQUE. Si l'on conçoit que la base cd (fig. 66) monte parallelement à elle-même le long de ac & qu'elle laisse par-tout des traces d'une largeur très-petite, il est évident qu'il y aura autant de traces égales que la hauteur peut contenir de fois la largeur d'une de ces traces, & que la somme de ces traces est égale à sa surface du rectangle ; donc il faudra multiplier une de ces traces par le nombre qui exprime combien de fois sa largeur est contenue dans la hauteur, & en supposant l'épaisseur de la trace infiniment petite, il faudra de même multiplier la trace ou ligne cd par la hauteur ac; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc un parallélogramme est égal au produit de sa base par sa hauteur ; car (69) un parallélogramme & un rectangle de même base & de même hauteur sont égaux.

COROLLAIRE II. Donc un triangle est égal au produit de sa base par la moitié de sa hauteur, ou au produit de sa hauteur par la moitié de sa base, ou à la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

* On ne peut pas multiplier une ligne cd par une ligne ca ; mais on prend le nombre des quarrés qu'on peut former sur cd (en prenant pc pour hauteur), autant de fois que la ligne pc est contenue dans ac. C'est ce qu'on doit entendre quand on dit qu'on multiplie la base par la hauteur.

Car un triangle est la moitié d'un parallélogramme de même base & de même hauteur (68).

COROLLAIRE III. Donc un triangle est égal à un parallélogramme de même base, mais d'une hauteur deux fois moindre.

71. THÉOREME. *La surface d'un trapeze* abcd (fig. 58) *est égale au produit de sa hauteur* mp *par la moitié de la somme des deux bases opposées & paralleles* ab, cd. Car la diagonale bc partage le trapeze en deux triangles de même hauteur que le trapeze (puisqu'ils sont compris entre mêmes paralleles) & dont la base de l'un est ab & celle de l'autre cd; donc la surface de l'un est $mp \times \frac{ab}{2}$, celle de l'autre étant $= mp \times \frac{cd}{2}$; donc la surface du trapeze est $= mp \times \frac{(ab + cd)}{2}$; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc la surface d'un trapeze est égale au produit de sa hauteur mp multipliée par une ligne xg, menée par le milieu x du côté ac parallelement à la base cd. En effet les triangles abc, xnc (semblables à cause des paralleles ab, xn) donnent $ab : xn :: ac : cx :: 2 : 1$. De même les triangles semblables bcd, bng donnent $bd : bg :: cd : ng :: 2 : 1$ (puisque les lignes ac, bd comprises entre les paralleles ab, cd & coupées par une parallele xg doivent être coupées proportionnellement, & la premiere étant coupée en deux également, la seconde doit l'être de même); donc $xn = \frac{ab}{2}$, & $ng = \frac{cd}{2}$; donc $xg = \frac{ab + cd}{2}$; donc $mp \times \frac{(ab + cd)}{2} = mp \times xg$; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc (Calcul 61) *xg* eſt moyenne proportionnelle arithmétique entre les baſes paralleles du trapeze.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la ſurface d'une figure curviligne *apxb* (fig. 67), ayant tiré la ligne *x*A qu'on diviſera en parties égales & aſſez petites pour que les arcs compris entre les lignes *pp* perpendiculaires à *x*A ſoient cenſés des lignes droites, ou du moins puiſſent être conſidérés comme des droites ſans une erreur conſidérable; il eſt viſible qu'il y aura autant de trapezes qu'il y a de points de diviſion, en y comprenant le triangle *pxp* que nous conſidérons comme un trapeze, dont la baſe ſituée en *x* eſt infiniment petite, ou = o. Cela poſé, parce que tous ces trapezes ont une même hauteur = *xn*, il faudra multiplier la demi-ſomme de leurs baſes par la hauteur *nx*, le produit donnera la ſurface cherchée. Or il eſt viſible que chaque baſe *pp* doit être priſe deux fois, parce qu'elle appartient à deux trapezes, tandis que la premiere baſe *ab*, ou la derniere (ſi elle exiſtoit) ne doivent être priſes qu'une fois; donc la moitié de toutes ces baſes ſe trouvera en ajoutant enſemble la moitié des deux extrêmes avec toutes celles du milieu. La ſomme multipliée par *nx* donnera la ſurface cherchée. On peut voir par là comment on pourroit meſurer la ſurface de flotaiſon d'un vaiſſeau.

72. THÉOREME. La ſurface d'un polygone régulier *abdfgh* (fig. 38) eſt égale au produit de ſon périmetre par la moitié de ſon rayon droit *cq*. Car un tel polygone eſt compoſé d'autant de triangles égaux que ce polygone a de côtés, & chacun de ces triangles *ahc* eſt égal au produit du côté *ah* par la moitié de ſa hauteur *cq*; donc la ſurface entiere

du polygone est égale au produit de tous les côtés (ou, ce qui revient au même, au produit de son périmetre) par la moitié du rayon droit, ou au produit du rayon droit par la moitié du périmetre; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc la surface d'un cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon, ou au produit du rayon par la moitié de la circonférence; car un cercle peut être regardé comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, dans lequel le rayon oblique ne differe pas du rayon droit; donc, &c.

COROLLAIRE II. Il suit du dernier Corollaire que la surface d'un secteur acd est égale au produit de l'arc ad qui termine ce secteur par la moitié du rayon (fig. 68); car ce secteur peut être regardé comme une partie déterminée du cercle, *par exemple*, la sixiéme; il faudra donc multiplier l'arc ad ou la sixiéme partie de la circonférence par la moitié du rayon, & l'on aura la surface cherchée. Ou bien d'une autre maniere, considérant le secteur comme composé d'une infinité de triangles, tels que axc, xcb, qui ont tous leur sommet au centre & dont les bases sont des portions infiniment petites de la circonférence, l'on aura la surface de chacun de ces triangles en multipliant sa base par la moitié du rayon ou de sa hauteur; donc la surface totale est égale au produit de toutes les bases, ou de l'arc ad par la moitié du rayon ac.

73. THÉOREME. *De tous les polygones réguliers isopérimetres, c'est-à-dire, qui ont des périmetres égaux, celui qui a le plus de côtés est le plus grand.* Soit un pentagone régulier circonscrit au cercle m (fig. 69), & un exagone régulier du même périmetre circon-

ſcrit au cercle *a*. Il eſt viſible (64) que le cercle *a* eſt plus grand que le cercle *m*; ainſi le rayon $ap > mp$: or en inſcrivant ces figures dans des cercles, *ap* & *mp* ſeroient les rayons droits de ces polygones. Mais (Théoreme précédent) pour avoir les ſurfaces de ces polygones, il faut multiplier les périmetres qui ſont ici égaux, par *ap* & par *mp*; donc le premier produit, c'eſt-à-dire la ſurface de l'exagone, ſera plus grande que le ſecond produit, ou la ſurface du pentagone; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc de tous les polygones réguliers iſopérimetres le cercle eſt le plus grand, car on peut regarder le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

74. THEOREME. *Un cercle* adm (fig. 68) *eſt égal à un triangle rectangle* cmn, *dont la baſe* mn *eſt égale à la circonférence du cercle*, *& la hauteur* cm *égale au rayon du cercle*. Car (72) la ſurface du cercle eſt égale au produit de ſa circonférence *mn* par la moitié de ſon rayon *cm*; or la ſurface du triangle rectangle *cmn* eſt égale au même produit (70); donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la couronne circulaire *mdapu*, compriſe entre deux circonférences concentriques, eſt égale au produit de la demi-ſomme de ces circonférences par la diſtance *um* de ces circonférences. Car tirant *uq* parallele à *mn*, les triangles ſemblables *cuq*, *cmn* donneront $cu : cm :: uq : mn$; or les circonférences de ces cercles ſont entr'elles comme leurs rayons *cu* & *cm* (63), & par conſéquent comme *uq* & *mn*; donc la grande eſt à la petite comme $mn : uq$; or la grande eſt égale à *mn* (par ſuppoſition), donc la petite eſt égale à *uq*; donc le petit cercle eſt égal à

$uq \times \frac{uc}{2}$, & le grand eſt égal à $mn \times \frac{cm}{2}$, c'eſt-à-dire que le petit cercle eſt égal au petit triangle cuq, & le grand eſt égal au triangle cmn; donc la couronne circulaire eſt égale au trapeze $uqmn = \frac{(uq+mn)}{2} \times \frac{um}{2}$ (71); donc, &c.

75. THEOREME. *Deux parallélogrammes dont l'un ſoit appellé* p *& l'autre* q, *ſont entr'eux comme les produits de leur baſe par leur hauteur. Car ſoit* h *la hauteur*, b *la baſe du premier*, f *la hauteur*, g *la baſe du ſecond.* La ſurface du premier ſera (70) $p = hb$, celle du ſecond ſera $q = fg$; donc $p:q::hb:fg$; or la raiſon de $hb:fg$ eſt le produit des raiſons $h:f$ & $b:g$; donc la raiſon de $p:q$ eſt compoſée des raiſons de la hauteur à la hauteur & de la baſe à la baſe; & partant les parallélogrammes ſont entr'eux en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs, ou comme les produits des baſes par les hauteurs.

COROLLAIRE I. Donc les triangles ſont en raiſon compoſée des baſes & des hauteurs; car les triangles ſont les moitiés des parallélogrammes de même baſe & de même hauteur; mais les moitiés ſont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc les parallélogrammes qui ont même baſe ſont comme leurs hauteurs, & s'ils ont même hauteur ils ſont comme leurs baſes; il en eſt de même des triangles.

COROLLAIRE III. Donc deux parallélogrammes ſeront égaux ſi leurs hauteurs ſont en raiſon inverſe de leurs baſes. Car ſi $h:f::g:b$, on aura $hb = fg$, ou $p = q$: ce qui a lieu auſſi pour les triangles.

COROLLAIRE IV. Si les parallélogrammes ſont ſemblables, ils ſont entr'eux comme les quarrés

de leurs bases, ou de leurs hauteurs, ou même comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car dans les parallélogrammes semblables *abdc*, *fhig* (fig. 70) les deux triangles *acp*, *fhp* sont semblables (à cause des angles homologues égaux *c* & *h*, & des angles droits *p* & *p*); donc $ac : fh :: ap : fp$; or $ac : fh :: cd : hi$ (puisque les parallélogrammes sont supposés semblables; donc $cd : hi :: ap : fp$. C'est-à-dire que la raison des bases est égale à celle des hauteurs; donc la raison qui en est composée est doublée, & par conséquent égale à la raison des quarrés des termes d'une des raisons composantes, ou égale à la raison des quarrés des bases, ou des quarrés des hauteurs, ou des quarrés des côtés *ac* & *fh* qui sont entr'eux comme les hauteurs *ap* & *fp*; donc $p : q : b^2 : g^2 :: h^2 : f^2 :: (ac)^2 : (fh)^2$.

COROLLAIRE V. Les surfaces des triangles semblables *cad*, *hfi* (parce que ces triangles ont un angle *c* & *h* égal de part & d'autre, & les côtés qui comprennent cet angle proportionnels) sont entr'elles comme les quarrés de leurs bases *cd* & *hi*, de leurs hauteurs *ap* & *fp*, de leurs côtés homologues *ac* & *fh*, & par conséquent aussi de leurs côtés *ad*, *fi* qui sont dans le même rapport que *ac* & *fh*. Cela est évident, car ces triangles sont moitié des parallélogrammes semblables; donc, &c.

COROLLAIRE VI. La surface d'un parallélogramme dont la hauteur est *h* & la base *b* est égale à la surface d'un quarré, dont le côté *a* est moyen proportionnel entre *h* & *b*. Car si $h : a :: a : b$, l'on a $hb = a^2$; or *hb* est la surface du parallélogramme & $aa = a^2$ celle du quarré; donc, &c.

76. THÉOREME. *Le quarré de l'hypothénuse d'un*

triangle rectangle b a c *est égal à la somme des quarrés* o & m *faits sur les côtés qui comprennent l'angle droit* a (fig. 71). Car la perpendiculaire *ap* abaissée de l'angle droit sur l'hypothénuse divise le triangle *abc* en deux triangles semblables entr'eux, & au grand triangle (55); donc ces triangles sont entre eux comme les quarrés de leurs côtés homologues; & le grand triangle est à la somme des deux autres comme le quarré de l'hypothénuse du grand triangle à la somme des quarrés des hypothénuses des deux autres. Mais la surface du grand triangle est égale à la somme de surfaces des deux petits triangles; ainsi le quarré de l'hypothénuse *bc* est égal à la somme des quarrés *o* & *m* faits sur les deux côtés qui comprennent l'angle droit.

Remarque. On peut démontrer la même chose de cette autre maniere. Selon ce que nous avons déja dit (55), chaque côté du triangle *abc* est moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment correspondant fait par la perpendiculaire *ap*; donc $o = (ba)^2 = bc \times bp = bpnx$, & $m = (ac)^2 = bc \times pc = pxqc$; donc $o + m = (bc)^2 = bcqn$.

Corollaire I. Donc le quarré de la diagonale *bc* d'un quarré *bacd* (fig. 62) est double du quarré du côté $ac = ba$: car le triangle rectangle *bac* est isocelle; donc le quarré de la diagonale est double du quarré de l'un des côtés égaux *ac*, ou *ba*; c'est-à-dire, que l'on a $(bc)^2 = 2 \cdot (ac)^2 = 2 \cdot (ab)^2$. Donc appellant *a* le côté, le quarré de la diagonale sera $2a^2$ & celui du côté sera a^2; donc le quarré de la diagonale sera à celui du côté comme $2a^2 : a^2 :: 2 : 1$, & la diagonale sera au côté comme $\sqrt{2} : 1$; mais $\sqrt{2}$ est incommensurable avec l'unité ou tout autre nombre quelconque; donc le rapport de la diagonale au côté n'est pas de nombre à nombre.

Corollaire II. Soit *a* l'hypothénuse, *b* l'un

des côtés, c l'autre côté d'un triangle rectangle, l'on aura $a^2 = b^2 + c^2$; donc $b^2 = a^2 - c^2$, & $b = \sqrt{(a^2 - c^2)}$. De même $c^2 = a^2 - b^2$ & $c = \sqrt{(a^2 - b^2)}$, l'on a aussi $a = \sqrt{(b^2 + c^2)}$; donc étant donnés les deux côtés pour avoir l'hypothénuse, on prendra la racine de la somme de leurs quarrés; mais étant donné un côté & l'hypothénuse l'on aura l'autre côté en retranchant le quarré du côté donné du quarré de l'hypothénuse, & prenant la racine du reste.

77. THÉOREME. *Les surfaces des polygones semblables sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues ou même de leurs lignes homologues.* Car (fig. 55) les polygones semblables $abcdf$, $ghilm$ peuvent être divisés en triangles semblables par les lignes homologues ac, ad & gi, gl (62). De même les polygônes réguliers semblables (fig. 56) peuvent être divisés en un même nombre de triangles semblables par leurs rayons obliques; or les aires ou surfaces de ces triangles sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; donc (fig. 55) l'aire du polygone p est à l'aire du polygone x comme la somme des aires qui composent la surface du premier à la somme des aires qui composent la surface du second: mais (à cause que les polygones semblables ont leurs côtés & par conséquent les quarrés de ces côtés, aussi-bien que les triangles faits sur ces côtés, proportionnels) on peut considérer les aires qui composent la surface p comme la somme des antécédens, & les aires qui composent la surface x comme la somme des conséquens d'une suite de raisons égales; donc $p : x$ comme l'aire du triangle afd est à l'aire du triangle semblable gml :: $(af)^2 : (gm)^2 :: (ad)^2 : (gl)^2$.

Corollaire I. Donc (fig. 56) les polygones réguliers ſemblables ſont entr'eux comme les quarrés de leurs côtés homologues *a g*, *h r*, ou comme les quarrés de leurs périmetres, qui ſont entr'eux comme les côtés de ces polygones, leſquels côtés ſont entr'eux (63) comme les rayons droits ou obliques; donc les ſurfaces des polygones réguliers ſemblables ſont entr'elles comme les quarrés des côtés, des périmetres, des rayons droits, & des rayons obliques.

Corollaire II. Donc les cercles ſont entr'eux comme les quarrés de leurs lignes homologues, des circonférences, des cordes des arcs ſemblables, des arcs ſemblables, des rayons & des diametres; de ſorte que le rayon d'un cercle étant ſuppoſé double de celui d'un autre cercle, le premier ſera au ſecond comme 4:1.

Corollaire III. Donc les demi-cercles faits ſur l'hypothénuſe & les côtés d'un triangle rectangle *a b c* (fig. 72) ſont entr'eux comme les quarrés de leurs diametres; mais le quarré du diametre du demi-cercle *b a c*, c'eſt-à-dire, le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux autres diametres, ou des deux côtés *a b*, *a c*; donc le grand demi-cercle eſt égal à la ſomme des deux autres. Et ſi le triangle *b a c* (fig. 73) eſt iſocelle, le demi-cercle *b a c* ſera le double du demi-cercle *b o a*, ou *a o c*. C'eſt pourquoi ſi du quart de cercle *p b x a*, & du demi-cercle *b a o*, on retranche le ſegment commun *a x b a*, l'on aura le triangle *b a p* égal à la lunule *b o a x b* *; or nous dirons bientôt com-

* On appelle les lunules *a o b x a*, *a o c x a* *lunules d'Hypocrate*, parce que ce Géometre en a trouvé le premier la quadrature.

ment on peut quarrer un triangle ; donc on peut quarrer cette lunule.

COROLLAIRE IV. Pour faire un demi-cercle *bma* (fig. 72) qui soit à un autre demi-cercle *anc* dans un rapport donné de 2 : 1 ; *par exemple*, prenez *bp* de 2 pieds, ou 2 pouces, &c., & *pc* d'un pied, ou d'un pouce, &c. Sur *bc*, comme diametre, décrivez un demi-cercle. Par le point *p* tirez la perpendiculaire *pa* jusqu'à la rencontre de la demi-circonférence, tirant ensuite les cordes *ba*, *ac*, le triangle *bac* sera rectangle en *a* (parce que l'angle *a* est appuyé sur un diametre), & chacun des côtés *ba* (b), *ac* (c) sera moyen proportionnel entre l'hypothénuse (a) & le segment correspondant ; de sorte qu'en faisant $bp = x$, $pc = p$, l'on aura $b^2 = ax$, $c^2 = ap$; donc $b^2 : c^2 :: ax : ap :: x : p$. Mais les demi-cercles faits sur les côtés b & c sont comme les quarrés b^2 & c^2 de leurs diametres ; donc ces demi-cercles sont entr'eux comme les segmens x & p ; donc, &c.

78. PROBLEME. *Etant donnée une figure* p, *en construire une semblable* x ; *de sorte que* p *soit à* x *dans un rapport donné de* 1 *à* 2, *par exemple* (fig. 74). Ayant pris une ligne *bc* (fig. 72) à discrétion, coupez cette ligne en deux parties *bp*, *pc*, de maniere que *pb* soit à *pc* dans le rapport donné de x à p, ayant ensuite mené les lignes *ba*, *ac*. Prenez sur *ac* (prolongée s'il le faut) $ad = af$, tirez dx parallelement à *bc*, *ax* sera le côté homologue *gm*. Pour trouver les autres côtés de x, faites $ab : af :: ax = gm : z$, z sera $= gh$ côté homologue à *ba*. Ou bien cherchez une quatriéme proportionnelle aux lignes *af*, *ab*, *gm*, cette quatriéme proportionnelle sera $= gh$. Pour avoir *ml*, faites af :

$fd :: gm : ml$, & ainſi des autres. Faites enſuite les angles g, m, l, &c. égaux aux angles correſpondans a, f, d, &c. Diſpoſez les côtés trouvés autour de ces angles, & le Problême ſera réſolu. Car vous aurez $x : p :: (gm)^2 : (af)^2$. Mais gm (de la fig. 74) eſt $= ax$ (fig. 72), & af (fig. 74) eſt $= ad$ (fig. 72); donc $x : p :: (ax)^2 : (ad)^2 :: (ab)^2 : (ac)^2$ (à cauſe des paralleles bc, xd qui rendent les triangles bac, adx ſemblables) $:: bp : pc$ (77), ou ici comme $2 : 1$. Si le polygone p étoit régulier, tous ſes côtés & ceux du polygone x ſeroient égaux entr'eux.

79. PROBLEME. *Étant donnée la hauteur* h *& la baſe* b *d'un parallélogramme* a b d c (fig. 70), *trouver un quarré qui lui ſoit égal en ſurface.* Soit le côté de ce quarré $= x$. En faiſant $h : x :: x : b$ l'on aura $x^2 = hb$, & $x = \sqrt{(hb)}$; c'eſt-à-dire, que le côté du quarré cherché eſt moyen proportionnel entre la baſe & la hauteur du parallélogramme. Or l'on ſait trouver (54) une moyenne proportionnelle entre deux lignes; donc, &c.

COROLLAIRE I. Si le parallélogramme eſt rectangle, ſa hauteur ne differe pas de ſon côté perpendiculaire à la baſe; & il n'y a rien à changer à la méthode.

COROLLAIRE II. Pour quarrer un triangle cad, il ſuffit de prendre une moyenne proportionnelle entre la baſe & la moitié de la hauteur, ou entre la hauteur ap & la moitié de la baſe cd. Car le quarré de cette ligne ſera égal à la ſurface du triangle.

COROLLAIRE III. Pour quarrer un polygone régulier il ſuffit de prendre une moyenne géométrique entre ſon périmetre & la moitié de ſon rayon droit, ou entre ſon rayon droit & la moitié de ſon périmetre. Car un polygone régulier eſt égal

au produit de ſon périmetre par la moitié de ſon rayon droit (72) ; il eſt donc égal à un rectangle, dont la baſe ſeroit égale au périmetre & la hauteur égale à la moitié du rayon droit ; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Donc la ſurface d'un cercle *adm* (fig. 68) eſt égale à un quarré, dont le côté ſeroit moyen proportionnel-géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon. En effet ce cercle eſt égal au triangle rectangle *cmn*, dont la baſe *mn* égale à la circonférence, & la hauteur *cm* égale au rayon du cercle ; donc (Corollaire II) la ſurface de ce cercle eſt égale au quarré dont le côté eſt moyen géométrique entre *mn* & $\frac{cm}{2}$; donc, &c.

REMARQUE. On pourroit donc quarrer le cercle géométriquement ſi étant donnée la circonférence on pouvoit trouver géométriquement le diametre, & par conſéquent le demi-diametre ou le rayon ; mais on n'a pu juſqu'ici trouver en nombres le rapport du diametre à la circonférence. Le rapport approché du diametre à la circonférence, donné par *Archimede*, eſt celui de 7 : 22. Celui de *Métius* eſt de 113 : 355. Un autre Géometre le donne de 100 : 314. Si l'on fait le diametre = 1, la circonférence ſera = 3·14159 à-peu-près, de ſorte que ce rapport eſt 1 : 3·14159 : mais ces rapports ne ſont qu'approchés. Si l'on veut ſavoir quel doit être à-peu-près le côté d'un quarré égal à un cercle de 14 pieds de diametre, on peut faire $7 : 22 :: 14 : x = \frac{22 \times 14}{7} = 44$, circonférence du cercle donné. Multipliant la circonférence 44 par $\frac{7}{2}$, moitié du rayon, le produit 154 pieds quarrés ſera la ſurface du cercle, & prenant une moyenne géométrique entre la circonférence & la moitié du rayon,

on

on aura le côté du quarré cherché, ou bien en nombres prenant la racine de 154, en s'en tenant aux dixiémes vous aurez le côté du quarré égal à 12·4, c'est-à-dire que le côté cherché est de 12 pieds & quatre dixiémes de pied à-peu-près. En se servant d'un rapport plus exact, de celui de *Métius*, *par exemple*, on trouvera dans les différens cas des circonférences fort approchées. Si étant donnée la circonférence on demandoit le diametre, on le trouveroit avec la même facilité par une simple regle de trois. Si, *par exemple*, on demande le diametre d'un cercle dont la circonférence seroit de 66 pieds, l'on fera $22:7::66:x = 21$ à-peu-près; c'est-à-dire, que le diametre cherché est à-peu-près de 21 pieds.

80. PROBLEME. *Réduire un polygone quelconque* fabcd (fig. 75) *en un polygone de même surface, & qui ait un côté de moins*. Tirez la diagonale fc, & par le point d menez-lui la parallele dp jusqu'à la rencontre de af prolongée s'il le faut, par le point c & le point p tirez la ligne pc, la figure $abcp$ aura évidemment un côté de moins que la figure proposée, & de plus lui sera égale en surface : car par cette opération vous retranchez le triangle fdc, mais aussi vous ajoutez le triangle fcp : or ces deux triangles sont égaux en surface, ayant même base fc & même hauteur, puisqu'ils ont leur sommet sur une même ligne dp parallele à leur base. En opérant de même on réduira $abcpa$ en une figure de trois côtés, c'est-à-dire, en triangle.

COROLLAIRE I. Donc on peut réduire un polygone rectiligne en un triangle de même surface.

COROLLAIRE II. Donc on peut quarrer tout

polygone rectiligne, puisque (79) nous savons quarrer un triangle.

REMARQUE. On peut avoir la surface d'un polygone quelconque, en réduisant ce polygone en triangles par le moyen des diagonales que l'on tirera dans ce polygone ; cherchant ensuite les surfaces de chacun de ces triangles, la somme de ces surfaces donnera la surface du polygone. Pour avoir la surface d'un triangle, dont on connoît la base, il suffit de chercher sa hauteur pour la multiplier par la moitié de la base; or la hauteur se trouve en abaissant une perpendiculaire du sommet d'un angle sur la base opposée, laquelle base doit être prise pour la base du triangle.

DES PLANS.

81. *Le Plan* est une surface unie, qui n'a ni enfoncement ni élévation. Nous considérerons les Plans comme ayant une étendue infinie.

Un Plan est dit *perpendiculaire* sur un autre Plan, lorsqu'il le rencontre sans pencher d'un côté ni de l'autre. De même une ligne est dite *perpendiculaire* sur un Plan, lorsqu'elle rencontre ce Plan sans pencher d'aucun côté.

82. THÉOREME. 1°. *Si une ligne* acb * *rencontre un Plan* dmg (*fig.* 76), *la rencontre sera un point* c. 2°. *Une ligne* dc *ne peut avoir deux points communs avec un Plan, sans être toute entiere sur ce Plan, autrement elle ne seroit pas droite.* 3°. *La position d'un Plan* dcm *est déterminée par trois points* d, c, m *qui ne sont pas en ligne droite;* car il est visible qu'alors le Plan auquel ces trois

* Il faut concevoir le point *a* au-dessus du Plan de la figure.

points appartiennent sera fixe. 4°. *Si un plan* pcd *rencontre un plan* gmc, *la section* cd *sera une ligne droite :* puisque cette section est commune à l'un & l'autre plan. 5°. *Si deux plans paralleles, c'est-à-dire qui ne s'approchent ni ne s'éloignent, tels que* ab *&* fg (fig. 77) *sont coupés par un troisiéme Plan* abfg, *les sections* ab, fg *seront évidemment dans le Plan coupant & paralleles entre elles ;* car autrement les Plans *ab*, *fg* se rencontreroient, ce qui ne peut être, puisqu'ils sont paralleles. 6°. *Si une ligne* ac (fig. 76) *est perpendiculaire sur un Plan* dcm, *elle doit être perpendiculaire sur toutes les lignes* cg, cd, *&c. tirées sur ce plan par le point de rencontre ;* car autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Donc les angles *acg*, *acd* doivent être droits. 7°. *On ne peut d'un point* a *hors d'un Plan, ou d'un point* c *dans un Plan mener deux perpendiculaires à ce Plan :* car il est visible que les lignes *ag* & *cp* penchent plus d'un côté que de l'autre. 8°. *La commune section* ab (fig. 78) *des deux Plans* gm, pn *perpendiculaires sur un troisiéme plan* cd, *est perpendiculaire sur ce troisiéme Plan.* Si par le point *b* commun aux deux plans *gm*, *pn* on mene une perpendiculaire *ab* au plan *cd*, cette perpendiculaire doit se trouver dans les deux Plans, autrement elle pencheroit d'un côté ou de l'autre. Cette perpendiculaire est donc la section commune des deux plans.

83. THÉOREME. *L'inclinaison de deux Plans* bn, bq (fig. 79) * *doit s'estimer par l'angle* dxp,

* Il faut concevoir la ligne *xd* (qui appartient au second Plan) comme ayant son extrémité *d* en l'air.

formé par deux lignes dx, px, *perpendiculaires sur la section* ab *de ces deux Plans, & menées l'une dans le plan* bn *& l'autre dans le Plan* bq. Car si l'on conçoit d'abord les deux Plans exactement appliqués l'un sur l'autre, & qu'ensuite ces Plans viennent à s'écarter, le point *d* en s'éloignant du point *p* décrira l'arc *pd* mesure de l'angle *pxd*, ou de l'angle que forment les deux Plans *bn*, *bq*.

REMARQUE. L'inclinaison d'une ligne *pc* sur un plan *mcd* (fig. 76) est égale à l'angle *pcd* formé par la ligne *pc* & la ligne *cd* menée du point *c* où *pc* rencontre le Plan, au point *d* où la perpendiculaire abaissée de l'extrémité *p* de cette ligne rencontre le même plan. Car si l'on conçoit *cp* couchée sur *cd*, en écartant ensuite la ligne *cp* de *cd*, le point *x* qui se trouvoit en *d* au commencement du mouvement décrira l'arc *dx*, mesure de l'angle *pcd*, qui est évidemment l'inclinaison de *cp* par rapport au plan.

84. THÉOREME. *La distance d'un point* p *à un Plan se mesure par la perpendiculaire* pd *abaissée de ce point sur le Plan.* Car *pd* est plus courte que *cp*, puisque *pd* est perpendiculaire sur la ligne *cd*, tandis que *cp* lui est oblique.

85. THÉOREME. 1°. *Si plusieurs Plans se coupent dans la même ligne, les angles qu'ils formeront autour de cette ligne vaudront précisément 360°. 2°. Si plusieurs Plans paralleles sont coupés par un Plan quelconque, les angles correspondans, les angles alternes-internes, alternes-externes seront égaux, & deux angles soit intérieurs, soit extérieurs du même côté du Plan coupant, l'un appartenant à l'un des Plans paralleles, & le second à un autre, vaudront deux angles droits. 3°. Si*

un Plan en coupe un autre, les deux angles de suite que forment ces Plans vaudront deux angles droits. De même deux Plans seront paralleles, si étant coupés par un troisiéme Plan, les angles correspondans sont égaux, si les angles alternes-internes ou alternes-externes sont égaux, &c. Tout cela suit évidemment de la nature des Plans, & de la mesure de l'angle de l'inclinaison des Plans qui se rencontrent.

86. THÉOREME. *Deux droites* dc, gc *qui se rencontrent en un point* c, *sont toujours dans un même Plan.* Car la surface *gcd*, dans laquelle se trouvent ces droites est évidemment un Plan.

87. THÉOREME. *Deux droites* ac, pd *perpendiculaires sur un Plan* gcd *sont paralleles.* Car joignant par la ligne *cd* les points de rencontre de ces lignes avec le Plan, les lignes *ac*, *pd* seront perpendiculaires sur la même ligne *cd* (82); donc selon ce que nous avons dit ci-dessus (18), ces lignes sont paralleles.

88. THÉOREME. *Si deux Plans sont paralleles, une ligne perpendiculaire à l'un des deux sera perpendiculaire à l'autre.* Car autrement ce second Plan seroit incliné sur une perpendiculaire au permier; donc il seroit aussi incliné au premier; donc il ne lui seroit pas parallele, ce qui est contre la supposition; donc, &c.

DÉFINITION. On appelle *angle solide* un angle *c* (fig. 80) formé par le concours de plusieurs angles plans, (un *angle plan* est la surface comprise entre les côtés d'un angle rectiligne,) *acb*, *acd*, *dcb* *: tel est, *par exemple*,

* Il faut concevoir le point *c* élevé au-dessus du plan de la base *abd*.

un des coins d'un dé à jouer. Il est évident que deux angles plans *a c b*, *a c d* ne suffisent pas pour fermer un espace, qu'il en faut au moins trois pour former un angle solide, & que deux quelconques de ces trois sont plus grands que le troisiéme. *Par exemple*, les deux angles *a c b*, *a c d* pris ensemble, forment une surface anguleuse *d c a c b* plus grande que le troisiéme angle plan *d c b*.

89. THÉOREME. *Tous les angles qui forment un angle solide valent toujours moins de* 360° (fig. 81). Car les angles *d c f*, *f c g*, &c. autour du point *c* valent seulement 360°; donc si l'on suppose qu'on éleve en l'air le point *c* jusqu'en *a*, *par exemple*, les côtés *d c*, *f c*, *c g*, &c. s'allongeront & deviendront *d a*, *f a*, *g a*, &c. les bases *d f*, *f g*, &c. restant les mêmes; donc les angles *f c d*, *f c g*, &c. diminueront; donc les angles plans qui forment l'angle solide *a* vaudront moins de 360°.

DES SOLIDES.

90. Le *Solide géométrique*, duquel seul il est ici question, est une étendue qui a les trois dimensions, longueur, largeur & profondeur *. On appelle *prisme* un Solide, dont la grosseur est la même dans toute sa longueur. On peut le concevoir formé par le mouvement d'un plan qu'on nomme *base du prisme*, qui monte parallelement à lui même le long du côté *d h* du prisme (fig. 82), & qui laisse partout des traces d'une épaisseur fort petite. Le prisme est appellé *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonal*, *exagonal*, &c. selon que le plan générateur est un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c. De cette génération du prisme, il suit que chaque côté du *polygone générateur* doit

*Le corps est un assemblage de parties matérielles qui se trouvent souvent dans l'espace que nous appellons *solide*. Cependant bien des gens donnent le nom de *solide* au corps, confondant mal-à-propos le *solide géométrique* avec le *solide physique*.

décrire un parallélogramme pendant le mouvement de ce polygone générateur. Si le polygone générateur eſt un cercle (fig. 83), le priſme eſt appellé *cylindre*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme, le priſme prend le nom de *parallélipipede*. Si le plan générateur eſt un parallélogramme rectangle, on a un *parallélipipede rectangle*. Si le plan générateur eſt perpendiculaire dans ſon mouvement au côté, le priſme eſt *droit ;* s'il lui eſt oblique, le priſme, le cylindre, le parallélipipede ſont dits *obliques*. Si le plan générateur eſt un quarré, & que dans ſon mouvement il ſoit perpendiculaire au côté *a d* (fig. 84), le ſolide ſera un *cube*, pourvu que le côté *a d* ſoit égal au côté *a b* du quarré générateur. Une ligne droite tirée du centre de la baſe ſupérieure au centre de la baſe inférieure d'un priſme ou d'un cylindre, s'appelle *l'axe* du priſme ou du cylindre : telle eſt la ligne *a a* (fig. 82 & 83). Si l'axe eſt perpendiculaire ſur les baſes ſupérieure & inférieure (qui ſont toujours paralleles), les priſmes & cylindres ſont appellés *droits;* mais ſi l'axe eſt oblique ſur les baſes, le priſme eſt dit *oblique*, & ſa hauteur doit s'eſtimer par une perpendiculaire menée entre les deux baſes paralleles, en en prolongeant une s'il le faut.

Une *pyramide* eſt un ſolide dont la baſe eſt un polygone, & qui eſt terminée par des ſurfaces triangulaires qui forment un angle ſolide, qu'on appelle *le ſommet de la pyramide* (fig. 85). Si l'on fait mouvoir une ligne *a d* de maniere que ſon extrémité *a* reſtant fixe, l'extrémité *d* parcoure le contour du polygone *b d f g h*, cette ligne engendrera dans ce mouvement la ſurface latérale du ſolide, qu'on appelle *pyramide*. Si le plan de la

baſe eſt un triangle, un quadrilatere, un pentagone, &c. la pyramide eſt appellée *triangulaire*, *quadrangulaire*, *pentagonale*, &c. Si le plan de la baſe eſt un cercle (fig. 86) la pyramide prend le nom de *cône*, de ſorte qu'un cône n'eſt autre choſe qu'un ſolide, dont la baſe eſt un cercle & qui finit en pointe. Une ligne tirée du ſommet du cône ou de la pyramide au centre de la baſe, s'appelle *l'axe* du cône ou de la pyramide. Si l'axe eſt perpendiculaire à la baſe, la pyramide eſt *droite*, de même dans ce cas le cône eſt *droit*. Une ligne *am* (fig. 85) abaiſſée du ſommet du cône ou de la pyramide perpendiculairement ſur le plan de la baſe prolongée s'il le faut, meſure la hauteur de la pyramide ou du cône. L'apothême d'une pyramide droite (fig. 81), dont la baſe eſt un polygone régulier (nous déſignerons dans la ſuite cette pyramide en l'appellant ſimplement *pyramide droite*), eſt une ligne *ap* tirée du ſommet perpendiculairement ſur un des côtés de la baſe de la pyramide.

Si un demi-cercle *amb* ſe meut autour du diametre *ab* (fig. 87) il engendrera un ſolide rond, dont tous les points de la ſurface ſeront également éloignés du point *c* qu'on nomme *centre* : ce ſolide s'appelle *ſphere* ou *globe*. L'arc *an* engendrera une *calotte ſphérique nal*, le ſecteur circulaire *ncl* engendrera un *ſecteur ſphérique nalc*, & le demi-ſegment *nag* engendrera un *ſegment ſphérique nalg*. La partie de la ſurface ſphérique compriſe entre deux plans paralleles *mp*, *nl* s'appelle une *zone*.

91. Les ſolides ſont *réguliers* ou *irréguliers*. Les ſolides réguliers ſont ceux qui ſont terminés de tous côtés par des faces égales & régulieres.

Les solides irréguliers sont ceux qui sont terminés par des surfaces qui n'ont point ces conditions.

Il y a cinq solides réguliers. Le *tétraedre*, qui n'est qu'une pyramide terminée par 4 triangles égaux & équilatéraux (fig. 88). Le *cube* ou l'*exaedre* (fig. 84) terminé par six quarrés égaux. L'*octaedre* (qui n'est qu'une double pyramide quadrangulaire) est terminé par 8 triangles égaux & équilatéraux (fig. 89). Le *dodécaedre* est terminé par 12 pentagones égaux & équilatéraux (fig. 90). Enfin l'*icosaedre* est terminé par 20 triangles égaux & équilatéraux (fig. 91).

92. COROLLAIRE I. Parce que les Solides réguliers sont terminés de tous côtés par des figures régulieres égales, il est clair qu'on peut les inscrire dans une sphere, de maniere que tous leurs angles se trouvant à la surface de la sphere, leur centre se confonde avec celui de la sphere.

93. COROLLAIRE II. Si donc l'on tire des angles de chacun de ces Solides des lignes au centre de la sphere, il est visible que ces Solides seront composés d'autant de pyramides égales qu'ils ont de faces, que le sommet commun de ces pyramides étant au centre de la sphere, leurs bases sont les faces mêmes de ces Solides.

94. PROBLEME. *Trouver le développement des Solides réguliers.* Pour le tétraedre (fig. 92) coupez sur une carte un triangle équilatéral *a b c*, divisez les côtés de ce triangle en deux également en *x* & tirant des lignes par les points de division, vous aurez 4 triangles égaux & équilatéraux. Le triangle *x x x* sera la base, les autres triangles seront les faces du tétraedre, que vous formerez facilement en pliant la figure, de sorte que les lignes *x x* servent de plis, & que les points *a b c* aillent se joindre en un seul point. La figure 93, composée de 6 quarrés égaux, représente le développement du cube. La figure 94, composée de deux triangles équilatéraux & tellement assortis qu'ils aient chacun la moitié d'un de leurs côtés commune, représente les 8 triangles qui forment la face de l'octaedre. La figure 95 représente le développement du dodécaedre, & enfin la figure 96 représente celui de l'icosaedre.

95. THÉOREME. *Il n'y a que cinq Solides réguliers.* Car les angles plans qui forment un angle solide valent toujours moins de 360° (89); donc trois angles de triangle

équilatéral pourront former l'angle solide du tétraedre : en effet l'angle du triangle équilatéral vaut 60° ; donc ses trois angles valent seulement 180°. L'angle solide de l'octaedre sera composé de quatre angles plans, chacun de 60° ; donc il sera de 240°. L'angle de l'icosaedre, composé de 5 angles plans chacun de 60°, vaut 300°, moindres que 360°. Mais 6 angles de 60° valant 360°, il est visible qu'on ne pourra pas former d'angle solide avec 6 triangles égaux & équilatéraux; à plus forte raison on n'en pourra pas former avec un plus grand nombre. Voilà donc les seuls Solides réguliers qu'on peut former avec le triangle équilatéral. Avec trois angles de quarré, qui valent ensemble 3 fois 90°, ou 270°, on pourra former l'angle du cube ou de l'exaedre ; mais on ne pourra former d'angle solide avec 4 angles de quarré, ni avec un plus grand nombre. Enfin l'angle du pentagone régulier valant 108° (38), on peut avec 3 angles de pentagone régulier former l'angle solide du dodécaedre, qui vaudra 324°, mais 4 de ces angles valent plus de 360°; donc on ne peut former d'autre Solide régulier avec le pentagone, que le seul dodécaedre. A l'égard des autres polygones, *par exemple*, de l'exagone, de l'eptagone, &c. il est visible qu'on ne peut s'en servir pour former un angle solide; car pour former un angle solide, il faut au moins 3 angles plans, dont la somme soit moindre que 360° ; or 3 angles d'exagone, d'eptagone, &c. ne peuvent pas donner une somme moindre que 360° ; donc, &c.

96. REMARQUE. Le triangle équilatéral, le quarré & le pentagone régulier sont les seuls polygones avec lesquels on puisse former un Solide régulier. Mais on ne peut pas se servir de tous ces polygones pour remplir l'espace qui est autour d'un point *o*, en n'employant que des polygones de même espece (fig. 97). Car l'espace autour d'un point *o* vaut 360° (11), mais 6 angles de triangle équilatéral valent aussi 360° ; donc on peut avec 6 angles de triangle équilatéral remplir l'espace autour d'un point. 4 angles de quarré valent 360 ; donc 4 angles de quarré peuvent remplir l'espace autour d'un point. 4 angles de pentagone valent plus de 360°, & 3 angles de pentagone valent moins de 360° ; ainsi l'on ne peut pas se servir du pentagone régulier pour remplir l'espace autour d'un point. 3 angles d'exagone valent 360° ; par conséquent on peut avec 3 angles d'exagone remplir l'espace au-

tour d'un point; mais 3 angles d'eptagone, d'octogone, &c. valant plus de 360°, & deux de ces angles valant moins de 360° (parce qu'un angle ne peut jamais valoir 180°, autrement il n'y auroit point d'angle, mais une seule ligne droite), il s'ensuit qu'on ne peut point les employer pour remplir l'espace autour d'un point. C'est pourquoi pour carreler une chambre en n'employant que des polygones de même espece, on ne peut se servir que du triangle équilatéral, du quarré ou de l'exagone. On préfere ordinairement ce dernier à cause que ses angles obtus sont plus solides que ceux des deux autres.

97. PROBLEME. *Trouver le développement de la surface latérale du prisme droit.* La surface latérale du prisme droit (fig. 82) étant composée d'autant de parallélogrammes de même hauteur, qu'il y a de côtés dans le polygone générateur, la surface latérale du prisme sera égale à un parallélogramme rectangle *acdb*, dont la hauteur *ac* sera égale au côté *dh* du prisme & dont la base *ab* est égale au périmetre de la base du prisme.

REMARQUE. Si le prisme étoit oblique en prenant la ligne *ac* égale à la hauteur des parallélogrammes qui composent la surface latérale du prisme, l'on auroit une surface égale à la surface latérale du prisme.

COROLLAIRE. Le rectangle *cabd* peut représenter le développement du cylindre droit *dha* (fig. 83) en prenant $ac = hd$, & faisant *ab* égale à la circonférence du cercle de la base. Si le prisme est oblique, on prendra *ac* égale à la distance qu'il y a entre les circonférences des bases supérieure & inférieure, & l'on aura une surface égale à la surface latérale du prisme, mais non pas son développement.

98. THÉOREME. *Trouver le développement de la surface latérale de la pyramide* (fig. 98). Cette surface étant composée d'autant de triangles qu'il

y a de côtés dans la base de la pyramide, il est clair que la surface latérale d'une pyramide qui auroit cinq faces égales respectivement aux triangles qui forment la figure 98., a cette même figure pour développement.

COROLLAIRE. Le développement de la surface d'un cône droit sera un secteur de cercle *abd* (fig. 99), dont le rayon *ab* sera égal au côté du cône (on appelle aussi ce côté *l'apothême du cône*), & l'arc *bd* égal à la circonférence de la base de ce cône; car tous les points de la circonférence de la base du cône droit étant également éloignés du sommet, la surface latérale du cône droit est égale à la somme de tous les triangles qui ont leur sommet au sommet du cône, & leur base sur la circonférence de la base du cône; or tous ces triangles sont évidemment égaux au secteur *bad*; donc, &c.

99. DÉFINITION. On appelle *solides semblables* ceux qui ont un même nombre d'angles homologues égaux, dont toutes les faces sont des figures semblables (qui par conséquent peuvent se réduire en triangles semblables) & dont toutes les dimensions sont proportionnelles.

COROLLAIRE. Si l'on tire deux diagonales homologues dans deux Solides semblables, ces diagonales feront avec les côtés homologues (ou même avec des lignes homologues quelconques) des triangles semblables; donc ces diagonales sont entre elles comme les côtés homologues ou diagonales homologues, &c.

100. THÉOREME. *La surface d'un Solide quelconque est égale à la somme des surfaces des faces de ce Solide :* ce Théorême est évident.

COROLLAIRE. Donc en mesurant les faces

d'un Solide, on aura aiſément la ſurface de ce Solide.

101. THÉOREME. *La ſurface d'un Solide régulier eſt égale à la ſurface d'une des faces multipliée par le nombre des faces du Solide.* Car la ſurface d'un Solide régulier eſt compoſée d'un certain nombre de faces égales (91); donc la ſurface totale d'un tel Solide eſt égale à la ſurface de l'une quelconque de ces faces, multipliée par le nombre des faces.

102. THÉOREME. *La ſurface latérale d'un priſme eſt égale au produit d'un des côtés du priſme par le périmetre d'une ſection du priſme faite perpendiculairement à l'axe du priſme.* Car nous avons dit que que la ſurface latérale d'un priſme étoit compoſée d'autant de parallélogrammes qu'il y a de côtés dans le polygone générateur; mais chacun de ces parallélogrammes, tel que *ligf* (100) eſt égal au produit du côté *fi* ou *gl* du priſme par la ligne *xp* perpendiculaire à *gl* ou *if*; donc la ſurface latérale eſt égale au produit d'un des côtés *gl* du priſme par le nombre des perpendiculaires *xp*, ou par le périmetre de la ſection faite perpendiculairement à l'axe ou au côté du priſme.

COROLLAIRE. Donc la ſurface d'un priſme droit & d'un cylindre droit (fig. 82 & 83) eſt égale au produit du côté *hd* par le contour de la baſe: parce qu'alors cette baſe eſt perpendiculaire au côté. A l'égard du cylindre oblique (fig. 100), on meſurera, ſi l'on veut, la circonférence *pp* avec un fil *, & multipliant cette circonférence par le

* Cette circonférence perpendiculaire au côté *hd* ne ſera pas un cercle, mais une courbe qu'on appelle *ellipſe* & dont nous parlerons dans les Sections Coniques.

côté *h d* perpendiculaire au plan de la circonférence *pp*.

REMARQUE. En mesurant les surfaces des bases & les ajoutant à la surface latérale, l'on aura la surface totale; or il est aisé d'avoir la surface des bases qui sont des polygones ou des cercles, dont on peut trouver la surface du moins par approximation.

103. THÉOREME. *La surface latérale d'une pyramide droite* b d f g h (fig. 81) *est égale au produit du périmetre* b d f g h *par la moitié de son apothême* a p. Car puisque la pyramide est droite & sa base un polygone régulier, les triangles qui forment la surface latérale sont égaux entre eux; or la surface d'un de ces triangles *d a f*, *par exemple*, est égale au produit du côté *df* par la moitié de l'apothême *ap*, hauteur du triangle; donc la surface totale est égale au produit du périmetre de la base par la moitié de l'apothême de la pyramide, ou au produit de l'apothême par la moitié du périmetre de la base.

COROLLAIRE. Donc la surface latérale d'un cône droit *abpd* (fig. 86) est égale au produit de son côté, ou apothême *ba* par la moitié de la circonférence de la base, ou au produit de la moitié de l'apothême par la circonférence de la base.

REMARQUE I. Si la pyramide est oblique (fig. 85) on mesurera chacun des triangles qui forment sa surface latérale, & l'on aura la surface totale. A l'égard du cône oblique, on divisera sa circonférence en parties *bp* assez petites pour que chacune puisse être regardée, sans erreur sensible, comme une ligne droite, & mesurant la surface de chaque triangle *bap*, ajoutant ensuite toutes ces surfaces,

l'on aura la ſurface latérale du cône oblique d'autant plus exactement que les lignes *b p* auront été priſes plus petites *.

REMARQUE II. A l'égard de la baſe ſoit de la pyramide, ſoit du cône, on voit bien comment il faut la meſurer, puiſqu'elle eſt un polygone ou un cercle.

104. THÉOREME. *La ſurface latérale d'une pyramide droite tronquée en* m n m, *ſuppoſant les deux baſes paralleles* (fig. 81), *eſt égale au produit du reſte de l'apothême* a p *par la moitié de la ſomme des périmetres des deux baſes.* Car ſi l'on conçoit un plan, coupant *mnm* parallele à la baſe, ce plan retranchera la petite pyramide *man* & la partie *n a* de l'apothême *a p*, & les faces latérales du tronc feront évidemment des trapezes, dont la hauteur commune ſera le reſte *n p* de l'apothême, & les baſes feront les côtés mêmes des baſes de la pyramide tronquée; donc la ſurface latérale de cette pyramide ſera égale à la ſurface d'un trapeze, dont une de baſes ſeroit le périmetre de la baſe inférieure, & l'autre baſe le périmetre de la baſe ſupérieure de la pyramide tronquée; or (71) la ſurface d'un trapeze eſt égale au produit de ſa hauteur par la moitié de la ſomme de ſes baſes; donc, &c.

REMARQUE. Si la pyramide étoit oblique on chercheroit la ſurface de chaque trapeze *d m t f*, la ſomme de toutes ces ſurfaces donneroit la ſurface cherchée. De même pour le cône oblique (fig. 85), ſuppoſant que la partie *b p* de la circonférence

* La ſurface exacte du cône oblique ne peut pas ſe trouver par la Géométrie Élémentaire; elle demande le ſecours du Calcul intégral.

de la base inférieure ne differe pas sensiblement d'une ligne droite, on cherchera la surface de chaque trapeze *bMnp*, la somme de ces surfaces donnera la surface du cône tronqué oblique d'autant plus exactement que les lignes *bp* approcheront plus d'être droites.

COROLLAIRE I. La surface latérale d'une pyramide tronquée droite (fig. 81) est égale au produit de son apothême *np* par le périmetre *oo* de la section *oo* que je suppose passer par le milieu des côtés *md*, *mg* parallelement aux bases; car chacun des côtés de cette section sera la moitié de la somme des bases du trapeze correspondant; donc le périmetre de cette section sera la moitié de la somme des périmetres des deux bases; or (par le Théorême) le produit de cette demi-somme par l'apothême est égale à la surface latérale de la pyramide tronquée; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc la surface latérale du cône droit tronqué (en supposant ses deux bases paralleles) est égale au produit de son apothême *nd* par le périmetre *oo* de la section faite par le milieu d'un des côtés *nd* parallelement aux bases (fig. 86). Car un cône droit tronqué n'est autre chose qu'une pyramide droite tronquée, dont les bases sont des cercles; donc par le Corollaire précédent cette surface est égale au produit de l'apothême *nd* par la circonférence N*oo* du cercle décrit par le milieu du côté *nd* parallelement aux bases.

105. THÉOREME. *La surface d'une sphere décrite par la révolution du demi-cercle* amb (fig. 87) *autour du diametre* ab * *est égale au produit de la circonfé-*

* Toutes les lignes tirées par le centre de la sphere &

rence

rence d'un de ses grands cercles par son diametre. Des points m, i, n, ou des extrémités & du milieu de l'arc min (qui en le supposant extrêmement petit, sera sensiblement une portion de la tangente tt), ayant abaissé les perpendiculaires md, ix, ng sur le diametre ab, & du point m la perpendiculaire mo sur ng; les triangles mon, ngc ayant tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre seront semblables (49). Donc l'on a $nc : ng$ ou ix (parce que l'arc mn étant fort petit, ix est sensiblement égale à ng) :: $mn : mo$; mais les circonférences étant entr'elles comme leurs rayons (63), l'on a la circonférence dont nc est le rayon, & à la circonférence dont ix est le rayon comme $mn : mo$; donc le produit de mo par la circonférence du rayon nc, ou par la circonférence d'un grand cercle de la sphere, est égal au produit de mn (côté du cône tronqué décrit par $mngd$ pendant la révolution du demi-cercle amb autour de ab) par la circonférence décrite par le rayon xi autour de x, c'est-à-dire, par la circonférence d'un cercle décrit par le milieu i de ce cône tronqué parallelement à ses bases. Or (104) ce produit est égal à la surface du cône tronqué décrite par mn; donc la surface décrite par chaque arc mn est égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la

terminées de part & d'autre à sa surface, sont appellées *diametres de la sphere*; mais on appelle *axe* celui des diametres autour duquel la sphere est censée tourner. On nomme *grands cercles de la sphere* ceux qui ont pour centre le centre même de la sphere; mais ceux qui ont leurs centres hors du point c, sur un diametre quelconque ab, sont des petits cercles de la sphere. Une ligne cn tirée du centre à la surface de la sphere est un *rayon*.

de la base inférieure ne differe pas sensiblement d'une ligne droite, on cherchera la surface de chaque trapeze $bMmp$, la somme de ces surfaces donnera la surface du cône tronqué oblique d'autant plus exactement que les lignes bp approcheront plus d'être droites.

COROLLAIRE I. La surface latérale d'une pyramide tronquée droite (fig. 81) est égale au produit de son apothême np par le périmetre oo de la section oo que je suppose passer par le milieu des côtés md, mg parallelement aux bases; car chacun des côtés de cette section sera la moitié de la somme des bases du trapeze correspondant; donc le périmetre de cette section sera la moitié de la somme des périmetres des deux bases; or (par le Théorême) le produit de cette demi-somme par l'apothême est égale à la surface latérale de la pyramide tronquée; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc la surface latérale du cône droit tronqué (en supposant ses deux bases paralleles) est égale au produit de son apothême nd par le périmetre oo de la section faite par le milieu d'un des côtés nd parallelement aux bases (fig. 86). Car un cône droit tronqué n'est autre chose qu'une pyramide droite tronquée, dont les bases sont d[illegible]cles; donc par le Corollaire précédent cet[illegible]ce est égale au produit de l'apothême nd [illegible]rconférence Noo du cercle décrit par le m[illegible]ôté nd parallelement aux bases.

105 [illegible]me. *La surface d'une sphere décrite autour* [illegible] *du demi-cercle* amb (fig. 87) *autour par l*[illegible] *est égale au produit de la circonfé- du d*[illegible]

S, *s*
mme
faite
ou;
ainsi
102)
mul-
aces
c.
& *p*
= *h*,
pro-

H=
s des
sines
axes,
s cy-

lindres
$^2 : h^2$.
H : *ph*,
squelles
u cylin-
la raison
& H : *h*;
me totales
comme les
es. Car deux
rs dimensions
urs surfaces doi-

ſphere par chaque ligne correſpondante $mo = dg$ (hauteur du cône tronqué correſpondant), ou par la partie du diametre correſpondante à cet arc ; donc la ſurface totale décrite par tous les arcs mn, c'eſt-à-dire, la ſurface totale de la ſphere, eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la ſomme des parties du diametre correſpondantes à tous les arcs mn, c'eſt-à-dire, par le diametre ab de la ſphere ; donc, &c.

COROLLAIRE. Donc la ſurface d'une calotte ſphérique map, eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle de la ſphere par la hauteur ad de cette calotte, & la ſurface d'une zône $mnlp$ eſt égale au produit de la circonférence d'un grand cercle par la hauteur dg de la zône.

REMARQUE I. La ſurface d'un ſecteur ſphérique $nalc$ eſt égale à la ſurface de la calotte nal, plus la ſurface latérale du cône ncl.

REMARQUE II. Puiſque pendant la révolution du demi-cercle amb autour du diametre ab tout point m de ce demi-cercle décrit un cercle dont mp eſt le diametre ; il eſt viſible que la ſection d'une ſphere par un plan quelconque mdp ſera un cercle.

COROLLAIRE. La ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface latérale du cylindre qui lui eſt circonſcrit, c'eſt-à-dire, qui la touche par côté, ſupérieurement & inférieurement (fig. 101). Car la baſe d'un tel cylindre a un diametre égal à celui de la ſphere, & ſa hauteur eſt auſſi égale au diametre ab de la ſphere ; mais la ſurface latérale du cylindre droit eſt égale au produit de ſon côté ou de ſon axe ab par la circonférence de ſa baſe (102) ; donc, &c.

Du rapport des Surfaces des Solides.

106. THÉOREME. *Les surfaces latérales* S, *s des deux prismes ou cylindres sont entr'elles comme les produits des périmetres* P, *p de la section faite perpendiculairement à leur axe par leurs côtés, ou, ce qui revient au même, par leurs axes* H, *h. Ainsi l'on aura* S : *s* :: PH : *ph*. Car nous avons vu (102) que le produit des périmetres de ces sections multipliées par les côtés, étoient égaux aux surfaces latérales de prismes ou cylindres; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc si les périmetres P & *p* sont égaux, l'on aura S : *s* :: H : *h*; & si H = *h*, l'on aura S : *s* :: P : *p*. (Voyez les raisons & proportions dans le calcul).

COROLLAIRE II. Si P : *p* :: *h* : H, alors PH = *ph*; & S = *s*. C'est-à-dire que si les périmetres des sections perpendiculaires à l'axe des deux prismes ou cylindres sont en raison inverse de leurs axes, les surfaces latérales de ces prismes ou de ces cylindres seront égales.

COROLLAIRE III. Si les prismes ou cylindres sont semblables, on aura $S:s::P^2:p^2::H^2:h^2$. Car la raison S:*s* étant égale à la raison de PH:*ph*, qui est composée de raisons P:*p* & H:*h*, lesquelles raisons sont égales lorsque les prismes ou cylindres sont semblables (99); dans ce cas la raison de S : *s* sera une raison doublée de P : *p* & H : *h*; donc, &c. En général les surfaces, même totales des solides semblables, sont entr'elles comme les quarrés de leurs dimensions homologues. Car deux solides semblables ayant toutes leurs dimensions homologues proportionnelles, leurs surfaces doi-

vent être en raiſon des produits des dimenſions proportionnelles ; ou comme les quarrés de ces dimenſions.

COROLLAIRE IV. Il ſuit du dernier Corollaire que les ſurfaces des ſpheres ſont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diametres : car les ſpheres ſont des ſolides ſemblables, dont les rayons ou diametres ſont des lignes homologues.

107. THÉOREME. *La ſurface de la ſphere eſt à celle d'un de ſes grands cercles, comme* 4 : 1. C'eſt-à-dire qu'elle eſt quadruple de la ſurface d'un de ſes grands cercles : car la ſurface de la ſphere eſt égale au produit de la circonférence *c* d'un de ſes grands cercles par le diametre *d* de ce même grand cercle ; tandis que la ſurface de ce grand cercle eſt égale au produit de la même circonférence *c* par la moitié du rayon, ou par le quart du diametre *d* ; donc ces deux ſurfaces ſont entr'elles comme $cd : \frac{cd}{4} :: 1 : \frac{1}{4} :: 4 : 1$.

108. THÉOREME. *La ſurface totale du cylindre circonſcrit eſt à la ſurface de la ſphere comme* 3 : 2. Car (105) la ſurface de la ſphere eſt égale à la ſurface latérale du cylindre circonſcrit ; donc la ſurface latérale du cylindre circonſcrit vaut 4 grands cercles de la ſphere ; c'eſt pourquoi en y comprenant les baſes, dont chacune eſt un grand cercle de la ſphere, la ſurface totale du cylindre vaudra 6 grands cercles de la ſphere ; ainſi cette ſurface eſt à celle de la ſphere comme 6 : 4, ou 3 : 2 ; donc, &c.

109. THÉOREME. *La ſurface totale du cône équilatéral* (fig. 102) *eſt à la ſurface de ſa baſe comme* 3 : 1. Pour avoir

la surface latérale du cône équilatéral gdf, il faut multiplier la circonférence de la base par la moitié du côté $gd = gf$, (*voyez* le n°. 103) ; mais pour avoir la surface de la base, il suffit de multiplier cette même circonférence par la moitié de son rayon, ou par le quart de gf; donc la surface latérale de ce cône vaut deux fois la surface de la base ; donc la surface latérale plus la surface de la base, vaut trois fois la surface de la base ; donc, &c.

110. THÉOREME. *La surface de la sphere est à la surface du cône équilatéral circonscrit comme* 4 : 9 *. Du centre c de la sphere inscrite dans le cône gdf ayant tiré les rayons cg, cf, cd; à cause du triangle équilatéral gdf, les arcs df, dg, gf seront égaux aussi-bien que leurs cordes. Donc ils vaudront chacun la troisiéme partie du cercle ou 120° ; donc du point c tirant la perpendiculaire cba sur le milieu de gf, les arcs ga, af vaudront chacun 60°, & leurs cordes ga, af seront égales aux rayons cg, cf ; ainsi les points g & f sont également éloignés de c & de a, & gf coupe ca en deux également en b. Donc cb est la moitié de ca ou de cg ; or $(gc)^2 = (cb)^2 + (gb)^2$ (76); donc en faisant $gc = 1$, cb sera $= \frac{1}{2}$, $(cb)^2 = \frac{1}{4}$, & $(gb)^2 = \frac{3}{4}$. Mais les surfaces des cercles sont entr'elles comme les quarrés de leurs rayons ; donc le cercle dont le rayon est cb, est au cercle dont le rayon est gb, comme $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$, ou comme $1 : 3$. C'est-à-dire que le grand cercle de la sphere inscrite étant 1, la base du cône circonscrit sera 3 ; mais la surface de la sphere vaut 4 de ses grands cercles, tandis que la surface totale du cône équilatéral vaut 3 fois la surface de sa base ; donc ces surfaces sont entr'elles comme $1 \times 4 : 3 \times 3 :: 4 : 9$; donc, &c.

111. THÉOREME. *Si à une sphere* (fig. 101) *on circonscrit un cylindre & un cône équilatéral, les surfaces de ces trois solides seront entr'elles comme* $\div$ 4 : 6 : 9. Cela suit évidemment des n°s. 108 & 110.

COROLLAIRE. Donc la surface du cylindre circonscrit est moyenne proportionnelle entre la surface de la sphere & celle du cône équilatéral circonscrit.

* Un cône circonscrit à une sphere est celui qui la touche en dessous & par côté.

112. THEOREME. *La surface de la sphere circonscrite au cône équilatéral* (fig. 102) *est quadruple de celle de la sphere inscrite dans le même cône.* Car le rayon *c g* de la premiere est double du rayon *c b* de la seconde (par la démonstration de l'avant dernier Théorême); c'est pourquoi ces surfaces sont entr'elles comme 4 : 1 (106); donc, &c.

De la solidité des Solides & de leur rapport.

113. THÉOREME. *La solidité d'un prisme ou d'un cylindre droit ou oblique* (fig. 82 & 100) *est égale au produit de sa base par sa hauteur.* Car si l'on conçoit un prisme ou un cylindre engendré par le mouvement de sa base, qui laisse en montant parallelement à elle-même des traces d'une épaisseur infiniment petite, il est évident qu'il faudra multiplier une de ces traces par le nombre de fois que son épaisseur est contenue dans la hauteur, ou, ce qui revient au même, multiplier la base par la hauteur *; donc, &c.

COROLLAIRE I. Donc les prismes & les cylindres droits & obliques sont en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs.

COROLLAIRE II. Donc si les bases des deux cylindres A & *a* (il en est de même de deux prismes) sont B & *b*, les hauteurs H & *h*, le pre-

* Comme multiplier c'est prendre le multiplicande un certain nombre de fois désigné par le multiplicateur, il est évident qu'on ne peut multiplier par une ligne. Seulement on conçoit la base d'une certaine épaisseur & l'on prend cette base autant de fois que son épaisseur est contenue dans la hauteur. Rien n'empêche cependant qu'on ne continue de dire le produit de la base par la hauteur, pourvu qu'on entende par-là ce que nous venons de dire.

mier sera au second comme $BH : bh$. Si $H = h$, l'on aura $A : a :: B : b$. Si $B = b$, on aura $A : a :: H : h$. Si $B : b :: h : H$, alors $BH = bh$, & $A = a$.

114. THÉOREME. *Deux pyramides triangulaires de même base & de même hauteur sont toujours égales en solidité* (fig. 103). Car les deux pyramides ayant même hauteur, il est évident qu'elles seront comprises entre les mêmes plans paralleles, & que si on les coupe par des plans xx paralleles à leurs bases, le nombre des tranches sera le même de part & d'autre, & l'épaisseur des tranches correspondantes sera aussi la même; or les surfaces omn, spi des tranches correspondantes seront égales. En effet les triangles bcd, mon sont semblables; car tous les côtés de l'un sont paralleles aux côtés correspondans de l'autre, om est parallele à bc, mn à bd & on à dc; donc si l'on conçoit que le triangle mon descende le long de oc, de maniere que om reste toujours parallele à bc, lorsque le point o tombera sur le point c, le côté om tombera sur bc, on sur cd, & mn sera parallele à bd; donc ces deux triangles auront un angle commun & des bases paralleles; donc ils sont semblables. On démontrera de même que le triangle psi est semblable au triangle fgh, égal à bcd (par supposition). De plus les triangles semblables bac, aom donnent $bc : om :: ba : am$, & les triangles semblables afg, aps donnent $fg : ps :: af : ap$. Mais les triangles semblables baf, amp donnent $ba : am :: af : ap$; donc $bc : om :: fg : ps$, & $(bc)^2 : (mo)^2 :: (fg)^2 : (ps)^2$; & parce que les triangles semblables sont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues, l'on a $bcd : mon :: fgh :$

Dd 4

psi, ou $bcd : fgh :: mon : psi$. Mais $bcd = fgh$, par supposition ; donc $mon = psi$. donc les deux pyramides contiennent un nombre égal de tranches égales ; donc elles sont égales.

COROLLAIRE I. Deux pyramides quelconques de même base & de même hauteur sont égales ; car si l'on partage les bases de ces pyramides en un même nombre de triangles égaux chacun à chacun, & qu'on conçoive par le sommet de ces pyramides, des lignes tirées aux trois angles de chacun de ces triangles, il est visible que chacune de ces pyramides sera divisée en un même nombre de pyramides triangulaires, qui auront des bases & des hauteurs égales chacune à chacune ; or par le Théorême ces pyramides triangulaires sont égales ; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc deux cônes, l'un droit & l'autre oblique de même base & de même hauteur sont égaux : car un cône est une pyramide, dont la base est un cercle ; donc, &c.

115. THÉOREME. *Un prisme triangulaire droit* abcdfg (fig. 104) *vaut trois pyramides de même base & de même hauteur.* Ayant tiré les lignes bf, bd, dc, on peut concevoir le prisme divisé en trois pyramides, dont l'une $bdfg$, a même base dgf & même hauteur gb que le prisme. Celle-ci étant ôtée, le reste se divise en deux pyramides $acdb$, $cdfb$. Les deux pyramides $acdb$, $bdfg$ sont égales, puisqu'elles ont chacune pour base une des bases du prisme, & pour hauteur un des côtés du prisme. De plus la pyramide $acbd$ est $= cdfb$; car la diagonale cd partageant le parallélogramme $acdf$ en deux parties égales, ces deux pyramides ont chacune pour base la moitié de ce parallélogramme, &

leur sommet en *b*. Elles ont donc même hauteur & des bases égales, ce qui les rend égales; donc les trois pyramides sont égales; donc le Théorême est également vrai lorsque le prisme triangulaire n'est pas droit *.

COROLLAIRE I. Tout prisme est triple d'une pyramide de même base & de même hauteur. *Par exemple*, un prisme pentagonal est triple d'une pyramide pentagonale de même base & de même hauteur (fig. 82). Car si l'on divise les bases de ce prisme en un même nombre de triangles égaux, & que de tous les angles correspondans des triangles de l'une des bases, ou même des lignes aux angles correspondans des triangles de l'autre base, on peut concevoir facilement le prisme divisé en un certain nombre de prismes triangulaires, *par exemple*, ici en 5; or chacun de ces prismes est triple d'une pyramide triangulaire de même base & de même hauteur; donc le prisme entier est triple de la somme de ces cinq pyramides triangulaires; mais ces cinq pyramides triangulaires sont évidemment égales à une seule pyramide pentagonale de même hauteur, & dont la base seroit égale à la somme des bases de ces pyramides; donc, &c.

COROLLAIRE II. Donc le cylindre est triple du cône de même base & de même hauteur. Car le cylindre est un prisme dont la base est un cercle, & le cône une pyramide dont la base est aussi un cercle.

* Cela a lieu également soit qu'on suppose le prisme droit ou oblique; car les pyramides *b d f g*, *a b c d* ayant chacune pour base une des bases du prisme, & leurs sommets, l'une en *b* & l'autre en *d* ont évidemment même hauteur que le prisme; de plus *a c b d* = *d c b f*.

COROLLAIRE III. Donc pour avoir la ſolidité d'une pyramide ou d'un cône, il ſuffit de multiplier la baſe par le tiers de la hauteur. Car la ſolidité du priſme étant égale au produit de ſa baſe par ſa hauteur, celle de la pyramide, qui n'eſt que le tiers de celle du priſme, doit être égale au produit de la baſe par le $\frac{1}{3}$ de la hauteur; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Donc la ſurface des polyedres réguliers eſt égale au produit de leur ſurface par le tiers de la perpendiculaire abaiſſée du centre ſur le milieu d'une des faces du polyedre, (nous appellerons cette perpendiculaire *rayon droit*). En effet on peut (93) concevoir chaque polyedre régulier comme compoſé d'autant de pyramides égales que le polyedre a de faces : ces pyramides ont leur ſommet commun au centre du polyedre, leur hauteur eſt égale au rayon droit, & leur baſe eſt une des faces du polyedre; donc chacune de ces pyramides eſt égale à une des faces multipliée par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit, & leur ſomme, ou la ſolidité du polyedre eſt égale au produit de toutes les faces, c'eſt-à-dire, au produit de la ſurface du polyedre par le $\frac{1}{3}$ du rayon droit du polyedre.

COROLLAIRE V. La ſolidité de la ſphere eſt égale au produit de ſa ſurface par le $\frac{1}{3}$ de ſon rayon. Car on peut concevoir la ſphere comme compoſée d'une infinité de pyramides qui ont leur ſommet au centre, dont la baſe de chacune eſt une portion infiniment petite de la ſurface de la ſphere, & dont la hauteur eſt égale au rayon de la même ſphere; or la ſomme de toutes ces pyramides eſt égale à une ſeule pyramide qui auroit pour baſe la ſurface entiere, & pour hauteur le rayon de la ſphere; donc, &c.

COROLLAIRE VI. Il ſuit du Corollaire précédent que la ſolidité du cylindre circonſcrit à une ſphere eſt à la ſolidité de la ſphere comme $3:2$. Car ſoit c la ſurface d'un grand cercle de la ſphere, ſa ſurface ſera $= 4c$ (107); & faiſant le rayon de

la ſphere $= r$, la ſolidité ſera $= 4\frac{cr}{3} = \frac{4}{3}cr$. Mais la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt $= c \times 2r$ (113); donc la ſolidité du cylindre circonſcrit eſt à la ſolidité de la ſphere comme $2cr : \frac{4}{3}cr :: 2 : \frac{4}{3} :: 6 : 4 :: 3 : 2$; donc, &c.

Corollaire VII. Il ſuit du dernier Corollaire que la ſphere eſt les $\frac{2}{3}$ du cylindre circonſcrit.

Corollaire VIII. Il ſuit du Corollaire précédent que la ſolidité de la ſphere eſt double de celle d'un cône qui auroit pour baſe un grand cercle de la ſphere, ou la baſe même du cylindre circonſcrit, & pour hauteur le diametre même de la ſphere, ou la hauteur du cylindre circonſcrit. Car un tel cône eſt le tiers du cylindre circonſcrit; donc ce cône ſera $= 1$, ſi le cylindre circonſcrit eſt $= 3$; donc la ſphere qui eſt au cylindre circonſcrit comme $2 : 3$ ſera à ce cône comme $2 : 1$; donc, &c.

116. Théoreme. *La ſphere eſt au cône équilatéral circonſcrit comme* $4 : 9$ (fig. 102). Car la baſe du cône équilatéral eſt égale à trois grands cercles de la ſphere inſcrite (démonſtration du nº. 110). De plus cb rayon de la ſphere eſt $= \frac{cg}{2} = \frac{cd}{2}$; donc le rayon de la ſphere inſcrite eſt le tiers de la hauteur du cône. Faiſant $cb = r$, & la ſurface d'un grand cercle de la ſphere inſcrite $= c$, $3c$ ſera la baſe du cône, $3r$ ſa hauteur, $3c \times r$ ſa ſolidité (115). Mais la ſolidité de la ſphere (115) eſt $= \frac{4}{3}cr$; donc la ſolidité de la ſphere eſt à celle du cône équilatéral circonſcrit comme $\frac{4}{3}cr : 3cr :: \frac{4}{3} : 3 :: 4 : 9$.

Corollaire. Il ſuit de-là & du nº. 115 que ſi à une ſphere on circonſcrit un cylindre & un cône équilatéral, leurs ſolidités ſeront comme $\div 4 : 6 : 9$. C'eſt-à-dire*, (111) dans le rapport de leurs ſurfaces.

117. Probleme. *Trouver la ſolidité d'un cône droit tronqué* $pood$ (fig. 86). Suppoſant l'axe cs de ce cône prolongé

jusqu'à ce qu'il rencontre le côté da aussi prolongé & tirant xo parallele à l'axe, les triangles semblables dox, dac, donneront $dx = dc - cx = dc - os : ox = sc :: dc : ac$. C'est-à-dire, la différence des rayons des deux bases est à l'axe du cône tronqué comme le rayon de la base inférieure est à l'axe du cône entier. Ce cône entier étant connu, on en ôtera la solidité du petit cône aoo, dont on connoît la base oo, & dont il est aisé de connoître la hauteur qui est égale à sa quand le cône est droit, comme nous le supposons ici, le reste donnera la solidité du cône tronqué, ce qui est évident.

118. Deux prismes (il en est de même de deux cylindres) A & a sont en raison composée de leurs bases B & b, & de leurs hauteurs H & h. Car le premier est $= Bh$, & le second est $= bh$; donc $A : a : BH : bh$. Si $B = b$, l'on aura $A : a :: H : h$. Si $H = h$, l'on aura $A : a :: B : b$. Si $B : b :: h : H$, alors $Bh = bh$, & $A = a$. Ainsi deux prismes ou deux cylindres sont égaux lorsque leurs bases sont en raison inverse de leurs hauteurs.

COROLLAIRE I. Les pyramides & les cônes sont en raison composée de leurs bases & de leurs hauteurs, & tout ce que nous venons de dire du rapport des prismes & des cylindres doit s'appliquer aux pyramides & aux cônes qui sont les tiers de ces solides.

COROLLAIRE II. Donc si à un cylindre on circonscrit un cube (fig. 105), le cube sera au cylindre comme le quarré du diametre au cercle de la base du cylindre. Mais le cercle de la base est égal au produit de sa circonférence c par la moitié de son rayon r, ou par le quart de son diametre $2r$; donc le quarré du diametre est à la surface du cercle comme $4r^2 : c\frac{2r}{4}$, ou comme $4r : \frac{c}{2} :: 8r : c$; donc le cube est au cylindre inscrit comme le quadruple du diametre d'un cercle est à sa circonférence.

119. THÉOREME. *Le cube est à la sphere inscrite comme*

6 diametres d'un cercle à la circonférence de ce cercle (fig. 106). Car soit la circonférence $= c$, le rayon $= r$; le diametre sera $2r$, côté du cube dont la base $4r^2$ multipliée par la hauteur $2r$, donnera $8r^3$ solidité du cube. Celle de la sphere inscrite étant égale au produit de sa surface (qui est égale à quatre de ses grands cercles, c'est-à-dire $= 2rc$) par le tiers de son rayon, sera $2rc \times \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}cr^2$; donc les solidités du cube & de la sphere inscrite sont entr'elles comme $8r^3 : \frac{2}{3}cr^2$, ou comme $4r : \frac{c}{3}$ (en divisant par $2rr$), ou comme $12r : c$; c'est-à-dire, comme 6 diametres à la circonférence.

COROLLAIRE. Donc en se servant du rapport d'*Archimède*, le cube sera à la sphere inscrite comme $6 \times 7 : 22$, ou comme $42 : 22 :: 21 : 11$.

120. THÉOREME. *Deux parallélipipedes semblables sont entr'eux comme les cubes des longueurs & largeurs des bases, & des hauteurs.* Soit A la largeur de la base, B la longueur de cette même base, *h* la hauteur du premier parallélipipede, *a* la largeur, *b* la longueur de la base du second parallélipipede & *h* sa hauteur. La base du premier sera AB & sa solidité sera $=$ ABH, de même la solidité du second sera abh (par le n°. 113); donc le premier est au second comme ABH : abh; or à cause de la similitude de ces solides, les trois dimensions du premier p sont proportionnelles aux trois dimensions du second q. Donc la raison de p à q est composée de trois raisons égales; donc elle est triplée, & égale à la raison des cubes des termes d'une des raisons composantes (voyez les raisons composées dans le calcul). C'est pourquoi $p : q : A^3 : a^3 :: B^3 : b^3 :: H^3 : h^3$.

COROLLAIRE. Les prismes triangulaires semblables sont évidemment moitiés des prismes parallélipipedes semblables; puisque les bases de

ces prismes sont des triangles semblables moitiés des parallélogrammes semblables, bases des parallélipipedes semblables; donc les prismes triangulaires semblables (& il en est de même de tous les prismes semblables, puisqu'ils sont évidemment composés d'un égal nombre de prismes triangulaires semblables) sont en raison triplée de leurs côtés homologues, de leurs hauteurs, &c. Cela doit s'entendre aussi des cylindres semblables, qui ne sont autre chose que des prismes semblables, mais dont les bases sont des cercles.

COROLLAIRE II. Il suit du Corollaire précédent que les pyramides & les cônes semblables sont en raison triplée de leurs dimensions homologues; car les pyramides semblables sont le $\frac{1}{3}$ des prismes semblables, & les cônes semblables le $\frac{1}{3}$ des cylindres semblables; or les $\frac{1}{3}$ sont comme les tous; donc, &c.

COROLLAIRE III. Il suit du dernier Corollaire que les polyedres réguliers semblables, *par exemple*, les tétraedres semblables, sont en raison triplée de leurs rayons droits, ou en général de leurs dimensions homologues : car les polyedres réguliers semblables sont composés d'un même nombre de pyramides semblables; donc, &c.

COROLLAIRE IV. Il suit du Corollaire second que les spheres sont comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diametres. Car on peut considérer deux spheres comme composées d'un même nombre de pyramides semblables qui ont leur sommet au centre, leur base sur la surface, & dont la hauteur est égale au rayon de chaque sphere; donc ces spheres sont entr'elles comme les cubes de leurs rayons, ou de leurs diametres; car les diametres sont doubles des rayons.

REMARQUE. On peut démontrer ce Corollaire de cette autre maniere. Soit r le rayon, c la circonférence d'un grand cercle de la premiere sphere A, d le rayon, f la circonférence de la seconde sphere a. La premiere $A = 2rc \times \frac{r}{3} = \frac{2r^2c}{3}$. La seconde sphere $a = \frac{2d^2f}{3}$; donc $A : a :: \frac{2r^2c}{3} : \frac{2d^2f}{3} :: r^2c : d^2f$ (en divisant par $\frac{2}{3}$); mais les grands cercles de ces spheres ont leurs circonférences proportionnelles à leurs rayons; donc $r : d :: c : f$; donc $\frac{r}{d} = \frac{c}{f}$; donc $\frac{r^2c}{d^2f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{c}{f} = \frac{r^2}{d^2} \times \frac{r}{d} = \frac{r^3}{d^3}$. C'est-à-dire que la raison de $A : a$ est triplée de la raison des cubes des rayons, ou des diametres. Puisque évidemment $A : a :: r^3 : d^3 :: 8r^3 : 8d^3$. Or $8r^3$ & $8d^3$ sont les cubes des diametres $2r$ & $2d$; donc si $r = 1$ & $d = 2$, l'on aura $A : a :: 1 : 8$.

121. THÉOREME. *Un parallélipipede, dont les dimensions* a, b, h *sont en proportion continue, peut être réduit en un cube de même solidité que lui.* Car puisque $a : b :: b : h$, l'on a $b^2 = ah$, & en multipliant les deux membres de cette équation par b, il vient $b^3 = abh$; or abh exprime la solidité du parallélipipede, & b^3 la solidité d'un cube dont le côté $= b$; donc, &c.

122. PROBLEME. *Faire un cube double d'un autre cube.* Soit a le côté du cube proposé, a^3 sera sa solidité, $2a^3$ le cube double cherché. Les côtés de ces cubes sont entr'eux comme $\sqrt[3]{(a^3)} : \sqrt[3]{(2a^3)} = a\sqrt[3]{(2)}$; or il n'est pas possible de trouver exactement la racine troisiéme de 2, par laquelle il faudroit multiplier le côté du cube donné pour avoir celui du cube cherché; donc le Problême est impossible arithmétique-

ment. Si l'on veut se contenter d'une approximation, on prendra la valeur de $\sqrt[3]{2}$ en décimales, on aura 1·2 en se tenant aux dixiémes; & multipliant le côté a par 1·2 on aura le côté d'un cube à-peu-près double du proposé. En poussant l'aproximation de $\sqrt[3]{2}$ plus loin, on auroit un cube qui approcheroit plus du cube demandé. On ne peut pas non plus trouver par l'arithmétique un cube triple, quadruple, quintuple, &c. d'un cube proposé, parce que 3, 4, 5, &c. ne sont pas des cubes; mais on peut trouver un cube d'une multiplicité exprimée par un nombre cube; ainsi on peut trouver un cube octuple d'un autre cube a^3. Car l'on aura le cube demandé $= 8a^3$; or le côté d'un tel cube est $= 2a$; donc, &c. *

123. PROBLEME. *Mesurer la solidité d'une muraille dont l'épaisseur est de 3 pieds, la longueur de* 12 *& la hauteur de* 10. Je multiplie la longueur 12 par l'épaisseur 3, le produit 36 pieds quarrés donne la base de la muraille. Cette base étant mutipliée par la hauteur 10, le produit est 360 pieds cubes, solidité de la muraille.

124. PROBLEME. *Mesurer un obélisque* (c'est une pyramide de pierre ou de marbre) *dont la base est de* 12 *toises quarrées, & la hauteur de* 30 *toises.* Je multiplie la base par le tiers de la hauteur, le produit 120 me fait voir que la solidité cherchée est de 120 toises cubes.

REMARQUE. On mesure les solidités en pieds cubes, pouces cubes, toises cubes, &c. La toise cube vaut 216 pieds cubes, parce que la toise vaut 6 pieds, & que le cube de 6 est 216. Le pied cube vaut 1728 pouces cubes, parce que le

* On peut faire un cube double d'un autre en se servant des lignes courbes pour trouver le côté de ce cube, ainsi qu'on le verra dans la suite de cet Ouvrage.

pied

pied vaut 12 pouces & que le cube de 12 est 1728. Le pouce cube vaut 1728 lignes cubes, & la ligne cube vaut 1728 points cubes; parce que le pouce vaut 12 lignes, & la ligne 12 points.

125. PROBLEME. *Trouver la solidité d'une sphere dont le diametre est supposé de* 14 *pieds*. Je cherche par le rapport d'*Archiméde* la circonférence d'un grand cercle de cette sphere, en disant $7 : 22 :: 14 : x$ (circonférence cherchée) $= 44$. Multipliant cette circonférence par le diametre 14, le produit 616 me fait voir que la surface de cette sphere est de 616 pieds quarrés. Multipliant cette surface par le tiers du rayon ou par $\frac{7}{3}$, le produit est $1437 + \frac{1}{3}$ pieds cubes, solidité demandée. On trouveroit un produit plus exact en se servant du rapport de *Métius*.

126. PROBLEME. *Trouver la solidité d'un corps fort irrégulier, tel que le caillou* p (fig. 107). Ayant mis ce corps *p* dans un vase cylindrique ou prismatique *a b g f*, versez dans ce vase de l'eau ou du sable bien fin, ayant soin de rendre sa surface parallele à celle du vase, jusqu'à ce que le corps *p* en soit entiérement couvert. Marquez en *c d* la hauteur du sable ou de l'eau, ôtez ensuite le corps *p* du vase, le sable restant remplira l'espace *m f g n*. Donc l'espace *m c d n* sera l'espace qu'occupoit le corps *p*; or il est aisé de mesurer cet espace en multipliant sa hauteur *c m* par la base du vase; donc il est aisé de mesurer la solidité du corps *p* *.

De la Trigonométrie.

127. *La Trigonométrie* est l'art de résoudre ce Problême : *Trois de ces cinq choses, deux angles*

* Il peut y avoir une petite erreur à cause du sable qui peut s'attacher au caillou, ou de l'eau qui peut s'attacher à sa surface ou s'introduire dans les pores du caillou; mais c'est trop peu de chose pour y avoir égard.

& trois côtés d'un triangle étant données, trouver les deux autres.

Soit un angle quelconque *a c b* (fig. 19[illegible]) décrivez du sommet *c* avec un rayon à [illegible]é un cercle *a h p g*, prolongez *a c* jusqu'en *p*, & élevez en *c* la ligne *c h* perpendiculaire sur *ac*. Il est évident que l'arc *h b* est complément de l'arc *b a** ; de même l'angle *h c b* mesuré par cet arc est complément de l'angle *b c a* mesuré par l'arc *b a*. L'angle *b c p* est supplément de l'angle *b c a* & réciproquement; il en est de même des arcs qui mesurent ces angles.

Le *sinus* d'un arc *b a* est une ligne *b d* abaissée d'une des extrêmités *b* de cet arc perpendiculairement sur le rayon *c a* qui passe par l'autre extrêmité du même arc; *b d* est aussi le *sinus* de l'angle *b c a* mesuré par cet arc. La perpendiculaire *a n* élevée à l'extrêmité *a* d'un des des rayons *c a* jusqu'à la rencontre du rayon *cb* prolongé s'appelle la *tangente* de ce même arc *b a* ou de l'angle *b c a* mesuré par cet arc. La droite *cn* comprise entre le centre *c* ou le sommet de l'angle & la rencontre de la tangente se nomme la *sécante* de l'arc *b a* ou de l'angle *b c a*. On appelle *sinus-verse* d'un arc *ab*, la partie *d a* du rayon comprise entre le sinus *b d* (qu'on appelle aussi *sinus droit*) & l'arc *ab*. La perpendiculaire *b i*, sinus de l'arc *bh*, laquelle est $= cd$, se nomme le *sinus du complément* ou le *co-sinus* de l'arc *b a* ou de l'angle *b c a*; *i h* sinus verse de *hb* complément

* Le complément d'un angle aigu est la différence de cet angle avec un angle droit, de même le complément d'un arc $< 90^\circ$ est la différence de cet arc avec 90°. Le supplément d'un angle ou d'un arc est ce qui manque à cet angle ou à cet arc pour valoir 180°.

de ba, s'appelle le *co-ſinus verſe* de ba. Il eſt évident que hm eſt la tangente de l'arc hb, ou de l'angle hcb, complément de bca: on l'appelle la *co-tangente* de l'angle bca ou de l'arc ba qui en eſt la meſure. La *ſécante* cm de hb eſt appellée la *co-ſécante* de ba ou de l'angle bca. Nous ferons le ſinus $=$ *ſin.*, le rayon $= r$, le co-ſinus $=$ *co-ſin.*, la tangente $=$ *tang.*, la co-tangente $=$ *co-tang.*, la ſécante $=$ *ſéc.*, la co-ſécante $=$ *co-ſéc.*, le ſinus verſe $=$ *ſin. v.*, le co-ſinus verſe $=$ *co-ſin. v.*; de ſorte que pour dire le ſinus d'un arc a, nous dirons *ſin. a*, &c.

128. Il ſuit de ce que nous venons de dire, que le ſinus, le co-ſinus, la tangente & la co-tangente d'un angle obtus bcp ſont égaux reſpectivement au ſinus, co-ſinus, tangente & co-tangente de l'angle aigu bca, qui eſt ſon ſupplément; car bd étant une perpendiculaire abaiſſée de l'extrêmité b de l'arc bhp ſur le rayon pc (prolongé) qui paſſe par l'autre extrêmité p du même arc, eſt évidemment le ſinus de l'arc bhp auſſi-bien que de l'arc ba. De même la tangente de l'arc bhp eſt évidemment po (127); mais $po = an$: car les triangles rectangles nac, pco ſont ſemblables, à cauſe des angles droits nac, cpo, & de $pco = bca$. D'ailleurs ils ont les côtés cp & ca égaux, & les angles ſur ces mêmes côtés égaux; donc ils ſont égaux, & po eſt $= na$. Et parce que hb eſt complément de bhp, auſſi-bien que de ba, dc eſt le co-ſinus de bhp, auſſi-bien que de ba; de même la co-tangente de phb, comme celle de ba, eſt $= hm$*.

* po étant dirigée dans un ſens oppoſé à an eſt négative. Mais nous ne faiſons ici attention qu'à la grandeur & non au ſigne des lignes po, hm, &c.

129. Si l'on prolonge bd jusqu'à la rencontre de la circonférence en g, à cause de bg perpendiculaire sur ca, bd sera $= gd$ (20), & par conséquent $ba = ag$; donc le sinus d'un arc ba est la moitié d'une corde bg qui soutend un arc double de ba. Or le diametre est la plus grande des cordes; donc le plus grand des sinus est égal au rayon hc, sinus de l'arc ha, moitié de la demi-circonférence hax. Ce sinus est appellé *sinus total*, parce qu'il est le plus grand des sinus; de sorte que les sinus croissent à mesure que les arcs ab augmentent depuis o jusqu'à 90°, après quoi ils vont en diminuant jusqu'à 180°, où le sinus est o.

130. Il suit de ce que nous venons de dire, que le sinus de 30° est égal à la moitié du rayon. Car si l'arc bag est supposé de 60°, la corde bg sera égale au rayon, & le sinus bd de l'arc ba de 30° sera $= \frac{bg}{2} = \frac{r}{2}$.

Plus l'arc ba sera grand, plus la tangente an & la sécante cn croîtront, cela est évident : car lorsque le point b s'éloigne de a, il est visible que le point n doit aussi s'éloigner de a, c'est-à-dire que an doit augmenter; mais an ne peut croître à moins que cn ne croisse. De plus an & cn deviendront infinies lorsque le point b tombera sur h : car nc tombera alors sur hc, & par conséquent sera parallele à la ligne an; donc ces droites ne pourront se rencontrer quelques prolongées qu'elles soient, c'est pourquoi on les regarde alors comme infinies.

A cause des paralleles bd & hc on aura $bi = cd$, c'est-à-dire que le co-sinus d'un arc ba est égal à la partie du rayon comprise entre le centre & le

ſinus du même arc; & parce que $da = ca - cd$, il eſt viſible que le ſinus verſe da d'un arc $ab < 90°$ eſt égal à la différence du rayon & du co-ſinus du même arc. Mais dp, ſinus verſe du ſupplément bhp, eſt égal à $pd = pc + cd$; c'eſt-à-dire, que le ſinus verſe d'un arc plus grand que 90° eſt égal à la ſomme du rayon & du co-ſinus de ſon ſupplément ab. Connoiſſant donc le co-ſinus, on aura facilement le ſinus verſe.

131. THÉOREME. *La tangente de 45° eſt égale au rayon.* Soit ſuppoſé l'arc ab de 45°, à cauſe de l'angle droit can, l'angle cna complément de l'angle nca ſera de 45°, parce que l'angle nca eſt ſuppoſé de 45°; donc le triangle nac ſera iſocelle, & $na = ca = r$; donc, &c.

132. THÉOREME. *L'on a toujours les proportions ſuivantes.* 1°. *Le rayon eſt au co-ſinus d'un arc ou d'un angle, comme la tangente de cet arc ou de cet angle eſt à ſon ſinus, ou* r : co-ſin. :: tang. : ſin. Car les triangles cdb, can ſont ſemblables à cauſe des paralleles bd & an; donc $ca : cd :: an : bd$, ou r : *co-ſin.* :: *tang.* : *ſin.* 2°. r : *ſin.* :: *co-tang.* : *co-ſin*; car les triangles ſemblables hcm, icb donnent $r (hc) : ic = db =$ *ſin.* :: hm (co-tang. de ab) : ib (co-ſin. de ba), ou r : *ſin.* :: *co-tang.* : *co-ſin.* 3°. *Tang.* : r :: r : *co-tang.*; car les triangles hcm, nca ont un angle droit, le premier en h, le ſecond en a; de plus l'angle m de l'un eſt égal à l'angle bcd de l'autre, ces deux angles étant alternes-internes à cauſe des paralleles ca, hm : ainſi ces deux triangles ſont ſemblables; & partant $na : ca :: hc : hm$, ou *tang.* : r :: r : *co-tang.* $= \frac{rr}{tang.}$.

133. COROLLAIRE I. Donc on a 1°. $fin. = \frac{tang. \times co\text{-}fin.}{r}$; 2°. $co\text{-}fin. = \frac{co\text{-}tang. \times fin.}{r}$; 3°. $tang. = \frac{r^2}{co\text{-}tang.}$ * 4°. En ſuppoſant $r = 1$, la premiere équation donne $fin. = tang. \times co\text{-}fin.$, ou $tang. = \frac{fin.}{co\text{-}fin.}$ 5°. De la ſeconde équation on tire aiſément $co\text{-}tang. = \frac{co\text{-}fin.}{fin.} = \frac{1}{tang.}$, parce que la troiſiéme formule donne $co\text{-}tang. = \frac{r^2}{tang.} = \frac{1}{tang.}$ 6°. De $co\text{-}tang. = \frac{1}{tang.}$, l'on tire co-tang. $a \times$ tang. $a = 1 =$ co-tang. $b \times$ tang. b (a & b déſignent des arcs ou des angles). Si dans la quatriéme formule on ſubſtitue la valeur $\frac{1}{co\text{-}tang.}$ de $tang.$,

* Lorſque l'arc dont on veut avoir la tangente devient un quart de cercle, ſa co-tangente $= 0$, & alors tang. $= \frac{rr}{0} = \infty$, en conſidérant o comme une quantité infiniment petite; d'ailleurs dans ce cas la tangente eſt infinie, comme on l'a dit ci-deſſus n°. 130, parce qu'avant que la ſécante & la tangente ſoient devenues paralleles, ces lignes ſe ſont rencontrées ſous un angle infiniment petit; donc alors elles étoient infinies, & comme on ſuppoſe que ces lignes n'ont pas diminué en devenant paralleles, on les regarde encore comme infinies; & elles ne doivent pas être regardées comme infinies préciſément, parce qu'elles ſont paralleles : car deux lignes paralleles ſont deux lignes indéterminées qui ne peuvent véritablement jamais ſe rencontrer, mais qui ne ſont pas plutôt infinies que finies.

l'on aura, en multipliant par *co-ſin.*, la formule $ſin. = \frac{co\text{-}ſin.}{co\text{-}tang.}$ Subſtituant dans la ſeconde formule $\frac{1}{tang.}$ à la place de *co-tang.* (en ſuppoſant toujours $r = 1$) on a $co\text{-}ſin. = \frac{ſin.}{tang.}$

134. COROLLAIRE II. Il ſuit de la troiſiéme formule du Corollaire précédent, c'eſt-à-dire, de l'équation $tang. = \frac{r^2}{co\text{-}tang.}$, que ſi l'on a deux arcs a & b, l'on aura tang. a : tang. b :: $\frac{r^2}{co\text{-}tang.\ a}$: $\frac{r^2}{co\text{-}tang.\ b}$, ou (parce que les fractions qui ont même numérateur, ſont en raiſon inverſe des dénominateurs) tang. a : tang. b :: co-tang. b : co-tang. a, c'eſt-à-dire que les tangentes ſont en raiſon inverſe des co-tangentes. La même choſe peut ſe démontrer encore de cette maniere : par le Théorême précédent, *tang.* : r :: r : *co-tang.*; donc tang. $a \times$ co-tang. $a = r^2$, & tang. $b \times$ co-tang. $b = r^2$; donc tang. $a \times$ co-tang. $a =$ tang. $b \times$ co-tang. b; donc tang. a : tang. b :: co-tang. b : co-tang. a.

135. PROBLEME. *Etant donné le ſinus* a f *d'un arc* a m, *trouver le ſinus d'un arc double* a m b (fig. 109). Menons bd perpendiculaire ſur ca, & du point c la perpendiculaire cm ſur le milieu f de la corde ba. Puiſque af eſt connue, ſon double ab le ſera auſſi or les triangles cfa, bda, ayant un angle commun en a, & de plus chacun un angle droit, ſont ſemblables; donc ca : cf :: ba : bd, ou r : *co-ſin.* de l'arc donné :: 2 *ſin.* du même arc : *ſin.* de l'arc double.

REMARQUE I. Nous avons supposé le co-sinus cf donné, parce que le sinus af étant connu il est visible par la propriété du triangle rectangle cfa, que $cf = \sqrt{[(ca)^2 - (fa)^2]}$, ou $co\text{-}sin. = \sqrt{[r^2 - (sin.)^2]}$, & réciproquement on voit que $sin. = \sqrt{[r^2 - (co\text{-}sin.)^2]}$; c'est-à-dire que pour avoir le co-sinus, lorsqu'on connoît le sinus, il faut du quarré du rayon soustraire le quarré du sinus & prendre la racine du reste, & pour avoir le sinus quand on connoît le co-sinus, il faut retrancher le quarré du co-sinus du quarré du rayon & prendre la racine du reste.

REMARQUE II. Si l'on vouloit avoir le sinus de l'arc simple am, étant donné le sinus & le co-sinus de l'arc double ab, on remarqueroit que $(ba)^2 = (bd)^2 + (da)^2$, par la propriété du triangle rectangle, ou $(ba)^2 = sin.^2 a + (sin. v.)^2 a$, en supposant l'arc double $= a$; donc $ba = \sqrt{[(sin.)^2 a + (sin. v.)^2 a]}$, & $af = \frac{ba}{2} = sinus$ de l'arc simple $= \frac{1}{2}\sqrt{[sin.^2 a + (sin. v.)^2 a]}$; or connoissant le sinus, on connoîtra facilement le co-sinus aussi-bien que le sinus verse da qui est ici $= ca - cd$. Voyez le n° 130.

136. PROBLEME. *Connoissant les sinus de deux arcs* d l, a l *trouver les sinus de leur somme ou de leur différence* (fig. 111.). Soit l'arc $dl = b$, l'arc $al = a$. Il est évident que dq est le sinus de l'arc abd, somme de ces deux arcs; & si l'on prend $lb = dl$, bx sinus de $al - bl$, ou de $al - dl$ sera le sinus de la différence. Puisqu'on connoît le sinus de a & de b, on connoît aussi leur co-sinus (135). Des points d, l, b ayant abaissé des perpendiculaires sur ca, du point b la perpendiculaire bp

ſur $d\,q$, du point o milieu de la corde db les perpendiculaires $o\,g$, $o\,m$, & tiré la ligne $c\,o$ qui, paſſant par le centre & le milieu de la corde $d\,b$, eſt néceſſairement perpendiculaire à cette corde (20); à cauſe des paralleles $p\,b$, $g\,o$ les lignes $d\,p$, $d\,b$ ſeront diviſées proportionnellement en g & en o; or $d\,b$ eſt diviſée en deux également en o: donc $d\,p$ eſt auſſi diviſée en deux également en g, & $d\,g = g\,p$. Mais les triangles ſemblables $c\,l\,n$, $c\,o\,m$ donnent $c\,l : c\,o :: l\,n : o\,m$, ou r : co-ſin. b :: ſin. a : $o\,m = \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b}{r}$. Les triangles $c\,l\,n$, $d\,g\,o$ ayant (par conſtruction) tous leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre ſont ſemblables (49); donc $c\,l : c\,n :: d\,o : g\,d$, ou r : co-ſin. a :: ſin. b : $g\,d = \frac{\text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$. Mais $d\,q = o\,m + d\,g = q\,g + g\,d$, & $b\,x = g\,q - p\,g = q\,g - d\,g$; donc $d\,q$ ou ſin. $(a + b) = \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b + \text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$, & $b\,x$ ou ſin. $(a - b)$ $= \frac{\text{ſin. } a \times \text{co-ſin. } b - \text{ſin. } b \times \text{co-ſin. } a}{r}$. C'eſt-à-dire, *le ſinus de la ſomme de deux arcs* a *&* b (*nous ſuppoſons* a *plus grand que* b) *eſt égal au produit du ſinus de* a *par le co-ſinus de* b, *plus le produit du ſinus de* b *par le co-ſinus de* a, *le tout diviſé par le rayon; & le ſinus de la différence de ces mêmes arcs eſt égal au produit du ſinus de* a *par le co-ſinus de* b, *moins le produit du ſinus de* b *par le co-ſinus de* a, *le tout diviſé par le rayon.*

137. PROBLEME. *Connoiſſant les co-ſinus de deux arcs* a *&* b, *trouver le co-ſinus* c q *de leur ſomme, & le co-ſinus* c x *de leur différence.* A cauſe des paral-

leles $d\,q$, $o\,m$, $b\,x$, il est visible que les lignes $d\,b$, $q\,x$ sont divisées proportionnellement en o & en m, mais la ligne $d\,b$ est divisée en deux également en o; donc $q\,x$ est aussi divisée en deux également en m. Cela posé, les triangles semblables $c\,l\,n$, $c\,o\,m$ donnent $c\,l : c\,o :: c\,n : c\,m$, ou $r :$ co-sin. b $::$ co-sin. $a : c\,m = \frac{\text{co-sin.}\,a \times \text{co-sin.}\,b}{r}$. Les triangles semblables $c\,l\,n$, $d\,g\,l$ donnent $c\,l : l\,n :: d\,o : g\,o = q\,m = m\,x$, ou $r :$ sin. $a ::$ sin. $b : q\,m = \frac{\text{sin.}\,a \times \text{sin.}\,b}{r}$; donc $c\,q = c\,m - q\,m = \frac{\text{co-sin.}\,a \times \text{co-sin.}\,b - \text{sin.}\,a \times \text{sin.}\,b}{r}$, & $c\,x = c\,m + m\,x = \frac{\text{co-sin.}\,a \times \text{co-sin.}\,b + \text{sin.}\,a \times \text{sin.}\,b}{r}$. C'est-à-dire le co-sinus de la somme de deux arcs est égal au produit des co-sinus de ces arcs moins le produit de leurs sinus, & le co-sinus de la différence des deux arcs est égal au produit des co-sinus de ces arcs, plus le produit de leurs sinus, le tout divisé par le rayon.

138. THEOREME. *La somme des sinus de deux arcs* a d = a, a b = b (fig. 112) *est à la différence de ces mêmes sinus, comme la tangente de la moitié de la somme de ces arcs est à la tangente de la moitié de leur différence : ou sin.* a + *sin.* b : *sin.* a − *sin.* b :: *tang.* $\frac{(a+b)}{2}$: *tang.* $\frac{(a-b)}{2}$, nous supposons $a > b$. Ayant tiré le diamétre $a\,g$, prenez $a\,q = a\,d$, menez la corde $d\,q$ qui sera nécessairement perpendiculaire sur $a\,g$. Par le point b tirez $b\,m$ parallele à $g\,a$, & par conséquent perpendiculaire sur $d\,q$; du point m menez les cordes $m\,d$, $m\,q$, & d'un rayon $m\,c$ égal à ce-

lui du cercle $admgq$, décrivez l'arc xc qui rencontre bm en c, & par le point c tirez la ligne ncp perpendiculaire à bm; les lignes nc, cp seront les tangentes des angles dmb, bmq (qui ayant leur sommet à la circonférence du cercle, ont pour mesure la moitié des arcs db & bq compris entre leurs côtés). Or $db = ad - ab = a - b$, & $bq = ba + aq = ad + ba = a + b$; donc ces angles (que je désignerai par les valeurs des arcs qui les mesurent) sont, le premier $= \frac{a-b}{2}$, & le second $= \frac{a+b}{2}$; donc $nc =$ tang. $\frac{(a-b)}{2}$, & $cp =$ tang. $= \frac{(a+b)}{2}$. De plus $oq = oi + iq = bh + di$ est la somme des sinus des arcs a & b, & $do = di - oi$ est leur différence. Mais à cause des paralleles dq, np les triangles moq, mcp sont semblables, aussi bien que les triangles mdo, mnc, & les premiers donnent $oq : cp :: mo : mc$, tandis que les derniers donnent $do : nc :: mo : mc$; donc $oq : cp :: do : nc$, ou, *alternando*, $oq : do :: cp : nc$, ou sin. $a +$ sin. b : sin. $a -$ sin. b :: tang. $\frac{(a+b)}{2}$: tang. $\frac{(a-b)}{2}$.

COROLLAIRE. Donc on a aussi co-sin. $a +$ co-sin. b : co-sin. $a -$ co-sin. b :: co-tang. $\left(\frac{a+b}{2}\right)$: tang. $\left(\frac{a-b}{2}\right)$. Car les co-sinus sont les sinus des complémens; donc par le Théorême la somme des sinus des complémens est à leur différence comme la tangente de la moitié de la somme des complémens à la tangente de la moitié de la différence de ces complémens

Mais la moitié de la ſomme des complémens des deux arcs, eſt le complément de la moitié de la ſomme de ces arcs, & la demi-différence des complémens eſt égale à la demi-différence de ces arcs. Donc, &c.

Il eſt facile maintenant de trouver tous les ſinus. Le ſinus de 30° étant donné (130), on trouvera facilement celui de 15° (135), enſuite celui de 7° $\frac{1}{2}$, puis celui de 3° $\frac{3}{4}$, & ainſi de ſuite en allant par les moitiés juſqu'à la douzieme opération qui donne le ſinus de 52″ 44‴ 3⁗ $\frac{3}{4}$. Et parce que les ſinus des arcs fort petits ſe confondent avec ces arcs & leur ſont proportionnels, on fera comme cet arc eſt à ſon ſinus, ainſi l'arc d'une minute eſt à ſon ſinus. Ayant le ſinus d'une minute on trouvera facilement celui de 2′ (135). Suppoſant enſuite l'arc de 1′ $= b$, celui de 2′ $= a$, on trouvera (136) celui de 3′. Faiſant enſuite celui-ci $= a$ & celui de 1′ $= b$, on aura de même celui de 4′, & ainſi de ſuite juſqu'à 30°. Ayant le ſinus de 30° pour avoir celui d'un arc plus grand, *par exemple*, celui de 35°, on fera $a = 30°$, & $b = 5°$. Pour avoir celui de 30° 1′, on fera $a = 30°$ & $b = 1'$, & ainſi de ſuite juſqu'à 60°. Ayant le ſinus de 60° pour avoir le ſinus d'un arc plus grand, *par exemple* celui de 62°, on fera $a = 60°$, $b = 2°$, & ainſi de ſuite juſqu'à 90°. A l'égard des arcs plus grands que 90°, comme leurs ſinus ſont les mêmes que ceux de leurs ſupplémens, on n'aura aucune peine à les trouver : ainſi les ſinus de 100° ſera le même que celui de 80°. A l'égard des co-ſinus il eſt aiſé de les avoir dès que l'on connoît les ſinus : puiſque le co-ſinus eſt égal à la racine quarrée de la différence du quarré du rayon au quarré du ſinus

(135). A l'égard des tangentes, les triangles rectangles semblables *cdb*, *can* (*fig.* 108) donnent *cd* : *db* :: *ca* : *an*, ou co-sin. : sin. :: *r* : tang. Donc connoissant le sinus & le co-sinus d'un arc, on trouvera aisément la tangente de cet arc. On aura aussi facilement la co-tangente par la proportion tang. *r* :: *r* : co-tang. Supposant le rayon de 10000000000 parties égales, le sinus de 30° sera de 5000000000 de ces mêmes parties, on trouvera en suite, par ce que nous venons de dire, les nombres qui désignent les sinus, les co-sinus & les tangentes des arcs plus grands ou plus petits que 30°. A l'égard des logarithmes de ces mêmes sinus qu'on trouve dans les tables, ayant trouvé les nombres qui désignent les sinus, on a cherché leurs logarithmes qu'on a mis à la place de ces sinus dans les tables dont on se sert maintenant, de sorte qu'à présent on ne fait guere usage que des logarithmes tant des sinus que des co-sinus, tangentes & co-tangentes.

Si l'on veut avoir la sécante par le moyen du co-sinus & du rayon, on remarquera que les triangles semblables *bcd*, *nca* donnent (en faisant l'angle $bca = a$) co-sin. $a : bc = r :: ca = r : cn =$ séc. $a = \frac{rr}{\text{co-sin. } a}$. On voit aussi que $cn =$ séc. $a = \sqrt{[rr + (\text{tang.})^2 a]}$ & $cm =$ co-séc. $a = \sqrt{[rr + (\text{co-tang.})^2 a]}$.

REMARQUE I. Le sinus d'un arc *ah* de 90° est égal au rayon ; mais son co-sinus est $= 0$: car le co-sinus *cd* ou *bi* devient o lorsque l'arc *bh* devient o, c'est-à-dire, lorsque l'arc *ab* devient *ah*.

REMARQUE II. Pour avoir la corde d'un arc donné, cherchez le ſinus de la moitié de cet arc; le double ſera la corde cherchée. *Par exemple*, pour avoir la corde d'un arc de 40°, cherchez dans les tables le ſinus de l'arc de 20°, le double de ce ſinus ſera la corde cherchée; mais cette corde appartiendra à un cercle, dont le rayon ſera celui des tables. Pour avoir la corde de 40° dans un cercle donné, faites cette regle de trois. Le rayon des tables eſt au rayon du cercle donné comme la corde trouvée eſt à la corde demandée. Cette regle eſt fondée ſur ce que dans deux cercles, les cordes de deux arcs ſemblables ſont entr'elles comme les rayons de ces cercles.

139. THÉOREME. *Etant donné un angle, que j'appellerai* a, *l'on a la proportion, le ſinus de l'angle* a *eſt à la ſomme du rayon & du co-ſinus du même angle, comme la tangente de la moitié de l'angle* a *eſt au rayon.* Soit l'angle ACP (fig. 110) $= a$, l'angle inſcrit ABP ſera la moitié de a, & menant par le centre C de l'arc AP, la ligne CN parallele à BP, l'angle NCA = PBA ſera $= \frac{a}{2}$, & AN ſera = tang. $\frac{a}{2}$. Mais les triangles rectangles ſemblables BPD, NCA donnent PD : DB :: NA : CA, ou $\text{ſin.}\, a : r + \text{co-ſin.}\, a :: \text{tang.}\, \frac{a}{2} : r$. Donc $r + \text{co-ſin.}\, a = \frac{r\ \text{ſin.}\, a}{\text{tang}\cdot\frac{a}{2}}$.

REMARQUE. Parce que l'angle APD eſt meſuré par la moitié de l'arc AF, & que AF eſt = AP dont la moitié meſure l'angle NCA, il eſt viſible que les triangles rectangles NAC, PDA ſont ſemblables. Donc PD : AD :: CA : AN, c'eſt-à-dire, $\text{ſin.}\, a : r - \text{co-ſin.}\, a :: r : \text{tang.}\, \frac{a}{2}$. Ainſi $r - \text{co-ſin.}\, a = \frac{\text{ſin.}\, a}{r} \cdot \text{tang.}\, \frac{a}{2}$; & $\frac{r - \text{co-ſin.}\, a}{r + \text{co-ſin.}\, a} = \frac{(\text{tang.})^2 \frac{a}{2}}{rr}$. Donc

$rr \cdot \left(\frac{r - \text{co fin. } a}{r + \text{co-fin.} a}\right) = (\textit{tang.})^2 \frac{1}{2} a$: mais $(\textit{co-tang.})^2 = \frac{r4}{(\textit{tang.})^2}$; donc $(\textit{co-tang.})^2 \frac{1}{2} a = rr \cdot \left(\frac{r + \text{co-fin. } a}{r - \text{co-fin. } a}\right)$.

Nous venons de voir que l'on a la proportion $\text{fin. } a : r + \text{co-fin. } a :: \text{tang. } \frac{a}{2} : r$: mais $\text{tang. } \frac{a}{2} : r :: r : \text{co-tang. } \frac{a}{2}$; ainsi $\text{fin. } a : r + \text{co-fin. } a :: r : \text{co-tang. } \frac{a}{2}$. Maintenant si l'on fait le quart du cercle $= n$, l'on aura $\text{co-tang. } \frac{a}{2} = \text{tang. } \left(n - \frac{a}{2}\right) = \text{tang. } \left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2}\right) = \text{tang. } \left(\frac{n + p}{2}\right)$, en faisant $n - a = p$. Mais alors $\text{fin. } a = \text{co-fin. } p$, & $\text{fin. } p = \text{co-fin. } a$; donc la proportion $\text{fin. } a : r + \text{co-fin. } a :: r : \text{co-tang. } \frac{a}{2}$ deviendra $\text{co-fin. } p : r + \text{fin. } p :: r : \text{tang.} \left(\frac{n + p}{2}\right)$. De plus l'on a encore $\text{fin. } a : r - \text{co-fin. } a :: r : \text{tang. } \frac{a}{2} :: \text{co-tang. } \frac{a}{2} : r$; donc à cause de $\text{co-tang. } \frac{a}{2} = \text{tang. } \left(n - \frac{a}{2}\right) = \text{tang } \left(\frac{n}{2} + \frac{n - a}{2}\right) = \text{tang.} \left(\frac{n + p}{2}\right)$, de $\text{fin. } a = \text{co-fin.} p$ & de $\text{fin. } p = \text{co-fin. } a$, l'on aura $\text{co-fin. } p : r - \text{fin. } p :: \text{tang. } \left(\frac{n + p}{2}\right) : r$. Donc

$$r + \text{fin. } p = \frac{\text{co-fin.} p \cdot \text{tang.} \left(\frac{n + p}{2}\right)}{r}, \quad r - \text{fin. } p = \frac{\text{co-fin.} p \cdot r}{\text{tang. } \left(\frac{n + p}{2}\right)}, \quad \frac{r + \text{fin. } p}{r - \text{fin. } p} = \frac{(\textit{tang.})^2 \left(\frac{n + p}{2}\right)}{rr}; \text{ \&}$$

enfin $\frac{rr \cdot (r + \text{fin. } p)}{r - \text{fin. } p} = (\textit{tang.})^2 \left(\frac{n + p}{2}\right)$.

De la résolution des Triangles.

140. Avant de passer à la résolution des triangles, nous allons donner une idée du *Graphometre*, qui est un instrument d'un grand usage (fig. 113). C'est un demi-cercle *abd*, armé de pinnules ou de deux lunettes *; l'une de ces lunettes représentée par *a d* est fixe & dans le sens du diametre du demi-cercle, l'autre qu'on peut concevoir représentée par *f g* (qu'on nomme *alidade*) est mobile autour du centre *c* du demi-cercle. La circonférence de l'instrument est graduée. On se sert du Graphometre pour mesurer les angles. *Par exemple*, pour connoître l'angle *h c o*, ayant fixé l'instrument en enfonçant son pied dans la terre ou d'une autre maniere, dirigez le diametre *a d* vers le point o, ayant soin de disposer le plan de l'instrument de maniere qu'il se confonde avec le plan de l'angle *h c o*, tournez ensuite l'alidade *f g* jusqu'à ce que vous apperceviez l'objet *h* au travers des pinnules *f* & *g*. Supposons que l'alidade réponde alors à la division marquée 30, l'angle *h c o* sera mesuré par l'arc de 30°, c'est-à-dire que cet angle sera de 30°. Venons maintenant à la résolution des triangles rectangles **; pour cela nous avons besoin des Théorêmes suivans.

141. THÉOREME. *Le rayon des tables est au*

* On se sert le plus souvent de pinnules au lieu de lunettes. Les pinnules sont des plaques de métal fendues verticalement pour donner passage au rayon visuel. La fig. 113 représente un graphometre à pinnules & non à lunettes.

** Résoudre un triangle, c'est trouver les côtés & les angles de ce triangle : c'est du moins dans ce sens que nous prenons cette expression.

sinus

ſinus d'un des angles aigus, comme l'hypothénuſe eſt au côté oppoſé à cet angle (fig. 114). Soit le triangle rectangle cap, & ſuppoſons que cd repréſente le rayon des tables ; du point c, comme centre, ayant décrit les arcs dg & ab, la perpendiculaire df ſera le ſinus des tables de l'angle dcf ou acp. Or à cauſe des paralleles ap, df, les triangles acp, dcf ſont ſemblables & donnent $cd : df :: ca : ap$, ou r : ſin. $acp :: ca$ (*hypothénuſe* du triangle acp) : ap, côté oppoſé à l'angle c. On prouvera de même que r : ſin. $cap :: ca : cp$; donc, &c.

Corollaire. Donc dans tout triangle rectangle acp l'on a cette proportion, le rayon eſt au co-ſinus d'un angle aigu, comme l'hypothénuſe eſt au côté adjacent à cet angle. Car l'angle cap étant complément de l'angle acp, ſon ſinus eſt le co-ſinus de acp ; or nous venons de voir que r : ſin. $cap :: ca : cp$; donc r : co-ſin. $acp :: ca : cp$; donc, &c.

142. Théoreme. *Le rayon des tables eſt à la tangente d'un des angles aigus, comme le côté de l'angle droit adjacent à cet angle eſt au côté oppoſé à ce même angle* (fig. 115). Si l'on ſuppoſe que la partie cf du côté cb du triangle rectangle acb repréſente le rayon des tables, ayant élevé la perpendiculaire df juſqu'à la rencontre de l'hypothénuſe, fd ſera la tangente des tables par rapport à l'angle c : mais les triangles ſemblables cdf, cba donnent $cf : df :: cb : ab$, ou r : tang. $c :: cb : ab$; donc, &c.

On prouvera de la même maniere que r : tang. $a :: ab : cb$, ou que $ab : cb :: r$: tang. a.

La résolution des triangles rectangles se réduit à 4 cas. En effet, parce que l'angle droit est une chose connue, & que les deux autres angles sont complémens l'un de l'autre, il suffit dans un triangle rectangle de connoître deux choses différentes de l'angle droit pourvu que parmi ces deux choses il y ait au moins un côté, pour pouvoir résoudre le triangle comme nous allons le voir. Maintenant ou les deux choses connues sont un des angles aigus & un côté de l'angle droit, ou un angle aigu & l'hypothénuse, ou un côté de l'angle droit avec l'hypothénuse, ou enfin les deux côtés de l'angle droit ; & ces quatre cas trouveront toujours leur solution dans une des analogies des Théorêmes ci-dessus.

143. PROBLEME I. *Trouver la hauteur d'une tour* ph *en supposant son pied* p *accessible* (fig. 116.) On s'éloignera de cet édifice à une distance *co*, telle que l'angle *hco*, compris entre les lignes qu'on imaginera menées du point *c* au sommet & au pied de la tour, ne soit ni trop aigu ni fort approchant de 90° *, on fixera le centre du Graphometre en *c*, on mesurera la distance *co* par le moyen d'une toise, d'une corde, &c. disposant l'instrument de maniere que le diametre *ad* dirigé vers le point *o* soit horisontal ; ce qui se fait à l'aide d'un poids suspendu par un fil attaché au centre : ce fil doit alors raser le bord de l'instrument & répondre à 90°. Ayant observé le nombre

* Quand l'angle *c* est fort aigu ou approchant de 90°, une petite erreur dans l'angle en cause une grande sur la distance : l'erreur sera d'autant moins considérable que l'angle *c* approchera plus d'être = 45°.

des degrés de l'angle $acf = hco$, parce qu'ils ſont oppoſés au ſommet, l'on fera attention que la hauteur hp de l'édifice étant perpendiculaire à l'horiſon eſt auſſi perpendiculaire à la ligne horiſontale co; de ſorte que le triangle hco eſt rectangle en o : mais dans ce triangle nous connoiſſons l'angle c & le côté co; donc pour avoir la hauteur ho, on fera (142) r : tang. hco :: co : ho, hauteur cherchée à laquelle on ajoutera op, pour avoir la hauteur totale.

REMARQUE. On peut donc réſoudre un triangle rectangle lorſqu'on connoît un des côtés & un angle aigu : car ayant un des côtés on trouvera l'autre par le dernier Théorême, parce que l'on connoîtra néceſſairement l'autre angle aigu, complément du premier ; mais on connoîtra l'hypothénuſe par l'avant dernier Théorême.

144. PROBLEME II. *Dans un triangle* acb *rectangle en* b, *connoiſſant deux côtés* ab, bc, *on propoſe de trouver les angles aigus* (fig. 115). Faites le côté cb : ab :: r : tang. acb. Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître l'angle cherché. Cette analogie eſt la même que celle du dernier Théorême ; on a mis ſeulement la premiere raiſon à la place de la ſeconde & réciproquement.

REMARQUE. L'angle c étant connu, ſon complément cab ſera auſſi connu. De plus, par l'avant dernier Théorême l'on aura r : ſin. c :: ca : ab, ou ſin. c : r :: ab : ca (hypothénuſe).

145. PROBLEME III. *L'hypothénuſe* ac *& le côté* ab *étant donnés, trouver les angles aigus.*

Faites l'hypothénuse *ac* : au côté *ab* :: *r* : sin. *bca*. Cette analogie est la même que celle de l'avant-dernier Théorême, en mettant la premiere raison à la place de la seconde & réciproquement. L'angle *c* étant connu, son complément *a* le sera aussi.

146. PROBLEME IV. *Etant donné un côté* cb, *& un des angles aigus, trouver l'autre côté.* Soit supposé l'angle *a* connu, son complément *c* le sera aussi, & parce qu'on connoît un des côtés, *par exemple*, le côté *cb*, on pourra faire cette analogie. Le rayon des tables est à la tangente de l'angle *c*, comme le côté *cb* au côté *ab*.

REMARQUE. Connoissant les angles aigus & les côtés, on trouvera facilement l'hypothénuse par l'avant dernier Théorême.

147. PROBLEME V. *Etant donné un des angles aigus & l'hypothénuse, trouver le côté opposé à cet angle.* Faites, le rayon est à l'hypothénuse comme le sinus de l'angle connu est au côté opposé. Et parce qu'un des angles aigus étant connu, l'autre angle est nécessairement connu, on trouvera de même le côté qui lui est opposé. Voilà la solution des quatre cas.

De la résolution des Triangles obliquangles.

148. THÉOREME I. *Dans tout triangle* abd *inscrit au cercle*, ce qui est toujours possible (voyez le n°. 33); *les côtés sont entre eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés* (fig. 117). La moitié de la corde *ab* ou du côté *ab* est le sinus de l'angle *adb*, moitié de l'angle *acb*, parce que l'angle *d* a pour mesure la moitié

de l'arc $a\,b$, c'est-à-dire, l'arc $a\,x$ dont le sinus est $a\,p$ moitié de $a\,b$. De même la moitié du côté $a\,d$ sera le sinus de l'angle b, & la moitié du côté $d\,b$, celui de l'angle a. Or les moitiés sont comme les tous; donc les côtés d'un triangle quelconque $a\,b\,d$ sont entr'eux comme les sinus des angles qui leur sont opposés.

149. PROBLEME. *Etant donné un côté* ab *& les deux angles formés sur ce côté, trouver un des autres côtés* g, *par exemple.* Parce que les deux angles a & b étant donnés, l'angle d est connu (puisque les trois angles d'un triangle valent deux angles droits), on fera sin. $d : a\,b ::$ sin. $a : g$. En faisant sin. $d : a\,b ::$ sin. $b : f$, on connoîtra l'autre côté $f = a\,d$.

150. PROBLEME. *Mesurer la largeur* a p *d'une riviere* (fig. 118). Sur le bord $a\,b$ mesurez une base $a\,b$ à-peu-près égale à la largeur cherchée *; & supposant que p est un objet remarquable, situé sur l'autre bord de la riviere, comme un arbre, par exemple; mesurez avec le graphometre les angles $p\,a\,b$, $p\,b\,a$, ce qui vous fera aussi connoître l'angle p. Faites ensuite sin. p : $a\,b ::$ sin. $b : a\,p$ largeur de la riviere.

151. THÉORÈME II. *Dans tout triangle scalêne* b c a (fig. 119) *si du plus grand angle* c *on abaisse une perpendiculaire sur le plus grand côté* $b\,a$, *le plus grand côté sera à la somme des deux*

* Afin que l'erreur de l'angle observé, s'il y en a, influe moins dans l'erreur qu'on peut commettre sur la distance. De plus il est visible que pour avoir la largeur, il faut que $a\,p$ soit perpendiculaire au lit de la riviere.

autres, comme la différence de ces deux côtés est à la différence des segmens a p, b p *faits par la perpendiculaire* p c. Du point c comme centre, avec le rayon cb égal au plus petit côté, décrivez un cercle, & prolongez ac jusqu'à la rencontre de la circonférence en g. A cause des deux rayons gc & bc, ag sera $= ac + bc$, & parce que $bp = pd$ (20), $ap - bp$ sera $= ap - pd = da$ différence des deux segmens ap, bp. De plus $af = ac - cf = ac - cb$ est la différence des côtés ac & cb. Mais ga & ba sont deux sécantes extérieures dont les parties hors du cercle sont réciproquement proportionnelles aux sécantes entieres (56); donc $ab : ag = ac + bc :: af : ad$; donc, &c.

152. THÉOREME III. *Dans tout triangle scalêne* a b d (fig. 120) *la somme des deux côtés quelconques* a d, b d *est à leur différence comme la tangente de la demi-somme des angles* a & b *opposés à ces côtés, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.* Selon ce que nous avons démontré ci-dessus (138) la somme des sinus des deux angles a & b d'un triangle abd est à la différence de ces mêmes sinus comme

$$\text{tang.}\left(\frac{a+b}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{a-b}{2}\right);$$ or les côtés

opposés aux angles a & b sont dans le rapport de leur sinus (148); donc la somme des côtés opposés aux angles a & b est à la différence de ces mêmes côtés, comme la tangente de la demi-somme des angles a & b, est à la tangente de la demi-différence de ces mêmes angles.

Ces trois Théorêmes suffisent pour résoudre un

triangle quelconque dans lequel ſont données trois de ces cinq choſes, 2 angles & 3 côtés. Il y a quatre cas; où l'on connoît deux angles & le côté compris entre ces deux angles, ce cas a déja été réſolu (149); ou l'on connoît deux côtés & l'angle compris; ou l'on connoît les trois côtés; ou enfin l'on connoît deux côtés & un angle oppoſé à l'un de ces côtés. Mais il faut obſerver dans ce dernier cas qu'on trouve un ſinus qui peut également appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui ſeroit ſon ſupplément. *Par exemple*, dans le triangle *a b c* (fig. 121), connoiſſant les côtés *a b*, *ac*, ſi du point *a* comme centre avec le rayon *a b*, on décrit l'arc *b d*, le côté *a d* ſera égal au côté *ab*, & les triangles *d a c*, *c a b* auront deux côtés égaux & le même angle *c* oppoſé à ces côtés égaux; donc on ne pourra déterminer l'angle *b*, à moins qu'on ne connoiſſe l'eſpece de cet angle, c'eſt-à-dire, s'il eſt aigu ou obtus : car ſi cet angle eſt aigu, le côté *a b* ſera ſitué ſur le côté *a d*, c'eſt-à-dire, à la gauche de la perpendiculaire *a p*; mais il ſera ſitué à la droite ſi cet angle eſt obtus. C'eſt pourquoi dans ce cas l'on a beſoin de connoître l'eſpece de l'angle oppoſé à l'autre côté connu.

153. Probleme. *Connoiſſant les côtés* g *&* f *& l'angle* a *oppoſé au côté* g, *connoiſſant de plus l'eſpece de l'angle* b, *réſoudre le triangle* a d b (fig. 117). Faites (Théorême I.) *d b* : ſin. *a* :: *ad* : ſin. *b*. Dans cette proportion les trois premiers termes ſont connus, puiſque l'angle *a* étant connu, ſon ſinus l'eſt auſſi par les tables; donc le ſinus de l'angle *b* ſera connu. Ce ſinus peut appartenir à un angle aigu ou à un angle obtus qui

feroit fon fupplément : mais comme on connoît l'efpece de l'angle *b*, il ne peut y avoir aucune difficulté. Ce finus étant cherché dans les tables, on trouvera la valeur de l'angle cherché ; mais fi l'angle *b* étoit obtus, on prendroit le fupplément de cet angle. L'angle *a* & l'angle *b* étant connus, l'angle *d* le fera, & l'on connoîtra le côté *ab* en faifant fin. *a* : fin. *d* :: *db* : *ab*.

154. PROBLEME. *Connoiffant les trois côtés* ab, ca, cb *d'un triangle fcalène* (fig. 119), *trouver les angles*. De l'angle *c* oppofé au plus grand côté, abaiffez la perpendiculaire *cp* fur ce plus grand côté & faites (Théorême II) le grand côté eft à la fomme des deux autres, comme la différence *af* de ces deux côtés, eft à la différence *ad* des fegmens faits par la perpendiculaire *cp*. Du grand côté *ba* ôtant cette différence *da*, il reftera *db* dont la moitié *bp* eft le petit fegment, qui étant retranché de *ba*, il reftera *pa* grand fegment. Cela pofé dans le triangle rectangle *bpc*, on connoît l'hypothénufe *bc* & un côté *bp* ; donc (145) on connoîtra l'angle *b*. De même dans le triangle rectangle *pca*, on connoît le côté *pa* & l'hypothénufe *ac* ; donc on aura facilement l'angle *a*. Connoiffant les angles *b* & *a*, on connoîtra facilement l'angle *c*.

155. REMARQUE. Nous avons fuppofé que *bp* étoit la moitié de *bd*, ce qui eft évident, puifqu'une perpendiculaire *cp*, abaiffée du centre d'un cercle fur une corde, coupe cette corde en deux parties égales (20). Mais le triangle *bcd* eft ifocelle ou équilatéral. Car les rayons *bc* & *cd* font égaux, & de plus fi *bd* eft égal à *bc*, il eft vifible que les trois côtés feront égaux. Donc fi du

ſommet d'un angle quelconque d'un triangle équilatéral, ou ſi du ſommet de l'angle compris entre les deux côtés égaux d'un triangle iſocelle, on abaiſſe une perpendiculaire ſur le côté oppoſé, ce côté ſera diviſé en deux également.

156. PROBLEME. *Dans un triangle ſcalêne* a b d (fig. 120) *connoiſſant deux côtés* a b, b d *& l'angle* b *compris entre ces côtés, réſoudre ce triangle.* Cherchez un des angles oppoſés aux côtés connus, en faiſant (152) $bd + ab : bd - ab ::$

$$\text{tang.} \left(\frac{a+d}{2}\right) : \text{tang.} \left(\frac{a-d}{2}\right),$$

le quatriéme terme de cette proportion dont les trois premiers termes ſont connus, fera connoître la tangente de la demi-différence des angles a & d, dont la ſomme eſt $180° - b$ (parce que la ſomme de deux angles d'un triangle eſt le ſupplément du troiſiéme angle, à cauſe que les trois angles d'un triangle valent deux angles droits). Cette tangente étant cherchée dans les tables, fera connoître un angle qui, ajouté à la demi-ſomme des angles a & d, donnera le plus grand angle cherché a (car un plus grand angle eſt oppoſé à un plus grand côté), & qui retranché de cette demi-ſomme, donnera le plus petit angle d (voyez le calcul, n° 66. Problême I.).

157. PROBLEME. *Meſurer la hauteur* f a *d'une tour dont le pied eſt ſuppoſé inacceſſible* (fig. 122). Ayant meſuré dans la campagne une baſe $b\,n$, je poſe le graphometre au point de ſtation b, & dirigeant la lunette fixe dans la ligne horiſontale $d\,c$ & la lunette mobile vers a, je prends l'angle $a\,d\,c$. Portant enſuite l'inſtrument à l'autre point de ſtation, je prends l'angle $a\,m\,c$ ſupplément de l'angle

a m d. Je connoîtrai donc l'angle *d a m* avec les angles *d* & *m*, & le côté *d m* du triangle *d a m*; donc je trouverai facilement le côté *a d*, en disant sin. *a* : *d m* :: sin. *a m d* : *a d*. Connoissant *a d*, je ferai (141) *r* : *a d* :: sin. *d* : *a c**. Joignant au côté *a c* la hauteur *c f* = *d b*, hauteur du graphometre, j'aurai *a f* hauteur cherchée. (Il s'agit ici de la hauteur de la tour au-dessus du niveau de la campagne qu'on suppose être une plaine). En opérant par les logarithmes, j'aurai L · *ac* = L · *ad* + L · sin. *d* — L · *r*.

158. PROBLEME. *Mesurer la distance de deux lieux inaccessibles* a *&* b (*fig.* 123). Prenez deux points de station *c* & *d*, du point *d* mesurez l'angle *a d c*, & du point *c* mesurez l'angle *a c d*. Alors dans le triangle *a c d* vous connoissez deux angles & le côté *c d* que je suppose avoir été mesuré; donc vous connoîtrez facilement le troisiéme angle *a*, & les deux autres côtés (149) : ainsi vous connoîtrez *a d* & *a c*. Résolvez de même le triangle *b c d* dans lequel vous pouvez mesurer les angles *c* & *d* situés sur le côté connu *c d*, & vous trouverez facilement le côté *b c*. Mais dans le triangle *a c b* vous pouvez mesurer facilement l'angle *c* compris entre les côtés connus *a c*, *b c*; donc (156) vous pourrez facilement trouver un des autres angles du même triangle, l'angle *c b a*, *par exemple*, ce qui fera connoître le troisiéme angle. Cela posé dans le triangle *a c b*, on connoîtra facilement le côté *a b* cherché, en faisant (148) sin. *a b c* : *a c* ::

* Cette analogie est la même que celle du numéro cité en faisant changer de place aux moyens.

fin. acb : ab, distance cherchée; ou L · ab = L · ac + L · fin. acb — L · fin. abc. *Par exemple*, supposant qu'on ait trouvé le côté ac de 120 toises, le côté cb de 142 toises & l'angle acb de 48°. Pour avoir les angles cab, cba & le côté ab, je retranche 48° de 180°, il me reste 132° pour la somme des angles cab, cba, & par conséquent 66° pour leur demi-somme. Je fais (156) $142^t + 120^t = 262^t : 142^t - 120^t = 22^t$ :: tang. 66° : tang. $\left(\frac{cab - cba}{2}\right)$. En opérant par les logarithmes,

Log. 22	1·342422
Log. tang. 66°	10·351417
Somme	11·693839
Log. 262	2·418301
Reste	9·275538.

c'est-à-dire, de la somme des logarithmes des moyens, retranchant le logarithme de l'extrême connu, le reste 9·275538 donne le logarithme de l'extrême cherché. Ce logarithme dans les tables est fort approchant de celui de 10°. 41'. * ajoutant cette quantité à la demi-somme des angles ci-dessus, j'aurai le plus grand angle cab de 76°. 41', & par conséquent l'angle abc de 55°. 19'. Enfin pour avoir le côté ab, je fais cette proportion arihmétique log. fin. abc · log. ac : log. fin. acb · log. ab; & je trouve le côté cherché ab de 108t. 4 à-peu-près.

* Il y a une petite erreur, puisque l'on ne prend qu'un angle approché, mais elle est peu considérable.

159. PROBLEME. *Meſurer* 1°. *la hauteur* a b, 2°. *la pente* a d *d'une montagne inacceſſible* d a (fig. 124). Ayant meſuré la baſe *g f*, je meſure les angles *a g f*, *a f g* (ſupplément de *a f b*), ce qui me fait connoître l'angle *g a f*. Dans le triangle *g a f* je connois les angles & un côté *g f*; donc je connoîtrai facilement les côtés *a f*, *a g*. Dans le triangle *a g b* rectangle en *b* (puiſque la ligne *ab* hauteur de la montagne eſt perpendiculaire ſur la ligne horiſontale *g f b*), je connois l'angle *g* & l'hypothénuſe; donc je trouverai facilement le côté *a b*, en diſant (141) $r : ga :: \sin. g : ab$, ou $L \cdot r \cdot L \cdot ga : L \cdot \sin. g \cdot L \cdot ab$. Maintenant prenant un point *p* tel qu'ayant meſuré l'angle *d f p*, je puiſſe appercevoir de ce point le pied *d* de la montagne, je meſure le côté *f p* & l'angle *f p d*; donc dans le triangle *d f p*, je connois un côté *f p*, les deux angles qui comprennent ce côté, & par conſéquent le troiſiéme angle; donc je connoîtrai facilement le côté *f d*. Cela poſé dans le triangle *a g d* je connois le côté *a g*, le côté $g d = g f + f d$ & l'angle *g* compris entre ces côtés; donc je trouverai facilement le côté *a d* (156) c'eſt-à-dire la pente de la montagne.

160. PROBLEME. *Lever une carte géographique* (fig. 125). Prenez une baſe *a b* qui ne ſoit pas moindre que la dixiéme ou huitiéme partie de la diſtance des deux objets les plus éloignés qu'on veut repréſenter ſur la carte *. Ayant meſuré *a b* prenez

* L'erreur ſera d'autant plus petite que la diſtance des deux objets les plus éloignés différera moins de la baſe *ab*. De plus nous ſuppoſons les objets ſitués ſur un plan horiſontal, & l'erreur ſera d'autant plus petite que ces objets appro-

avec le graphométre la grandeur des angles *d a b*, *c a b*, *n a b*, *m a b*, *x a b*. Transportez-vous ensuite de *a* en *b*, & mesurez les angles *n b a*, *c b a*, *d b a*, *x b a*, *m b a*. Comme l'angle *h b a* seroit trop obtus, prenez *b n* pour base & mesurez les angles *h n b*, *h b n*. Cela fait, supposons que *a b* soit de 800[t], prenez une ligne à discrétion pour en faire une échelle de 100 parties égales, Ce qu'on peut faire en portant une petite ouverture de compas dix fois sur une ligne arbitraire *p q*, ouvrant ensuite le compas de maniere que les deux pointes soient dix fois plus éloignées. Portez cette nouvelle ouverture neuf fois sur la même ligne à compter depuis la dixiéme division, & vous aurez l'échelle *p q* de 100 parties. Supposant maintenant que chaque division de l'échelle vaille 20 toises, tirez sur le papier une ligne *a b* qui doit être de quarante parties de l'échelle, faites en *a* & en *b* les angles *d a b*, *c a b*, &c. *n b a*, *c b a*, &c. tels que vous les avez trouvés dans l'opération; & tirant les lignes *c a*, *c b*, &c. ces lignes détermineront par leur rencontre la position du point *c*, &c. Faisant ensuite sur *n b* les angles *h n b*, *h b n*, de la grandeur trouvée, vous aurez la position de l'objet *h*. Il est visible que les objets *d*, *c*, *n*, *h*, &c. seront placés sur le papier comme ils le sont sur le terrein *; ainsi le Problême sera résolu. Pour con-

cheront plus d'être situés dans un tel plan. Dans nos Institutions Mathématiques nous avons enseigné la méthode de placer sur une carte les points qui sont au-dessus ou au-dessous de l'horison, de mesurer un terrein, de lever les plans, &c.

* On suppose que ces objets sont situés sur un plan horisontal. Si cela n'étoit pas, on pourroit néanmoins repré-

noître la distance du point n au point h, *par exemple*, ouvrez le compas de n en h, & portant cette ouverture sur l'échelle, supposons qu'elle contienne 18 divisions $\frac{3}{4}$, puisque nous avons supposé chaque division de 20^t, la distance de ces points sera de 375^t.

161. PROBLEME. *Trouver le rapport approché du diametre à la circonférence d'un cercle* (fig. 126). Inscrivez dans ce cercle un polygone régulier de 48 côtés, circonscrivez au même cercle un pareil polygone, ce qui est facile; car divisant 360 par 48, le quotient $7\frac{1}{2}$ qui est le quart de 30, fait connoître l'angle au centre d'un tel polygone. Or (132) il est facile de trouver le sinus de l'angle de 30 degrés, & ensuite celui de sa moitié 15° puis celui de, $7\frac{1^\circ}{2}$ moitié de ce dernier (135). Supposant donc l'arc gd de 7 degrés 30′ (on a fait l'arc gd plus grand qu'il ne devroit être afin d'éviter la confusion), gd sera le côté du polygone inscrit, pb celui du polygone circonscrit. Tirant par le milieu de cet arc le rayon oC, dx sera le sinus & ob la tangente de 3° 45′; or en supposant le rayon = 10000000, le sinus dx de 3° 45′ est = 654031, & la tangente du même arc est = 655435; donc $gd = 2gx = 1308062$, & $bp = 2bo = 1310870$. Multipliant gd & bp par 48, le périmetre du polygone inscrit sera 62786976, & celui du polygone circonscrit sera = 62921760. L'arc god étant plus grand que sa corde gd, & plus petit que pb, on peut le considérer (*) sans une grande erreur comme moyen arithmétique entre ces deux lignes, & considérer de même la circonférence comme moyenne arithmétique entre les périmetres dont nous venons de parler; c'est pourquoi prenant la demi-somme des périmetres trouvés, on aura la circonférence du cercle à-peu-près = 62854368. Mais le rayon étant = 10000000, le dia-

senter la situation respective de ces objets ou lever la carte en employant la méthode dont nous avons parlé dans la seconde édition de nos Institutions.

(*) Parce que le polygone régulier circonscrit étant plus grand que le cercle, chaque côté d'un tel polygone est plus grand que l'arc correspondant.

métre sera = 20000000 ; ainsi le diametre est à la circonférence à-peu-près comme 20000000 : 62854368, ou comme 200 : 628 · 54368 (en divisant par 100000), ou comme 200 : 628 (en négligeant la fraction décimale), ou comme 100 : 314 à-peu près (en divisant ces deux derniers nombres par 2), ce qui donne un des rapports dont nous avons déja parlé (79).

162. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés* a, b, c *d'un triangle scalene* a b d (fig. 127), *trouver l'aire de ce triangle.* Cherchez par la méthode ci-dessus (154) les angles a, b, c & le segment ap du triangle proposé. Cela posé, dans le triangle abp, rectangle en p, on connoîtra l'hypothénuse ab, l'angle a & le côté ap; donc on trouvera facilement le côté bp, c'est-à-dire, la valeur de la perpendiculaire abaissée de l'angle b sur le côté opposé ad. Multipliant la base ad par la moitié de la hauteur bp, l'on aura la surface du triangle proposé.

D'une autre maniere. Soit $bp = y$ & $ap = x$, par la propriété du triangle rectangle abp, on a $x^2 + y^2 = b^2$. De même le triangle rectangle bpd donne, en faisant attention que $pd = a - x$, $y^2 + a^2 - 2ax + x^2 = c^2$. Retranchant cette équation de la premiere, il vient $2ax - a^2 = b^2 - c^2$, ou (en transposant) $2ax = a^2 + b^2 - c^2$, d'où je tire $x = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a} = \frac{(b+c)\cdot(b-c)}{2a} + \frac{a}{2}$; c'est-à-dire que pour avoir x il faut trouver une quatriéme proportionnelle aux lignes $2a$, $b + c$, $b - c$, & lui ajouter $\frac{a}{2}$. Dès qu'on aura trouvé $x = ap$, on retranchera le quarré de x du quarré de l'hypothénuse b, prenant la racine du reste, on aura $y = bp$, dont la moitié étant multipliée par a, donnera l'aire du triangle proposé.

163. PROBLEME. *Trouver l'angle* a *du même triangle* a b d, *sans avoir recours à la méthode ci-dessus* (154). Du point a comme centre avec le rayon $ab = b$ décrivez l'arc bg, tirez la corde bog, & du point a le rayon ao par le milieu de cette corde. Cela posé ab est $= ag$ par la propriété du cercle, & pg

$= ag - ap = b - x$. mais le triangle rectangle bpg donne $y^2 + b^2 - 2bx + x^2 = p^2$ (en supposant l'hypothénuse $bg = p$) ou, en substituant b^2 à la place de $y^2 + x^2$, $2b^2 - 2bx = p^2$, ou $p^2 = 2b(b - x)$. Mettant pour x sa valeur trouvée dans le problême précédent, on a $p^2 = 2b \times \left(b + \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2a}\right) = 2b \cdot \left(\frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2a}\right)$; or $2ab - a^2 - b^2 = -(b - a)^2$; donc $p^2 = 2b \times \left(\frac{c^2 - (b-a)^2}{2a}\right) = \frac{2b}{2a}[c^2 - (b - a)^2] = \frac{b}{a}[c^2 - (b - a)^2]$. Faisant $b - a = n$, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times (c^2 - n^2) = \frac{b}{a} \times (c + n) \times (c - n)$, & remettant la valeur de n, on a $p^2 = \frac{b}{a} \times (c + b - a) \cdot (c + a - b) = \frac{b}{a} \times (c + b + a - 2a) \cdot (c + a + b - 2b)$; donc appellant $2m$ la somme des trois côtés, on aura $p^2 = \frac{b}{a} \times (2m - 2a) \cdot (2m - 2b) = \frac{4b}{a}(m - a) \cdot (m - b)$.

Mais dans le triangle rectangle aog, on a $ag = ab = b : og :: r : \text{sin.}\, oag$, ou $b : \frac{p}{2} :: r : \text{sin.}\, gao$; donc $\frac{p}{2} = \frac{b \cdot \text{sin.}\, gao}{r}$, ou $p = \frac{2b}{r}\text{sin.}\, gao$, & $p^2 = \frac{4b^2}{r^2} \cdot \text{sin.}^2\, gao$.

Egalant les deux valeurs de p^2, on a $\frac{4b}{a}(m - a) \cdot (m - b) = \frac{4b}{r^2}\text{sin.}^2\, gao$, divisant par $4b$ & faisant disparoître les dénominateurs, il vient $r^2 (m - a) \cdot (m - b) = a \cdot b\,(\text{sin.}\, gao)^2$, d'où l'on tire $a \cdot b : (m - a) \cdot (m - b) :: r^2 : (\text{sin.}\, gao)^2$. C'est-à-dire, le produit des deux côtés a & b qui comprennent l'angle cherché bad, est au produit des différences de la demi-somme m des trois côtés à chacun des côtés de cet angle, comme le quarré du rayon au quarré du sinus de la moitié de cet

cet angle. Prenant la racine du quatriéme terme de cette proportion l'on aura le sinus de la moitié de l'angle a; ce qui fera connoître la moitié de cet angle par le moyen des tables; connoissant la moitié, on connoîtra l'angle entier. On s'y prendra de même pour connoître un autre angle quelconque.

164. PROBLEME. *Connoissant les trois côtés du même triangle trouver sa surface indépendamment de la méthode ci-dessus* (162). Nous avons déja trouvé (162) $x^2 + y^2 = b^2$; d'où l'on tire $y^2 = b^2 - x^2 = (b + x) \cdot (b - x)$, & en mettant pour x sa valeur $\frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}$, on a $y^2 =$

$$\left(b + \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2a}\right) \times \left(b + \frac{c^2 - b^2 - a^2}{2a}\right) = \left(\frac{2ab + b^2 + a^2 - c^2}{2a}\right) \times \left(\frac{2ab - b^2 - a^2 + c^2}{2a}\right)$$

$$= \left(\frac{(b+a)^2 - c^2}{2a}\right) \times \left(\frac{c^2 - (b-a)^2}{2a}\right) = \left(\frac{(a+b+c) \times (a+b-c)}{2a}\right) \times \left(\frac{(c+b-a) \times (c-b+a)}{2a}\right);$$

donc en ôtant la fraction, $4a^2y^2 = (a+b+c) \times (a+b-c) \times (b+c-a) \times (c+a-b)$*, ou $4a^2y^2 = (a+b+c) \times (a+b+c-2c) \cdot (a+b+c-2a) \cdot (a+b+c-2b)$. Donc supposant la somme des trois côtés $= 2p$, on aura $4a^2y^2 = (2p) \cdot (2p-2c) \cdot (2p-2a) \cdot (2p-2b) = 16p \times (p-c) \cdot (p-a) \cdot (p-b)$; donc en divisant par 16, l'on aura $\frac{a^2}{4} y^2 = p\,(p-c)\,(p-a)\,(p-b)$, & prenant la racine quarrée, il vient $\frac{a}{2} y = \sqrt{[p\,(p-c) \cdot (p-a) \cdot (p-b)]}$.

Mais $\frac{ay}{2}$ est le produit de la moitié de la base du triangle par sa hauteur; donc $\frac{a}{2}y$ est l'aire du triangle. C'est pourquoi l'aire d'un triangle dont on connoît les trois côtés se trouve en retranchant de la demi-somme des trois côtés chacun des côtés du triangle, multipliant ces trois restes entr'eux & par la demi-somme, &

* $2a$ doit être multiplié par lui-même, parce qu'il se trouve dans deux facteurs du second membre de l'équation précédente.

prenant la racine du produit. Soit, *par exemple*, le côté $a\,d = a = 5$ toises, $b = 4^t$, $c = 3^t$, $2p$ sera $= 12^t$, $p = 6^t$, $p - c = 3^t$, $p - a = 1^t$, $p - b = 2^t$; donc $\sqrt{[p \cdot (p-c) \times (p-a) \cdot (p-b)]} = \sqrt{(6 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2)} = \sqrt{(36)} = 6$, c'est-à-dire que l'aire de ce triangle sera de 6 toises quarrées.

165. PROBLEME. *Etant donnés les côtés d'un triangle* abd, *connoitre si un angle cherché est aigu ou obtus.* L'équation $2ax - a^2 = b^2 - c^2$ (162) devient en transposant, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$; c'est-à-dire, que le quarré d'un côté c opposé à un angle aigu a vaut moins que la somme des quarrés des deux autres côtés. Mais dans la figure 128, $a\,p$ étant toujours la distance x de l'angle cherché à la perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle b sur la base $a\,d$ prolongée s'il le faut, $d\,p$ sera $= x + a$; mais le triangle rectangle $a\,b\,p$ donne $(b\,p)^2 + (a\,p)^2 = (a\,b)^2$, ou $y^2 + x^2 = b^2$, & le triangle rectangle $b\,p\,d$ donne $y^2 + a^2 + 2ax + x^2 = c^2$ (parce qu'ici $d\,p = a + x$). Retranchant la premiere équation de la seconde, l'on trouve $a^2 + 2ax = c^2 - b^2$, ou en transposant, $c^2 = a^2 + b^2 + 2ax$. Mais (dans la fig. 128) le côté c est opposé à un angle obtus; donc le quarré d'un côté opposé à un angle obtus est plus grand que la somme des quarrés des deux autres côtés, au contraire le quarré d'un côté opposé à un angle aigu vaut moins que la somme des quarrés des deux autres côtés. Ainsi en supposant qu'on connoît les côtés d'un triangle, il est facile de s'assurer quel est l'angle obtus, ou même s'il y en a.

166. REMARQUE. Ce que nous avons dit ci-dessus sur la théorie des sinus, co-sinus, &c. suffit pour ceux qui veulent s'en tenir à ce qu'on appelle *Elémens de Mathématiques*, & ils peuvent s'arrêter ici. Mais qu'il nous soit permis d'approfondir un peu cette matiere en faveur des jeunes Géometres qui veulent aller plus loin.

167. Si l'arc $a\,b$ (fig. 108) est regardé comme positif, son sinus $b\,d$ sera positif aussi-bien que son co-sinus $c\,d$. Lorsque cet arc deviendra $= h\,a = 90°$, son sinus sera égal au rayon $= r$ & son co-sinus $= 0$; cet arc devenant $a\,h\,u$ plus grand qu'un quart de cercle, aura son sinus $u\,q$ tourné du

même côté, & par conséquent positif; mais son co-sinus cq se trouvant de l'autre côté du centre dans une situation opposée à cd co-sinus de ab, sera négatif; & enfin il deviendra $= - r$, lorsque l'arc ba deviendra égal à la demi-circonférence $ahp = 2m$, en faisant le quart de cercle $ah = m$; au contraire son sinus deviendra $= 0$. Si l'arc devient $ahz > 2m$, mais plus petit que $3m$, son sinus qz & son co-sinus cq seront négatifs; puisque ces lignes sont dans une situation opposée à celle des lignes bd, cd. Si l'arc dont nous parlons & que nous désignerons par a devient $= 3m = 270^\circ$, son co-sinus deviendra $= 0$, & son sinus $= - r$. en supposant a plus grand que $3m$, mais moindre que $4m = 360^\circ$, son sinus dg sera négatif & son co-sinus cd positif. Si $a = 4m = 360^\circ$, son sinus sera $= 0$ & son co-sinus $= r$, si a devient plus grand que $4m$, *par exemple*, $= 4m + ab$, mais moindre que $5m$, son sinus bd sera positif aussi-bien que son co-sinus; de sorte qu'en ajoutant une ou même plusieurs circonférences à un arc, cela ne change rien à son sinus, ou à son co-sinus. En prenant a pour l'origine de l'arc ab positif, l'arc ag sera négatif, mais son co-sinus sera positif si cet arc est $< m$. Si cet arc a négatif devient plus grand que m, mais moindre que $2m$, son sinus & son co-sinus seront tous les deux négatifs; si cet arc devient plus grand que $2m$ & moindre que $3m$, son sinus deviendra positif, mais son co-sinus restera négatif. Cet arc étant plus grand que $3m$, mais moindre que $4m$, son sinus continuera d'être positif & son co-sinus sera aussi positif. En général un arc positif, plus petit que $2m$, a toujours son sinus positif; mais un arc positif plus

grand que $2m$ & plus petit que $4m$, a son sinus negatif. Un arc positif a, plus petit que m, a toujours son co-sinus positif; il l'a négatif lorsque cet arc est entre m & $3m$, positif lorsqu'il est entre $3m$, $4m$ & m. A l'égard d'un arc a négatif, son sinus est négatif l'arc étant entre o & $2m$, & positif l'arc étant entre $2m$ & $4m$. Le co-sinus est positif l'arc étant entre o & m, négatif entre m & $3m$; mais il est positif si a est entre $3m$ & $4m$. On ne change rien au sinus, ni au co-sinus en ajoutant à l'arc une ou plusieurs circonférences entieres, soit avec le signe $+$ ou avec le signe $-$. En supposant $r = 1$, on aura sin. $0 = 0$, co-sin. $0 = 1$, sin. $m = 1$, co-sin. $m = 0$, sin. $2m = 0$, co-sin. $2m = -1$, sin. $3m = -1$, co-sin. $3m = 0$, sin. $4m = 0$, co-sin. $4m = 1$. Ainsi tous les sinus & co-sinus sont renfermés entre $+1$ & -1. On a encore co-sin. $a =$ sin. $(m - a)$, sin. $a =$ co-sin. $(m - a)$, & parce que le triangle cdb est rectangle en d, on a $(cd)^2 + (bd)^2 = (cb)^2$, ou $(\text{co-sin. } a)^2 + (\text{sin. } a)^2 = r^2 = 1$.

168. L'arc a étant positif & moindre que m, sa tangente an & sa co-tangente hm sont positives. Mais si a est plus grand que m & moindre que $2m$, sa co-tangente & sa tangente seront négatives. Car soit l'arc ahu, sa tangente se trouvera sur le prolongement de la ligne an qui passe par l'origine de l'arc a, & d'ailleurs elle doit être terminée par la rencontre du rayon cu qui passe par l'autre extrémité du même arc; or cu ne peut rencontrer an, à moins de prolonger cette ligne jusqu'en $2q$. A l'égard de la co-tangente $h2p$, il est évident que sa situation est opposée à hm co-tangente de l'arc ab; donc, &c.

Si a devient plus grand que $2m$, mais moindre que $3m$, sa tangente & sa co-tangente deviendront positives ; car an est la tangente de l'arc ahz, & hm sa co-tangente. Si a devient plus grand que $3m$ & moindre que $4m$, sa tangente & sa co-tangente deviendront négatives ; ainsi l'arc $ahxg$ aura pour tangente la ligne $a2q$, & pour co-tangente la ligne $h2p$. On peut voir par-là que l'origine de la co-tangente d'un arc doit être éloignée de 90° de l'origine de cet arc.

A un arc ag négatif, répondra une tangente & une co-tangente négatives, si cet arc est plus petit que m ; s'il est plus grand que m & plus petit que $2m$, sa tangente & sa co-tangente sont positives. Ainsi l'arc ag a pour tangente $a2q$, & pour co-tangente $h2p$; mais l'arc axz a pour tangente an & pour co-tangente hm. Si cet arc devient axu plus grand que $2m$ & moindre que $3m$, sa tangente & sa co-tangente redeviendront négatives ; & enfin ces lignes seront positives lorsque cet arc $axhb$ sera plus grand que $3m$ & moindre que $4m$.

169. COROLLAIRE. Donc un arc dont la tangente seroit positive & la co-tangente négative & réciproquement, est absurde & imaginaire. C'est d'ailleurs ce qui suit de la formule tang. $a \times$ co-tang. $a = r^2$, car l'on a tang. $a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$; or r^2 est une quantité positive ; donc tang. $a \times$ co-tang. a est aussi une quantité positive ; ce qui ne peut être à moins que co-tang. a & tang. a ne soient toutes deux positives ou toutes deux négatives. Donc si co-tang. a est positive, l'on aura

tang. $a = \frac{r^2}{\text{co-tang. } a}$ positive ; mais cette quantité sera négative, si co-tang. a est négative.

170. En supposant $r = 1$, l'on a 1°. sin. $(a+b)$ * $=$ sin. $a \cdot$ co-sin. $b +$ co-sin. $a \cdot$ sin. b ; 2°. co-sin.$(a+b)$ $=$ co-sin. $a \cdot$ co-sin. $b -$ sin. $a \cdot$ sin. b ; 3°. sin. $(a-b)$ $=$ sin. $a \cdot$ co-sin. $b -$ sin. b. co-sin. a ; 4°. co-sin.$(a-b)$ $=$ co-sin $a \cdot$ co-sin. $b +$ sin. $a \cdot$ sin. b ; 5°. tang. $a = \frac{\text{sin. } a}{\text{co-sin. } a}$; 6°. co-tang. $a = \frac{\text{co-sin. } a}{\text{sin. } a}$,

Cela posé l'on aura tang. $(a+b) = \frac{\text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a}{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b}$, & divisant le second membre haut & bas par co-sin. $a \cdot$ co-sin. b,

il vient tang. $(a+b) = \frac{\frac{\text{sin. } a}{\text{co-sin. } a} + \frac{\text{sin. } b}{\text{co-sin. } b}}{1 - \frac{\text{sin. } a \cdot \text{sin. } b}{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b}} =$

$\frac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a \cdot \text{tang. } b}$. De même co-tang. $(a+b)$

$= \frac{\text{co-sin. } (a+b)}{\text{sin. } (a+b)} = \frac{\text{co-sin. } a \cdot \text{co-sin. } b - \text{sin. } a \cdot \text{sin. } b}{\text{sin. } a \cdot \text{co-sin. } b + \text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a}$

$= \frac{\frac{\text{co-sin. } a}{\text{sin. } a} - \frac{\text{sin. } b}{\text{co-sin. } b}}{1 + \frac{\text{sin. } b \cdot \text{co-sin. } a}{\text{co-sin. } b \cdot \text{sin. } a}}$ (en divisant haut & bas

par sin. $a \cdot$ co-sin. b) $= \frac{\text{co-tang. } a - \text{tang. } b}{1 + \text{co-tang. } a \cdot \text{tang. } b}$. On trouvera par un calcul semblable tang. $(a-b) =$

* a & b désignent des arcs ; nous supposons $a > b$.

$\frac{\text{fin.}(a-b)}{\text{co-fin.}(a-b)} = \frac{\text{tang.}\,a - \text{tang.}\,b}{1 + \text{tang.}\,a \cdot \text{tang.}\,b}$, & co-t. $(a-b)$ $= \frac{\text{co-fin.}(a-b)}{\text{fin.}(a-b)} = \frac{\text{co-tang.}\,a + \text{tang.}\,b}{1 - \text{tang.}\,b \cdot \text{co-tang.}\,a}$.

En ajoutant ensemble les valeurs de fin. $(a+b)$ & de fin. $(a-b)$, & divisant par 2 on aura fin. $a \cdot$ co-fin. $b = \frac{\text{fin.}(a+b) + \text{fin.}(a-b)}{2}$. En retranchant la valeur de fin. $(a-b)$ de celle de fin. $(a+b)$, & divisant le résultat par 2, il vient fin. $b \cdot$ co-fin. $a = \frac{\text{fin}(a+b) - \text{fin.}(a-b)}{2}$. En ajoutant les valeurs de co-fin. $(a-b)$, de co-fin. $(a+b)$ & divisant par 2, l'on a co-fin. $a \cdot$ co-fin. $b =$ $\frac{\text{co-fin.}(a-b) + \text{co-fin.}(a+b)}{2}$. Retranchant la valeur de co-fin. $(a+b)$ de celle de co-fin. $(a-b)$, & divisant ensuite par 2, l'on trouve cette quatriéme formule fin. $a \cdot$ fin. $b = \frac{\text{co-fin.}(a-b) - \text{co-fin.}(a+b)}{2}$.

En faisant $a+b=m$, $a-b=n$, l'on aura $(a+b)+(a-b)=2a=m+n$, ou $a=\frac{m+n}{2}$, & $(a+b)-(a-b)=2b=m-n$, ou $b=\frac{m-n}{2}$. Si dans les quatre dernieres formules qu'on vient de trouver, on substitue les valeurs de a & de b, qu'on fasse disparoître le dénominateur, & que de plus on fasse changer de place aux membres de chaque équation, l'on trouvera les 4 formules suivantes :

1°. $\text{fin.}\, m + \text{fin.}\, n = 2 \cdot \text{fin.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{co-fin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

2°. $\text{fin.}\, m - \text{fin.}\, n = 2 \cdot \text{fin.}\left(\frac{m-n}{2}\right) \cdot \text{co-fin.}\left(\frac{m+n}{2}\right)$.

3°. $\text{cof.}\, n + \text{cof.}\, m = 2 \cdot \text{cof.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{co-fin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

4°. $\text{cof.}\, n - \text{cof.}\, m = 2 \cdot \text{fin.}\left(\frac{m+n}{2}\right) \cdot \text{fin.}\left(\frac{m-n}{2}\right)$.

REMARQUE. Rien n'empêche de confidérer m & n chacune comme un feul arc, & non comme la fomme ou la différence de deux arcs. Si l'on fait $n = 0$, les deux dernieres formules donneront, à caufe de co-fin. $0 = 1$, $1 + \text{co-fin.}\, m = 2 \cdot (\text{co-fin.})^2 \frac{1}{2} m$, & $1 - \text{co-fin.}\, m = 2 \cdot (\text{fin})^2 \frac{1}{2} m$; donc $\frac{1 - \text{co-fin.}\, m}{1 + \text{co-fin.}\, m} = \frac{(\text{fin.})^2 \frac{1}{2} m}{(\text{co-fin.})^2 \frac{1}{2} m} = (\text{tang.})^2 \frac{1}{2} m$, & $\frac{1 + \text{co-fin.}\, m}{1 - \text{co-fin.}\, m} = (\text{co-tang.})^2 \frac{1}{2} m$.

171. PROBLÊME. *Trouver les facteurs de la quantité* $a^2 + b^2$. Suppofant $a^2 + b^2 = 0$, l'on aura $a^2 = -b^2$, $a = \pm \sqrt{(-b^2)} = \pm \sqrt{(-1 \times b^2)} = \pm b\sqrt{(-1)}$; donc $a + b\sqrt{(-1)}$, & $a - b\sqrt{(-1)}$ font les facteurs cherchés. En effet en les multipliant l'un par l'autre l'on retrouvera la quantité propofée.

172. Nous avons déja dit que $(\text{fin.}\, a)^2 + (\text{co-fin.}\, a)^2 = r^2 = 1$; or par le Problême précédent, en fuppofant fin. $a = a$, & co-fin. $a = b$, l'on aura $[\textit{co-fin.} + \textit{fin.} \sqrt{(-1)}]\, [\textit{co-fin.} - \textit{fin.} \sqrt{(-1)}] = r^2$ *, & $[\text{co-fin.}\, a + \text{fin.}\, a \sqrt{(-1)}]$

* Co-fin. & fin. défignent le co-finus & le finus d'un même

$\times$ [co-ſin. a — ſin. $a \sqrt{(-1)}$] = [co-ſin. b + ſin. $b \sqrt{(-1)}$] $\cdot$ [co-ſin. b — ſin. $b \sqrt{(-1)}$] = r^2. Si l'on multiplie co-ſin. a + ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}$ par co-ſin. b + ſin. $b \cdot \sqrt{(-1)}$, le produit ſera co-ſin. $a \cdot$ co-ſin. b — ſin. $a \cdot$ ſin. b + (co-ſin. $a \cdot$ ſin. b + ſin. $a \cdot$ co-ſin. b) $\times \sqrt{(-1)}$; mais en faiſant $r = 1$, co-ſin. $a \times$ co-ſin. b — ſin. $a \cdot$ ſin. b = co-ſin. $(a+b)$, & co-ſin. $a \cdot$ ſin. b + ſin. $a \cdot$ co-ſin. b = ſin. $(a+b)$; donc le produit que nous venons de trouver eſt = co-ſin. $(a+b)$ + ſin. $(a+b) \times \sqrt{(-1)}$. De même [co-ſin. a — ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}$] $\cdot$ [co-ſin. b — ſin. $b \times \sqrt{(-1)}$] = co-ſin. $(a+b) - \sqrt{(-1)}$. ſin. $(a+b)$. On trouve par un calcul ſemblable [co-ſin. $a \pm$ ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}$] $\times$ [co-ſin. $b \pm$ ſin. $b \cdot \sqrt{(-1)}$] $\times$ [co-ſin. $x \pm$ ſin. $x \sqrt{(-1)}$] = co-ſin. $(a+b+x)$ $\pm \sqrt{(-1)}$. ſin. $(a+b+x)$.

173. COROLLAIRE I. Donc ſuppoſant $b = a$ on aura [co-ſin. $a \pm$ ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}]^2$ = [co-ſin. $2a$ $\pm$ ſin. $2a \cdot \sqrt{(-1)}$], & en ſuppoſant $x = b = a$, on aura [co-ſin. $a \pm$ ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}]^3$ = co-ſin. $3a$ $\pm$ ſin. $3a \cdot \sqrt{(-1)}$: en général [co-ſin. $a \pm$ ſin. $a \times \sqrt{(-1)}]^n$ = co-ſin. $na \pm$ ſin. $na \cdot \sqrt{(-1)}$.

174. COROLLAIRE II. De la derniere équation on tire, en prenant + pour le ſigne du radical & tranſpoſant, ſin. $na \cdot \sqrt{(-1)}$ = — co-ſin. na + [co-ſin. a + ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}]^n$, & prenant le ſigne du radical en —, on a ſin. $na \cdot \sqrt{(-1)}$ = co-ſin. na — [co-ſin. a — ſin. $a \cdot \sqrt{(-1)}]^n$. Ajoutant ces deux équations & diviſant par $2 \cdot \sqrt{(-1)}$, on trouve l'équation ſin. na =

$$\frac{[\text{co-ſin. } a + \text{ſin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n - [\text{co-ſin. } a - \text{ſin. } a \cdot \sqrt{(-1)}]^n}{2 \cdot \sqrt{(-1)}}.$$

arc ou d'un même angle a, ſans qu'il ſoit néceſſaire de le ſpécifier.

On trouve aussi en retranchant la seconde équation de la premiere, transposant & divisant par 2, co-sin. $na =$

$$\frac{[\text{co-sin}.\, a + \text{sin}.\, a \cdot \sqrt{(-1)}]^n + [\text{co-sin}.\, a - \text{sin}.\, a \cdot \sqrt{(-1)}]^n}{2}.$$

175. COROLLAIRE III. Elevant les deux Binomes à la puissance n par la formule de *Newton*, on trouve les deux formules suivantes sans imaginaires.

I. $\text{sin}.\, na = \frac{n}{1}(\text{co-sin}.\, a)^{n-1}.\ \text{sin}.\, a - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\text{co-sin}.\, a)^{n-3}(\text{sin}.\, a)^3 + \frac{n\cdot(n-1)\ (n-2)\ (n-3)\ (n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}(\text{co-sin}.\, a)^{n-5} \times (\text{sin}.\, a)^5 -$ &c.

II. $\text{co-sin}.\, na = (\text{co-sin}.\, a)^n - \frac{n\ (n-1)}{1\cdot 2}(\text{co-sin}.\, a)^{n-2} \times (\text{sin}.\, a)^2 + \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}(\text{co-sin}.\, a)^{n-4} \times (\text{sin}.\, a)^4 -$ &c.

REMARQUE I. La premiere formule est composée des termes de rang pair, c'est-à-dire, du second, quatriéme, sixiéme, &c. du Binome $[\text{co-sin}\ a + \text{sin}.\, a]^n$, & la seconde des termes de rang impair du même Binome. Dans les deux formules le premier terme est positif, les autres étant alternativement négatifs & positifs.

176. REMARQUE II. Nous avons supposé $r = 1$; mais si l'on vouloit exprimer le rayon, il faudroit diviser les deux formules précédentes

par r^{n-1}. Voici une autre maniere de trouver ces formules en exprimant le rayon. Les formules

$$\text{co-sin.}\,(a+b) = \frac{\text{co-sin.}\,a \cdot \text{co-sin.}\,b - \text{sin.}\,a \cdot \text{sin.}\,b}{r},$$

$$\text{sin.}\,(a+b) = \frac{\text{sin.}\,a \cdot \text{co-sin.}\,b + \text{sin.}\,b \cdot \text{co-sin.}\,a}{r}$$ peuvent s'exprimer ainsi :

$\text{co-sin.}\,(a+b) = [(\text{co-sin.}\,a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a) \times (\text{co-sin.}\,b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b) + (\text{co-sin.}\,a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a)\,(\text{co-sin.}\,b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b)] :^{*} 2r;$

$\text{sin.}\,(a+b) = [(\text{co-sin.}\,a + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a) \times (\text{co-sin.}\,b + \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b) - (\text{co-sin.}\,a - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,a)\,(\text{co-sin.}\,b - \sqrt{-1} \cdot \text{sin.}\,b)] : 2 \cdot r \cdot \sqrt{(-1)}.$

Multipliant la derniere équation par $\sqrt{(-1)}$ pour l'ajouter à la premiere & l'en retrancher ensuite, on trouvera les équations suivantes :

(M) $\text{co-sin.}\,(a+b) + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,(a+b) = \dfrac{[\text{co-sin.}\,a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,a] \cdot [\text{co-sin.}\,b + \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,b]}{r},$

(P) $\text{co-sin.}\,(a+b) - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,(a+b) = \dfrac{[\text{co-sin.}\,a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,a] \cdot [\text{co-sin.}\,b - \sqrt{(-1)} \cdot \text{sin.}\,b]}{r}.$

S'il s'agit du sinus ou du co-sinus de $(a-b)$, il

* Les deux points indiquent la division ; c'est-à-dire, que la quantité qui précéde les deux points est le dividende, & que celle qui suit est le diviseur ; ou, ce qui revient au même, la quantité qui précéde les deux points est le numérateur d'une fraction, dont la quantité qui suit les deux points est le dénominateur.

suffira de changer le signe de fin. b, parce que b étant un arc quelconque, — fin. b eſt $=$ fin. $-b$, & co-fin. $(-b) =$ co-fin. b. Si on ſuppoſe $a=b$, les équations précédentes ſe changent en celles-ci : co-fin. $2a + \sqrt{(-1)} \cdot$ fin. $2a = \frac{[\text{co-fin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } a]^2}{r}$, co-fin. $2a - \sqrt{(-1)} \times$ fin. $2a = \frac{[\text{co-fin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } a]^2}{r}$. Ajoutant ces deux dernieres équations, retranchant enſuite la ſeconde de la premiere, & diviſant par 2 on a les deux équations ſuivantes : co-fin. $2a = \frac{[\text{co-fin. } a + \sqrt{(-1)} \text{ fin. } a \cdot]^2 + [\text{co-fin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } a]^2}{2 \cdot r}$,

$\sqrt{(-1)} \cdot$ fin. $2a = \frac{[\text{co-fin. } a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } a]^2 - [\text{co-fin. } a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } a \cdot]^2}{2 \cdot r}$.

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on en prend les racines quarrées, on trouvera les deux équations ſuivantes : co-fin. $a = \frac{[\text{co-fin. } 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } 2a]^{\frac{1}{2}} + [\text{co-fin. } 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{-1}{2}}}$,

$\sqrt{(-1)} \cdot$ fin. $a = \frac{[\text{co-fin. } 2a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } 2a \cdot]^{\frac{1}{2}} - [\text{co-fin. } 2a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } 2a]^{\frac{1}{2}}}{2 \cdot r^{\frac{-1}{2}}}$.

Ajoutant un troiſiéme arc d aux arcs a & b, il eſt viſible par les équations M & P, que co-fin. $(a+b+d) + \sqrt{(-1)}[\text{fin. } (a+b+d)] = \frac{[\text{co-fin. } (a+b) + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } (a+b)] \cdot [\text{co-fin. } d + \sqrt{(-1)} \cdot \text{fin. } d]}{r}$,

$$\text{co-sin.}(a+b+d)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}(a+b+d)=\frac{[\text{co-sin.}(a+b)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}(a+b)]\cdot[\text{co-sin.}\,d-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin.}\,d]}{r}.$$

Substituant les valeurs de co-sin. $(a+b)+\sqrt{(-1)}\cdot$ sin. $(a+b)$, & de co-sin. $(a+b)-\sqrt{(-1)}\cdot$ sin. $(a+b)$ que donnent les équations M & P, on aura $[(\text{co-sin. } a+\sqrt{-1}\cdot\text{sin. } a)\times(\text{co-sin. } b+\sqrt{-1}\cdot\text{sin. } b)\,(\text{co-sin. } d+\sqrt{-1}\cdot\text{sin. } d)] : r^2 = \text{co-sin. }(a+b+d)+\sqrt{-1}\cdot\text{sin. }(a+b+d)$, & $[(\text{co-sin. } a-\sqrt{-1}\cdot\text{sin. } a\cdot)\,(\text{co-sin. } b-\sqrt{-1}\text{ sin. } b\cdot)\times(\text{co-sin. } d-\sqrt{-1}\cdot\text{sin. } d)] : r^2 = \text{co-sin. }(a+b+d)-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. }(a+b+d)$. Supposant $a=b=d$, ajoutant la derniere équation à la premiere, l'en retranchant ensuite, transposant & divisant par 2', l'on aura les deux équations suivantes :

$$\text{co-sin. } 3a=\frac{[\text{co-sin. } a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a\cdot]^3+[\text{co-sin. } a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a\cdot]^3}{2\cdot r^2},$$

$$\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } 3a=\frac{[\text{co-sin. } a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a]^3-[\text{co-sin. } a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a]^3}{2\cdot r^2}.$$

Si avant d'ajouter & de retrancher ces équations on prend la racine cubique des deux membres, nous aurons

$$\text{co-sin. } a=\frac{[\text{co-sin. } 3a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } 3a]^{\frac{1}{3}}+[\text{co-sin. } 3a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } 3a]^{\frac{1}{3}}}{2\cdot r^{\frac{-2}{3}}},$$

$$\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a=\frac{[\text{co-sin. } 3a+\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } 3a]^{\frac{1}{3}}-[\text{co-sin. } 3a-\sqrt{(-1)}\cdot\text{sin. } a]^{\frac{1}{3}}}{2\cdot r^{\frac{-2}{3}}}.$$

En général l'analogie fait assez voir qu'on aura,

ayant attention de diviſer la formule du ſinus par $\sqrt{(-1)}$, les formules ſuivantes : co-ſin. $na =$

$$\frac{[\text{co-ſin.}\, a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin.}\, a]^n + [\text{co-ſin.}\, a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin.}\, a]^n}{2 \cdot r^{n-1}},$$

ſin. $na =$

$$\frac{[\text{co-ſin.}\, a + \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin.}\, a]^n - [\text{co-ſin.}\, a - \sqrt{(-1)} \cdot \text{ſin.}\, a]^n}{2 \cdot r^{n-1} \sqrt{(-1)}}.$$

De ces formules on déduira aiſément par le Binome de *Newton*, celles dont nous avons parlé ci-deſſus, mais elles ſe trouveront diviſées par r^{n-1}; de ſorte qu'en ſuppoſant co-ſin. $a = p$, ſin. $a = b$, l'on aura les formules ſuivantes :

$$\text{ſin.}\, na = \left[\frac{n}{1} p^{n-1} b - \frac{n(n-1)\,(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p^{n-3} b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-5} b^5 - \&c.\right] : r^{n-1},$$

& co-ſin. $na = \left[p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} p^{n-4} b^4 - \&c.\right] : r^{n-1}.$

Si l'on ſuppoſe l'arc a infiniment petit, ſon ſinus ſe confondra avec cet arc, & ſon co-ſinus ſera $= r$, & pour que l'arc $n \cdot a$ ſoit d'une grandeur finie, il faudra ſuppoſer n infiniment grand, & alors les produits $n \cdot (n-1)$, $n(n-1)\,(n-2)$, &c. ſe réduiront aux puiſſances ſeconde, troiſiéme, &c. de n ſelon le nombre des facteurs de ces produits : car dans cette ſuppoſition $n - 1 = n$, $n - 2 = n$, &c. Faiſant donc l'arc fini $n \cdot a = d$, on aura $\frac{d}{n} = a = \text{ſin.}\, a$, $\frac{d^2}{n^2} = (\text{ſin.})^2\, a = b^2$ (en

ſuppoſant ſin. $a = b$), $\frac{d^3}{n^3} = b^3$, &c. & co-ſin. $a = 1 = p$, ainſi toutes les puiſſances de $p =$ co-ſin. a ſeront $=$ à l'unité. Subſtituant ces valeurs dans les formules ci-deſſus & ſuppoſant $r = 1$, l'on a les formules ſuivantes :

$$\text{ſin. } na = \text{ſin. } d = d - \frac{d^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{d^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \frac{d^7}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7} + \&c.$$

$$\text{co-ſin. } na = \text{co-ſin. } d = 1 - \frac{d^2}{1\cdot2} + \frac{d^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \frac{d^6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} + \&c.$$

177. COROLLAIRE. Puiſque r étant $= 1$, on a tang. $a = \frac{\text{ſin. } a}{\text{co-ſin. } a}$, il ſuit des deux formules précédentes qu'on aura tang. $na =$ tang. d

$$= \frac{d - \frac{d^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{d^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \&c.}{1 - \frac{d^2}{1\cdot2} + \frac{d^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \&c.}$$

178. REMARQUE. Parce que (133) ſin $= \frac{tang \times co\text{-}ſin}{r} = \frac{t \cdot co\text{-}ſin}{r}$, en faiſant $tang = t$, on aura co-ſin. $a = p = \frac{\text{ſin. } a \cdot r}{t} = \frac{br}{t}$. Subſtituant cette valeur de p dans les formules ci-deſſus (176), faiſant une équation fractionnaire telle que le premier membre ſoit $\frac{\text{ſin. } na}{\text{co-ſin. } na} =$ tang. na, & que le

second membre ait pour numérateur la valeur de sin. $n a$, & pour dénominateur celle de co-sin. $n a$, divisant de plus le numérateur & le dénominateur de cette derniere fraction par b^n & les multipliant par t^n, on aura tang. $n a =$

$$[n \cdot r^{n-1} t - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} r^{n-3} t^3 +$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} r^{n-5} t^5 - \&c.] : [r^n$$

$$- \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} r^{n-2} t^2 +$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} r^{n-4} t^4 - \&c.]$$

Cette expression est composée de la puissance n du Binome $r + t$, mais dont le numérateur est composé des termes de rang pair & multiplié par le rayon, le dénominateur contenant les termes de rang impair : les termes du numérateur & du dénominateur ayant alternativement les signes + & —.

REMARQUE I. En faisant $r = 1$, cette formule deviendroit plus simple.

REMARQUE II. De la formule co-sin. $n a = p^n$ — &c., trouvée ci-dessus (176), on déduit facilement la sécante de $n a$ qu'on peut exprimer ainsi :

$$\text{séc.}\, n a = \frac{r^{n+1}}{p^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} p^{n-2} b^2 + \&c.}$$, parce que

les triangles $c b d$, $c a n$ (fig. 108), en supposant l'arc $a b = n \cdot a$, donnent $c d : c b :: c a : c n$, ou co-sin. $n a : r :: r :$

$$\text{séc.}\, n a = \frac{r^2}{\text{co-sin.}\, n a}.$$

179. PROBLEME. *Trouver le sinus d'un arc multiple de l'arc* a *indépendamment de la formule ci-dessus* (176). Faisant $r = 1$, $b = a$, co-sin. $b =$ co-sin. $a = q$, si dans la formule sin. $(a + b) =$ sin. a co-sin. $b +$ sin. b co-sin. a, on

suppose

suppose b successivement $= a$, $2a$, $3a$, &c. on aura

Sin. $a = \sqrt{(1 - q^2)}$ *.
Sin. $2a = 2q\sqrt{(1 - q^2)}$
Sin. $3a = (4q^2 - 1)\sqrt{(1 - q^2)}$
Sin. $4a = (8q^3 - 4q)\sqrt{(1 - q^2)}$
Sin. $5a = (16q^4 - 12q^2 + 1)\sqrt{(1 - q^2)}$
Sin. $6a = (32q^5 - 32q^3 + 6q)\sqrt{(1 - q^2)}$
Sin. $7a = (64q^6 - 80q^4 + 24q^2 - 1)\sqrt{(1 - q^2)}$.

En général sin. $na = \left(2^{n-1}q^{n-1} - (n-2).2^{n-3}q^{n-3} + \frac{(n-3).(n-4)}{1.2}2^{n-5}q^{n-5} - \&c.\right)\sqrt{(1 - q^2)}$.

En supposant sin. $a = p$, on trouvera

Sin. $a = p$
Sin. $2a = 2p\sqrt{(1 - p^2)}$.
Sin. $3a = 3p - 4p^3$
Sin. $4a = (4p - 8p^3)\sqrt{(1 - p^2)}$
Sin. $5a = 5p - 20p^3 + 16p^5$
Sin. $6a = (6p - 32p^3 + 32p^5)\sqrt{(1 - p^2)}$.
Sin. $7a = 7p - 56p^3 + 112p^5 - 64p^7$
Sin. $8a =$ &c.

Pour trouver chacune des tables précédentes, il n'y a qu'à supposer [illegible]ernier sinus trouvé $=$ sin. b, tandis que le sinus & le co-sinus de a seront toujours désignés par p & q, faisant attention que sinus de $a = \sqrt{(1 - q^2)}$, & co-sin. $a = \sqrt{(1 - p^2)}$, & chercher le sinus de $a + b$ par la formule sin. $(a + b) =$ sin. $a \cdot$ co-sin. $b +$ sin. $b \cdot$ co-sin. a. On suppose $r = 1$.

* Car le quarré 1 du rayon étant égal au quarré du sinus plus le quarré du co-sinus q, on a le quarré du sinus $= 1 - q^2$, & sinus $= \sqrt{(1 - q^2)}$.

180. PROBLEME. *Trouver les co-finus des arcs multipliés indépendamment de la formule ci-dessus* (176). Si dans la formule co-fin. $(a+b)=$ co-fin. $a\cdot$ co-fin. $b-$ fin. $a\cdot$ fin. b, on fait successivement $b=a$, $2a$, $3a$ &c. on aura

$$\text{Co-fin. } a = q$$
$$\text{Co-fin. } 2a = 2q^2 - 1$$
$$\text{Co-fin. } 3a = 4q^3 - 3q$$
$$\text{Co-fin. } 4a = 8q^4 - 8q^2 + 1$$
$$\text{Co-fin. } 5a = 16q^5 - 20q^3 + 5q.$$

En général, en exprimant le rayon, on a r^{n-1} co-fin. $na =$

$$2^{n-1}q^n - \frac{n}{1}r^2.2^{n-3}.q^{n-2} + \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2}r^4\cdot 2^{n-5}\cdot q^{n-4} - \&c.$$

On peut aussi exprimer les co-finus des arcs multipliés par la table suivante.

$$\text{Co-fin. } a = \sqrt{(1-p^2)}$$
$$\text{Co-fin. } 2a = -2p^2 + 1$$
$$\text{Co-fin. } 3a = (-4p^2+1)\sqrt{(1-p^2)}$$
$$\text{Co-fin. } 4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$$
$$\text{Co-fin. } 5a = (16p^4 - 12p^2 + 1)\sqrt{(1-p^2)}$$
$$\text{Co-fin. } 6a = -32p^6 + 48p^4 - 18p^2 + 1$$
$$\text{Co-fin. } 7a = \&c.$$

Pour que les Commençans puissent mieux concevoir la formation des tables des Problêmes précédens, nous allons démontrer quelques-unes des équations des deux premieres tables. La premiere fin. $a = \sqrt{(1-q^2)}$ est évidente (note du n° 179). La seconde se tire facilement de la formule fin. $(a+b)=$ fin. $a\cdot$ co-fin. $b+$ fin. $b\cdot$ co-fin. $a = 2pq$ (en supposant $a=b$) $=2q\sqrt{(1-q^2)}$. La troisiéme se tire de la même formule en faisant $b=2a$; car alors le second membre de cette formule devient fin. a co-fin. $2a$ + fin. $2a\cdot$ co-fin. $a = p\cdot$ co-fin. $2a$. $+2p\cdot q^2$ Or co-fin. $2a = \sqrt{[1-(\text{fin. } 2a)^2]} = \sqrt{(1-4p^2q^2)} = \sqrt{(1-4p^2+4p^4)} = 1-2p^2$, parce que $q^2 = 1-p^2$. Substituant maintenant la valeur de q^2 dans $2pq^2$, on aura

sin. $3a = 3p - 4p^3$, troisiéme équation de la seconde table. On peut de celle-ci tirer sa correspondante dans la premiere table, en substituant pour p sa valeur $\sqrt{(1 - q^2)}$ & réduisant. On peut voir par-là comment il faut s'y prendre pour trouver les autres équations de ces mêmes tables, aussi bien que les équations des tables du dernier problême.

181. PROBLÊME. *Exprimer les puissances des sinus & co-sinus d'un arc* a *par les sinus & co-sinus de cet arc ou de ses multiples*. Il est visible que les termes de rang impair de la seconde table de l'avant-dernier Problême donnent des puissances impaires de p, & les termes de rang pair de la seconde table du dernier Problême donnent des puissances paires de p. Maintenant on aura sin. $a = p$; & de l'équation $-2p^2 + 1$ = co-sin. $2a$ *, on tirera $2p^2 = 1$ — co-sin. $2a$. Passant à la seconde table de l'avant dernier Problême, de l'équation sin. $3a = 3p - 4p^3$, on tire $4p^3 = 3p$ — sin. $3a$. Revenant à la seconde table du dernier Problême, l'équation co-sin. $4a = 8p^4 - 8p^2 + 1$ donne $8p^4$ = co-sin. $4a - 4$ co sin. $2a + 3$, (en substituant la valeur de $8p^2$ prise de la seconde équation de la seconde table du même Problême, & réduisant) : en suivant ce procédé on formera la table suivante.

Sin. a = sin. $a = p$

$2p^2 = 1$ — co-sin. $2a$

$4p^3 = 3p$ — sin. $3a$

$8p^4 = 3 - 4$ co-sin. $2a$ + co-sin. $4a$

$16p^5 = 10p - 5$ sin. $3a$ + sin. $5a$

$32p^6 = 10 - 15$ co-sin. $2a$ + 6 co-sin. $4a$ — co-sin. $6a$

$64p^7 = 35$ sin. a — 21 sin. $3a$ + 7 sin. $5a$ — sin. $7a$

$128p^8$ = &c.

Il est visible que les puissances impaires de p = sin. a sont exprimées en sinus d'arcs multipliés, tandis que les puissances paires de p sont exprimées en co-sinus d'arcs multiples. De plus la loi des coefficiens numeriques est la même que celle du binome de Newton, excepté que dans les puissances paires

* Voyez la seconde équation de la seconde table du dernier Problême.

le nombre abstrait qui forme le premier terme du second membre de l'équation, n'est que la moitié de celui de même rang que donne le Binome. *Par exemple*, dans la quatriéme équation, en commençant par le dernier terme, l'on a co-sin. $4a - 4$ co-sin. $2a + 3 = 8p^4$, on voit que 3 est la moitié de 6, coefficient numérique du troisiéme terme du binome $a + b$ élevé à la quatriéme puissance. Cela posé il est visible qu'on a besoin de deux formules, selon que l'exposant de p est pair ou impair; ainsi nous aurons $2^{n-1} p^n =$

$$2^{n-1}(\text{sin.}\ a)^n = \pm \text{sin.}\ n a \mp n \text{sin.}\ (n-2)\cdot a \pm \frac{n\cdot(n-1)}{2} \times$$

$$\text{sin.}\ (n-4)\cdot a \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot \text{sin.}\ (n-6)\cdot a$$

$$\ldots\ldots \pm \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2\cdot \&c.}{2\cdot 2\cdot 3\cdot \&c.}\cdot \text{sin.}\ a,$$ n étant un nombre impair. On a renversé l'ordre des termes de la table par rapport au second membre de l'équation. Mais si n étoit un nombre pair, on auroit $2^{n-1} p^n =$

$$\pm \text{co-sin.}\ n a \mp n \text{ co-sin.}\ (n-2)\cdot a \pm \frac{n\cdot(n-1)}{2} \times$$

$$\text{co sin.}\ (n-4)\cdot a \mp \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot \text{co-sin.}\ (n-6)\cdot a$$

$$\ldots \mp \frac{1}{2}\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ \&c.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \&c.}\right) \text{co-sin.}\ 0\cdot a^*.$$

Dans la premiere formule dans laquelle n est un nombre impair, les signes supérieurs auront lieu si $n = 4m + 1$, mais il faudra se servir de signes inférieurs si $n = 4m - 1$, m étant un nombre entier pair ou impair**. Dans la seconde formule dans laquelle n est un nombre pair, on se servira des signes supérieurs si $n = 4m$, m étant un nombre pair ou impair; mais l'on fera usage des signes inférieurs si $n = 2m$, m étant un nombre impair.

* Dans la supposition de $r = 1$, co-sin. $0\cdot a =$ co-sin. $0 = 1$.

** En supposant $m = 1$, $4m + 1$ sera $= 5$; or en faisant $n = 5$, on voit par la table que les signes supérieurs doivent avoir lieu; qu'on doit se servir des inférieurs en supposant $m = 2$, & $n = 4m - 1 = 7$.

182. Pour avoir une formule semblable par rapport aux puissances des co-sinus d'un arc, on fera des deux premieres tables des problêmes ci-dessus (179) le même usage que nous venons de faire des deux dernieres, & l'on formera la table suivante.

$$q = \text{co-sin.}\ a$$
$$2\ q^2 = 1 + \text{co-sin.}\ 2a$$
$$4\ q^3 = 3\ \text{co-sin.}\ a + \text{co-sin.}\ 3a$$
$$8\ q^4 = 3 + 4\ \text{co-sin.}\ 2a + \text{co-sin.}\ 4a$$
$$16\ q^5 = 10\ \text{co-sin.}\ a + 5\ \text{co-sin.}\ 3a + \text{co-sin.}\ 5a$$
$$32\ q^6 = 10 + 15\ \text{co-sin.}\ 2a + 6\ \text{co-sin.}\ 4a + \text{co-sin.}\ 6a$$
$$64\ q^7 = 35\ \text{co-sin.}\ a + \&c.$$

Renversant l'ordre des termes qui sont à la droite du signe d'égalité, on formera la formule suivante, n étant un nombre pair ou impair, $2^{n-1}(\text{co-sin.}\ a)^n = \text{co-sin.}\ n\,a + n\ \text{co-sin.}\ (n-2)\cdot a + \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\ \text{co-sin.}\ (n-4)\cdot a + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \times \text{co-sin.}(n-6)\cdot a \cdots + \frac{1}{2}\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\ \&c.}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ \&c.}\right) \times \text{co-sin.}\ 0\cdot a$, ou $+\left(\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\ \&c.}{1\cdot 2\ \&c.}\right)\ \text{co-sin.}\ a$, selon que n est pair ou impair.

REMARQUE. Il seroit facile d'avoir l'expression des tangentes & des co-tangentes de l'arc multiple $n\cdot a$, en se souvenant que tang. $= \frac{\text{sin}}{\text{co-sin}}$, & co-tang. $= \frac{\text{co-sin}}{\text{sin}}$; car on concluroit facilement que tang. $n\,a = \frac{\text{sin.}\ n\,a}{\text{co-sin.}\ n\,a} = \&c.$ De même co-tang. $n\,a = \frac{\text{co-sin.}\ n\,a}{\text{sin.}\ n\,a} = \&c.$, où il faudroit avoir égard à la nature du nombre n. Pour avoir la formule des co-sécantes, on feroit attention que les triangles semblables $c\,h\,m$,

$c\,i\,b$ (fig. 108) donnent $c\,i = b\,d =$ fin : r :: r : co-féc $= \frac{r^2}{fin.} = \frac{1}{fin}$, en faifant $r = 1$; donc co-féc. $n\,a = \frac{1}{\text{fin.}\, n\,a} =$ &c. Et de même on auroit co-tang. $n\,a = \frac{1}{\text{tang.}\, n\,a}$

$$= \frac{1 - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} t^2 + \&c.}{n\,t - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} t^3 + \&c.}\ *.$$

183. PROBLEME. *Exprimer en puiffances des finus ou co-finus de l'arc fimple le finus ou le co-finus de l'arc multiple.* Si n eft pair, la feconde table du Problême ci-deffus (179) donne, en fuppofant n pair, fin. $n\,a = \left(\mp 2^{n-1} p^{n-1} \pm (n-2) \cdot 2^{n-3} p^{n-3} \mp \frac{(n-3) \cdot (n-4)}{1 \cdot 2} (2)^{n-5} p^{n-5} \ldots + n\,p\right) \sqrt{(1-p^2)}$. Le figne fupérieur a lieu lorfque $n = 2\,m$, m étant un nombre pair, mais on fe fervira du figne inférieur fi m eft impair. Si n eft un nombre impair, on aura

$$\text{fin.}\ n\,a = \mp 2^{n-1} p^n \pm n \cdot 2^{n-3} p^{n-2} \mp \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2} \times (2^{n-5} p^{n-4} \pm \&c.$$

Le figne fupérieur a lieu fi $n = 4\,m - 1$, & l'inférieur fi $n = 4\,m + 1$, m étant pair ou impair.

La premiere table du Problême ci-deffus (180) donne, en fuppofant n un nombre impair, $\pm$ co-fin. $n\,a = n\,q - \frac{n \cdot (n^2-1)}{2 \cdot 3} q^3 + \frac{n \cdot (n^2-1) \cdot (n^2-9)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} q^5 -$ &c. ** Mais

---

* C'eft le quotient de 1 divifé par la formule de la tangente (178) en faifant $r = 1$.

** Si, *par exemple*, $m = 1$, & $n = 3 = 4\,m - 1$, on aura $-$ co-fin. $3\,a = 3\,q - 4\,q^3$, ou $+$ co-fin. $3\,a = 4\,q^3 - 3\,q$; les autres termes de la férie étant $= 0$, ce qui eft facile

si n est un nombre pair, l'on aura $\pm$ co-sin. $na = 1 - \frac{n^2}{1 \cdot 2} q^2$ $+ \frac{n^2 \cdot (n^2 - 4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} q^4 - \frac{n^2 \cdot (n^2 - 4) \cdot (n^2 - 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} q^6 +$ &c.

Le signe supérieur a lieu pour le premier membre de l'équation dans cette derniere formule du co-sinus, si $n = 4m$, m étant un nombre pair ou impair tel que 8, *par exemple*. On se servira du signe $-$ si $n = 2m$, m étant impair. Mais dans la premiere formule du co-sinus, on fera usage du signe $+$ si $n = 4m + 1$, & du signe $-$, si $n = 4m - 1$, m étant un nombre pair ou impair.

184. COROLLAIRE. Si l'on suppose sin. $a = x$, sin. $3a = b$, $n = 3$, l'on aura par la seconde formule du Problême, l'équation $4x^3 - 3x + b = 0$, équation qui est dans le cas irréductible, b étant plus petit que $1 = r$; & les trois racines de cette équation sont sin. $\frac{a}{3}$, sin. $\frac{a + m}{3}$, sin. $\frac{a + 2m}{3}$, m désignant la circonférence du cercle; car les sinus de a, $a + m$, $a + 2m$ sont égaux. Si b avoit le signe $-$; la troisiéme formule donneroit la même équation avec cette différence que b auroit le signe $-$, & les racines seroient dans ce cas $\frac{\text{co-sin. } a}{3}$, co-sin. $\frac{m + a}{3}$, co-sin. $\frac{2m + a}{3}$; car co-sin. a, co-sin. $(m + a)$, (co-sin. $(2m + a)$ sont des quantités égales, & de plus la somme de ces racines est $= 0$, ce qui n'est pas surprenant, parce que toutes n'ont pas le même signe. Si *par exemple* l'arc a est de 90°, les trois racines seront, en supposant $r = 1$; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, -1 dont la somme $= 0$.

De-là on peut tirer une méthode pour résoudre toute équation du troisiéme degré dans le cas irréductible. Soit l'équation $x^3 - dx \pm q = 0$ qu'on suppose dans le cas irréductible, la comparant avec notre équation $4x^3 - 3x \pm b = 0$, ou (divisant par 4 & exprimant le rayon) $x^3 - \frac{3r^2x}{4} \pm \frac{r^2b}{4} = 0$, nous aurons $\frac{3r^2}{4} = d$; $\frac{br^2}{4} = q$. De la premiere des deux

à comprendre en faisant attention que $n^2 - 9$ est alors $= 0$, ce qui rend le troisiéme terme $= 0$. D'ailleurs l'exposant de q ne peut pas être plus grand que n.

dernieres équations on tire $r^2 = \frac{4d}{3}$, ou $r = \sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$, de la seconde en substituant la valeur de r^2, ou de 1^2 si l'on ne ne veut pas introduire r, on tire $b = \frac{3q}{d}$. Faisant r (rayon de l'équation) ou 1 (si r n'est pas exprimé) : b ou $\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}$: $\frac{3q}{d}$ :: R (rayon des tables) : $\frac{3Rq}{d\sqrt{\left(\frac{4d}{3}\right)}}$, ce quatriéme terme étant cherché dans les tables donnera le sinus d'un arc a si b est positif, ou son co-sinus si b est négatif, & les racines seront telles que nous venons de le voir, c'est-à-dire, $x = \text{sin.}\ \frac{a}{3}$, $x = \text{sin.}\ \frac{m + a}{3}$ &c., ou $x = \text{co-sin.}\ \frac{a}{3}$, $x =$ &c.

185. PROBLEME. *Couper la circonférence d'un cercle en un nombre* 2 n *de parties égales par des lignes tirées d'un point* m *situé sur le diametre du cercle, mais hors du centre.* Avant de résoudre ce Problême, qui renferme le célébre Théorême de M. *Cotes*, nous allons établir deux Lemmes.

LEMME I. *Soit l'arc* a b = a (fig. 129), *son co-sinus* s p $= \frac{x}{2}$, s m = z, *je dis que* b m $= z^2 - xz + r^2$, *en faisant* s a = s g = r. Car $(bp)^2 = (sb)^2 - (sp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$, & $(bm)^2 = (bp)^2 + (pm)^2$, à cause du triangle rectangle bpm; or $pm = \frac{x}{2} - z$ ou $pm = z - \frac{x}{2}$, selon que le point m tombe de différens côtés de bp par rapport au centre s : mais dans l'un & l'autre cas $(pm)^2 = z^2 - zx + \frac{x^2}{4}$. Cette quantité étant ajoutée à $(bp)^2 = r^2 - \frac{x^2}{4}$ donne $(bm)^2 = z^2 - zx + r^2$.

LEMME II. *Si dans la formule ci-dessus* (180) $r^{n-1} x$ co-sin. $na = z^{n-1} q^n - \frac{n}{1} r^2 z^{n-3} q^{n-2} + \frac{n \cdot (n-3)}{1 \cdot 2}$

$\times r^4 2^{n-5} \cdot q^{n-4}$ — &c. *on multiplie les deux membres par* 2, *qu'on fasse* $x = 2q$, *ou* $q = \frac{x}{2}$ *&* co-sin. $n\,a = c$, *il est évident qu'on aura* $x^n - n r^2 x^{n-2} + \frac{n\cdot(n-3)}{1\cdot 2} r^4 \times x^{n-4} - \frac{n\cdot(n-4)\cdot(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3} r^6 x^{n-6}$ *&c.* $= 2c \cdot r^{n-1}$.

Si on suppose successivement $n = 0, 1, 2, 3$, &c. on aura $2\cdot$co-sin. $(0\cdot a) = 2r$. On aura encore

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot\text{co-sin. } 1\cdot a = x \\ 2\cdot\text{co-sin. } 2\cdot a = x^2 - 2r^2 \\ 2\cdot\text{co-sin. } 3\cdot a = x^3 - 3r^2 x \,{}^{*} \\ \quad\&c. \end{array}\right\} = 2c\cdot r^{n-1},$$

x étant le double co-sinus de l'arc simple. Si dans les équations que nous venons de trouver, on fait $x = z + \frac{r^2}{z}$, on aura pour le double co-sinus de $0\cdot a$, $1\cdot a$, $2\cdot a$, &c. ces autres valeurs $2r$, $z + \frac{r^2}{z}$, $z^2 + \frac{r^4}{z^2}$, $z^3 + \frac{r^6}{z^3}$, &c. En général $z^n + \frac{r^{2n}}{z^n} = 2c\cdot r^{n-1}$, ou faisant disparoître la fraction & transposant, $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = 0$. Mais cette équation a pour racines les doubles co-sinus de a, $a + \frac{2m}{n}$, $a + \frac{4m}{n}$, $a + \frac{6m}{n}$, &c. m désignant la demi-circonférence du cercle, & a l'arc dont le double co-sinus $= 2c$. Mais le double co-sinus de a est $= x$ (par supposition), & désignant par x', x'', x''', &c. les doubles co-sinus de $a + \frac{2m}{n}$, $a + \frac{4m}{n}$, &c. on aura $z + \frac{r^2}{z} - x$, $z + \frac{r^2}{z} - x'$ &c. pour les facteurs de l'équation trouvée; or ces facteurs doivent être chacun $= 0$, ce qui donne $z + \frac{r^2}{z} - x = 0$,

* L'équation du double co-sinus de $0\cdot a$, c'est-à-dire, $2\cdot$co-sin. $(0\cdot a) = 2r$ est évidente. Les autres peuvent se déduire de la formule, ou de la premiere table du n° (180), pourvu qu'on forme cette table en exprimant le rayon r.

d'où l'on tire $z^2 - zx + r^2 = 0$ &c. ; donc l'équation précédente est composée d'un nombre n de trinomes $z^2 - zx + r^2$, $z^2 - zx' + r^2$, $z^2 - zx'' + r^2$, &c.*. Venons maintenant à la solution du Problême.

Il suit de ce que nous venons de dire, que l'équation $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n} = 0$ est le produit de tous les quarrés $(bm)^2$, $(cm)^2$, &c.; donc si on suppose $c = -r$, hypothese qui renferme que la demi-circonférence est divisée en un nombre n de parties égales, & par conséquent la circonférence en un nombre $2n$ des mêmes parties, les x, x', x'', &c. donneront les doubles co-sinus des arcs a, $3a$, $5a$, &c.; puisque dans ce cas $\frac{m}{n} = a$. Donc les produits $z^2 - xz + r^2$, $z^2 - x'z + r^2$, &c. dénotent les quarrés des droites paires cm, mf, &c. Si l'on extrait la racine quarrée de $z^{2n} - 2cr^{n-1}z^n + r^{2n}$ en faisant $c = r$, on aura $z^n - r^n = mc \times mf$, &c. En effet, dans la supposition de $c = r$, supposition qui désigne que la circonférence entiere est divisée en un nombre n de parties égales, l'arc est $= 0$, & son co-sinus est évidemment égal au rayon, ou $= +r$, & l'on a la racine que nous venons de trouver : mais dans la supposition de $c = -r$, c'est-à-dire, dans la supposition de c négatif, on a $z^{2n} + 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, dont la racine est $z^n + r^n = mb \times md$; &c. c'est-à-dire, que cette racine dénote le produit des droites impaires mb, md, &c. ; donc $(z^n - r^n) \times (z^n + r^n) = z^{2n} - r^{2n} = mb \times mc \times md$, &c. ** équation qui renferme la solution du Problême, & le célebre Théorême de M. *Cotes*.

---

* Ainsi cette équation est résoluble en un nombre n de trinomes.

** Cette équation est évidemment résoluble en $2n$ facteurs ; puisque ses racines sont au nombre de $2n$; & parce que l'équation $z^{2n} \mp 2r^n z^n + r^{2n} = 0$, est composée d'un nombre n de facteurs trinomes, elle est résoluble en un nombre n de ces facteurs. De plus parce que les racines réelles d'une équation donnent chacune un facteur simple réel, les racines imaginaires se trouvant toujours en nombre pair dans une

186. REMARQUE. La circonférence étant divisée en un nombre $2n$ de parties égales, chacun des facteurs $z^n - r^n$, $z^n + r^n$, représente toutes les droites paires, ou toutes les droites impaires : car il ne peut représenter à la fois les unes & les autres, puisque chacun n'a qu'un nombre n de dimensions. Mais le facteur $z^n - r^n$, qui répond à la supposition de $c = + r$, doit évidemment représenter la droite qui répond à l'arc $o \cdot a = o$, ou $m a$, & comme il ne peut représenter deux droites de suite ; il ne peut représenter $m b$. Si on suppose $n = 5$, il est visible que le facteur $z^n + r^n$ doit représenter la droite $m g$ qui répond à $c = - r$. Donc il ne peut représenter $m a$; donc, &c.

Trigonométrie Sphérique.

187. Si un angle solide C (fig. 130) est formé par trois angles plans ACB, ACD, BCD (que nous appellerons *côtés* de l'angle solide) ; ces angles auront pour mesure les arcs AB, AD, BD décrits entre leurs côtés du point C comme centre ; & si nous supposons que ces arcs sont décrits avec le même rayon, le point C pourra être regardé comme le centre d'une sphere ; ces arcs seront des parties de trois grands cercles de la sphere : & formeront un triangle BAD qu'on nomme *triangle sphérique*. La trigonométrie *sphérique* s'occupe de la résolution de ces sortes de triangles comme la trigonométrie *plane*, ou *rectiligne* (c'est celle dont nous avons déja parlé sous le nom de trigonométrie) traite des triangles rectilignes, c'est-à-dire, des triangles dont tous les côtés sont des lignes droites. Pour mesurer un angle sphérique, tel que l'angle B ; *par exemple*, il suffit de trouver la mesure de l'angle formé par les deux plans ACB, DCB qui, en se joignant dans la ligne BC, forment cet angle ; mais, selon ce qu'on a dit ci-dessus (n°. 83), un tel angle est égal à celui que formeroient deux perpendiculaires menées à la ligne BC par un même point B, *par exemple*,

---

équation, & telles que leur produit deux à deux est un facteur rationel du second degré, il s'ensuit que toute équation rationelle est résoluble en facteurs réels, simples ou doubles, ou en partie simples & en partie doubles.

l'une dans le plan DCB, l'autre dans le plan ABC. Mais ces lignes étant perpendiculaires au rayon commun BC des arcs BA & BD seroient évidemment des tangentes de ces arcs ; donc en général un angle sphérique quelconque formé par deux arcs de grands cercles sur la surface d'une sphere est égal à celui que forment entr'elles les tangentes de ces arcs menées au point où ils se rencontrent.

188. *Un triangle sphérique* ABD n'est autre chose qu'une partie d'une surface sphérique terminée par trois arcs de grands cercles de cette sphere AB, AD, BD, qui sont les côtés de ce triangle, dont les angles A, B, D sont les mêmes que ceux que formeroient les tangentes de ces arcs, menées aux points A, B, D.

Les angles plans ACB, ACD, BCD, qui sont les côtés de l'angle solide C, ont pour mesure les arcs AB, AD, BD qui forment le triangle sphérique ABD. Et si l'on exprime les côtés & les angles d'un triangle sphérique par degrés, minutes, secondes, tierces, &c., ces nombres seront les mesures des côtés & des angles de l'angle solide ACBD.

189. On peut facilement concevoir la construction d'un angle solide de trois côtés, & d'un triangle sphérique de la maniere suivante. On prendra pour base un secteur de cercle ACD (fig. 131), & l'on menera par son centre une ligne CE perpendiculaire, ou inclinée au plan du secteur. On décrira ensuite du centre C & dans le plan ACE un arc AE qui terminera le secteur ACE, on décrira de même avec le rayon DC = AC l'arc ED qui terminera le secteur ECD. Le secteur ACD qu'on prend pour base étant supposé plus petit qu'un demi-cercle, son supplément à 360 degrés sera plus grand qu'un demi-cercle ; & l'angle qui sera opposé à ce supplément, sera le supplément de l'angle AED. Mais celui-ci vaut moins de deux angles droits, puisque, si l'on conçoit le plan du secteur ACE prolongé, les plans AED, ACE formeront deux angles de suite, qui ne vaudront que deux angles droits ; donc si un angle AED vaut moins de deux angles droits, le côté opposé vaudra moins de 180°, & le côté opposé au supplément de cet angle, c'est-à-dire, le côté opposé à un angle saillant ou extérieur & supplément à 360° de l'angle AED, vaut plus de 180°. Mais dans la trigonométrie sphérique on ne considere pas ces sortes d'angles, ni les côtés qui leur sont opposés ; ainsi dans la suite il ne sera question que des triangles

dont tous les angles & les côtés sont moindres que 180°. Au reste si un des angles du triangle est droit, le triangle sphérique est appellé *rectangle*, le côté opposé à l'angle droit prend le nom d'*hypothénuse*, l'on nomme *base* l'un des autres côtés, & le troisiéme s'appelle *la perpendiculaire*. Si aucun des angles n'est droit, le triangle sphérique se nomme *obliquangle*.

Dans la suite lorsqu'il sera question d'un triangle sphérique rectangle, nous désignerons sa base par B ou *b*, le côté perpendiculaire par P ou *p*, l'hypothénuse par H ou *h*, l'angle droit par R ou *r*, l'angle compris entre l'hypothénuse & la base, & opposé à la perpendiculaire par M ou *m*, & enfin l'angle opposé à la base, & formé par la rencontre de l'hypothénuse & du côté perpendiculaire, par N ou *n*.

190. Théoreme. *Dans un triangle sphérique rectangle* NRM (fig. 132), *si l'angle* M *est plus petit ou plus grand qu'un angle droit, le côté* P *qui lui est opposé sera plus petit ou plus grand qu'un quart de cercle; & si l'angle* M *est droit, le côté* P *sera un quart de cercle.* Je fais passer par la ligne CM dans laquelle le plan de l'hypothénuse coupe le plan de la base, un plan MCD perpendiculaire au plan de la base; cela posé, puisque le plan P est perdendiculaire au même plan B, DC commune intersection des plans P & MCD sera perpendiculaire à B (voyez le n° 82). Donc le point D sera éloigné du plan de la base de 90, en comptant cette distance sur un grand cercle de la sphere dont le point C est supposé le centre; & par conséquent DR & D*r* seront des quarts de cercle. Donc le côté NR sera plus petit qu'un quart de cercle, ou égal à un quart de cercle, ou plus grand qu'un quart de cercle, selon que M sera plus petit qu'un angle droit, qu'il sera un angle droit, ou plus grand qu'un angle droit. Car si M = 90°, MN tombera sur DM; puisque l'angle DMR est droit, le point D étant éloigné du plan B de 90 degrés. Si M < 90°, l'arc MN sera situé entre le plan DCM & la base; donc le point N sera éloigné de B de moins de 90°, mais il sera éloigné de B de plus de 90° si M > 90°: parce qu'alors MN sera situé au-delà du plan DCM, c'est-à-dire, sera situé entre ce plan & le prolongement de celui de la base.

Corollaire. En prenant P pour base, B devient le côté perpendiculaire; donc N sera aussi de même espece que le côté opposé, c'est-à-dire, que l'angle N sera aigu, droit ou obtus, selon que B sera < 90°, ou = 90°, ou > 90°; de sorte

qu'un angle situé sur l'hypothénuse est toujours de la même espece que le côté opposé, & réciproquement.

191. THÉOREME. *Dans un triangle sphérique rectangle si les côtés* B *&* P *sont tous les deux plus petits, ou tous les deux plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuse sera plus petite qu'un quart de cercle; si l'un de deux côtés est plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuse sera plus grande qu'un quart de cercle. Mais si l'un de deux côtés est un quart de cercle, l'hypothénuse sera aussi un quart de cercle.* Dans le plan RMr (fig. 133) sur lequel est située la base, & auquel le plan RAr est perpendiculaire, menons la ligne MC oblique au diametre Rr*, à laquelle le plan DAE (qui coupe en AC le plan rAR) doit être perpendiculaire; donc la ligne AC, commune section des plans ADE, RAr perpendiculaires au plan RMr, sera perpendiculaire sur ce dernier plan & sur la ligne rCR située sur RMr; les angles ACR, ACr seront droits, & les arcs AR & Ar seront des quarts de cercle. Les angles formés par la ligne MC & toutes celles qu'on peut mener par le point C dans le plan DAE, seront droits (82). Donc MCG sera droit, gCM, aussi-bien que NCM, sera $< 90°$; mais MCn sera $> 90°$. D'où il suit que dans un triangle rectangle sphérique NRM, dont les côtés B, P sont plus petits qu'un quart de cercle, l'hypothénuse NM est plus petite que le quart de cercle GM. De même dans le triangle MrN, dont les côtés Nr, Mr, c'est-à-dire, B & P sont plus grands qu'un quart de cercle, l'hypothénuse MN est plus petite qu'un quart de cercle. Mais dans le triangle sphérique MRn dans lequel nR ou P est plus grand qu'un quart de cercle, tandis que MR ou B est plus petit qu'un quart de cercle, l'hypothénuse Mn sera plus grande que le quart de cercle Mg. De même dans le triangle sphérique rMn, dans lequel n r ou P est plus petit qu'un quart de cercle, & rM ou B plus grand qu'un quart de cercle, l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle. Mais si P devient AR, alors l'hypothénuse mesurant l'angle droit ACM, devient un quart de cercle.

COROLLAIRE. De-là il suit réciproquement que l'hypothénuse d'un triangle sphérique étant aiguë, c'est-à-dire, moindre qu'un quart de cercle, les deux côtés P & B seront tous les

* Il faut concevoir que la ligne Rr, dont une partie est ponctuée, passe par le centre C de la sphère.

deux plus grands ou plus petits qu'un quart de cercle, si l'hypothénuse est obtuse ou plus grande qu'un quart de cercle, l'un des côtés sera plus grand & l'autre plus petit qu'un quart de cercle; mais si l'hypothénuse est un quart de cercle, l'un des côtés au moins sera un quart de cercle; car il est visible que B & P peuvent être à la fois des quarts de cercle.

192. REMARQUE. Si l'hypothénuse est moindre qu'un quart de cercle, le triangle sera ou NMR dont les côtés P & B sont moindres qu'un quart de cercle, & dont les angles M & N sont aigus, ou NM*r* auquel le premier triangle NMR est contigu. Si l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle, le triangle sera ou *n*MR ou *n*M[illegible] mais *n*M*r* a pour triangle contigu un triangle situé de l'autre côté du plan RA*r*, dont l'hypothénuse est le supplément de l'hypothénuse M*n*, & par conséquent plus petite qu'un quart de cercle, & dont la base est supplément de la base M*r* & = MR, & par conséquent aussi plus petite qu'un quart de cercle. Mais *r n* ou le côté perpendiculaire est aussi plus petit qu'un quart de cercle; donc tous les côtés de ce triangle seront plus petit chacun qu'un quart de cercle, & par conséquent les angles situés sur l'hypothénuse seront aigus *. Il y aura aussi sur la base CMR un triangle contigu au triangle *n*MR, dont l'hypothénuse (située au-dessous de la base) sera le supplément de *n*M, & dont le côté perpendiculaire (situé aussi au-dessous de la même base) sera supplément de *n*R. On voit donc qu'un triangle sphérique rectangle, dont l'un des côtés est plus grand qu'un quart de cercle, a un triangle contigu, dont les côtés sont moindres qu'un quart de cercle, dont la base & les angles sur l'hypothénuse sont aigus; or les côtés & l'hypothénuse de ce triangle que nous appellons *contigu*, sont toujours égaux aux côtés & à l'hypothénuse de l'autre où sont leurs supplémens.

193. PROBLEME. *Dans un triangle sphérique-rectangle, dont les côtés soient moindres qu'un quart de cercle, & dont par conséquent les angles sur l'hypothénuse soient aigus, étant don-*

* L'espece de l'hypothénuse détermine l'espece du triangle. Or l'hypothénuse est plus petite ou plus grande qu'un quart de cercle, ou elle est égale à un quart de cercle. Mais parce qu'on peut regarder l'angle droit comme le plus grand des angles aigus, ou comme le plus petit des angles obtus, on ne distingue que deux especes de triangles sphériques-rectangles, l'une, dont l'hypothénuse est plus grande qu'un quart de cercle, l'autre, dont l'hypothénuse est moindre qu'un quart de cercle.

nés, ou les deux angles aigus ou les deux côtés, ou un angle aigu & un côté, ou l'hypothénuse avec un angle aigu ou avec un côté, *résoudre ce triangle.* Ayant pris, au lieu du triangle sphérique, un angle solide de trois côtés NCMR (*fig.* 134), tel que RM soit perpendiculaire sur MC, & que les plans MNR, NRC soient perpendiculaires sur la base RCM; NR commune intersection de ces derniers plans sera perpendiculaire à la même base RCM, aussi-bien qu'aux lignes RC, RM situées sur cette base & passant par le point R. Mais la ligne MC située sur le plan RMC perpendiculaire au plan NMR & perpendiculaire à la commune intersection RM de ces plans, est évidemment perpendiculaire au plan NRM aussi bien qu'à la ligne MN. Donc les triangles NRC, RCM, NCM & NRM seront tous rectangles, & l'angle M de l'angle solide sera le même que l'angle M de l'angle plan NMR (83). Supposons maintenant qu'on développe ces triangles sur un plan (*fig.* 135), & qu'on emploie les mêmes lettres dont on s'est servi dans l'angle solide trilatere; il est visible que les triangles RCM, NCM rectangles en M donnent CM : MN :: r : tang. H*, & CM : MR :: r : tang. B. Donc CM : r :: MN : tang. H & CM : r :: MR : tang. B, & partant MN : MR :: tang. H : tang. B.

Le triangle NRM donne MN : MR :: r : co-sin. M. De cette analogie & de la précédente on peut en tirer cette autre.

I. r : co-sin. M :: tang. H : tang. B, ou r : co-sin. M :: co-tang. B : co-tang. H; parce que (134) les tangentes sont en raison inverse des co-tangentes.

Mais il est visible qu'on peut changer les dénominations M, N en mettant l'une à la place de l'autre, si l'on appelle B ce qu'on vient d'appeller P, & réciproquement; donc on aura r : co-sin. N :: co-tang. P : co-tang. H.

Mais si l'on prend NC (qui se trouve deux fois dans la figure) pour rayon, le triangle MCN donnera NC : r :: MN : sin. H, tandis que le triangle NCR donne NC : r :: NR : sin. P. Donc MN : NR :: sin. H : sin. P. D'un autre côté le triangle NRM fait voir que NM : NR :: r : sin. M; donc

II. r : sin. M :: sin. H : sin. P, & en changeant entr'elles les dénominations M & N, B & P, r : sin. N :: sin. H : sin. B.

* H désigne l'angle MCN ou l'arc qui mesure cet angle, ou l'hypothénuse du triangle sphérique correspondant, B désigne la base du même triangle sphérique, ou l'arc qui mesure l'angle RMC, & P la perpendiculaire ou le côté perpendiculaire du même triangle sphérique.

Maintenant

Maintenant ſi l'on prend RC pour rayon, le triangle RCM donnera RC : *r* :: RM : ſin. B ; mais par le triangle NRC *, RC : *r* :: NR : tang. P. Donc RM : NR :: ſin. B : tang. P. D'un autre côté le triangle NRM donne RM : RN :: *r* : tang. M ; c'eſt pourquoi l'on a cette troiſiéme analogie.

III. *r* : tang. M :: ſin. B : tang. P, ou *r* : ſin. B :: tang. M : tang. P, ou *r* : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M ; & en changeant les dénominations, *r* : ſin. P :: co-tang. B : co-tang. N.

Par la ſeconde analogie, on a les deux proportions ſuivantes, *r* : ſin. H :: ſin. M : ſin. P, & *r* : ſin. H :: ſin. N : ſin. B. Donc ſin. B : ſin. N :: ſin. P : ſin. M ; de cette analogie & de la troiſiéme *r* : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, on tire aiſément, en multipliant par ordre, *r* : ſin. N :: ſin. P × co-tang. P : ſin. M · co-tang. M. Et parce que (132) *r* : ſin :: co-tang : co-ſin, ou *r* · co ſin = ſin. co-tang ; ſi au lieu de ſin. P . co-tang. P, & de ſin. M . co-tang. M, on écrit reſpectivement *r* . co-ſin. P, *r* . co-ſin. M, l'on aura la quatriéme analogie ſuivante.

IV. *r* : ſin. N :: co-ſin. P : co-ſin. M, & en changeant les dénominations, *r* : ſin. M :: co-ſin. B : co-ſin. N. Mais par la troiſiéme analogie, co-tang. M : co-tang. P :: ſin. B : *r*, & par l'analogie II, ſin. M : ſin. P :: *r* : ſin. H ; donc, en multipliant par ordre, ſin. M · co-tang. M : ſin. P · co-tang. P :: ſin. B : ſin. H. Si à la place de ſin. M × co-tang. M & de ſin. P, co-tang. P, on écrit reſpectivement *r* . co-ſin. *m*, *r* . co-ſin. P, il viendra co-ſin. M : co-ſin. P :: ſin. B : ſin. H. Mais l'analogie I donne *r* : co-ſin. M :: co-tang. B : co-tang. H ; donc, en multipliant encore par ordre, on trouvera *r* : co-ſin. P :: ſin. B · co-tang. B : ſin. H × co-tang. H, & par une ſubſtitution ſemblable à celle dont nous venons de faire uſage,

V. *r* : co-ſin. P :: co-ſin. B : coſin. H. Mais l'analogie I donne *r* : co-ſin. M :: co-tang. B : cotang. H, proportion que j'appellerai (*a*). Par l'analogie II, on a la proportion ſuivante ſin. M : ſin. P :: *r* : ſin. H, proportion que je déſignerai par (*b*). L'analogie III donne *r* : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, ou ſin. B : *r* :: co-tang. M : co-tang. P, & en changeant les dénominations, ſin. P : *r* :: co-tang. N : co-tang. B. Multipliant par ordre les termes de cette derniere proportion par

* C'eſt celui dans lequel ſe trouve la lettre P.

ceux des proportions a & b, il vient sin. M : co sin. M :: $r \times$ co-tang. N : sin. H $\times$ co-tang. H. Mais sin. co-tang $= r \times$ co-sin, ou co-sin. M $= \frac{\text{sin. M. co-tang. M}}{r}$, & sin. H $\times$ co tang. H $= r \cdot$ co-sin. H ; donc en substituant ces valeurs, on aura

VI. r : co-tang. M :: co-tang. N : co-sin. H.

194. Les six analogies que nous venons de trouver, & quatre autres dont nous avons besoin, & que nous avons déduites par le changement des dénominations, sont les suivantes

I. r : co sin. M :: co-tang. B : co-tang. H,
ou co-sin. M : r :: co-tang. H : co-tang. B
II. r : sin. H :: sin. M : sin. P
III. r : sin. B :: co-tang. P : co-tang. M
IV. r : sin. N :: co-sin. P : co-sin. M
V. r : co sin. B :: co-sin. P : co sin. H
VI. r : co-tang. M :: co-tang. N : co-sin. H

VII. r : co-sin. N :: co-tang. P : co-tang. H
VIII. r : sin H :: sin. N : sin. B
IX. r : sin. P :: co-tang. B : co-tang. N
X. r : sin. M :: co-sin. B : co-sin. N

195. Etant donné dans un triangle rectangle, dont les côtés sont plus petits qu'un quart de cercle & les angles sur l'hypothénuse aigus, outre l'angle droit deux autres choses quelconques, c'est-à-dire, ou les côtés ou les angles aigus, ou un angle avec l'hypothénuse, ou un angle & un côté, ou l'hypothénuse & un côté, on trouvera facilement les autres par les analogies précédentes, qu'on peut regarder comme autant de Théorêmes. Supposons, *par exemple*, que dans le triangle rectangle NMR (fig. 137) on connoisse l'angle M, la base B ou le côté adjacent, & qu'on demande l'hypothénuse, la premiere analogie nous dit que le rayon est au co-sinus de l'angle M, comme la co-tangente du côté qui lui est adjacent est à la co-tangente de l'hypothénuse. Je cherche donc dans les tables le co-sinus de l'angle M, & la co-tangente du côté B ou de l'arc MR, dont le nombre des degrés est connu par supposition ; ainsi je connoîtrai les trois premiers termes de la I analogie, & par conséquent je trouverai facilement le quatriéme. Si l'on veut employer les logarithmes, on ajou-

tera les logarithmes des moyens, on retranchera le logarithme du rayon, & l'on aura le logarithme de la co-tangente de l'hypothénuse. Ce logarithme étant cherché dans les tables dans la colonne des co-tangentes, fera connoître l'hypothénuse.

196. Si quelque côté du triangle sphérique étoit plus grand qu'un quart de cercle, au lieu de ce triangle on résoudroit le contigu, dont les côtés & les angles sur l'hypothénuse valent moins de 90 degrés (192). Or connoissant les côtés & les angles de ce triangle contigu, il sera très-facile de connoître les angles & les côtés du triangle proposé. Mais, parce que le sinus d'un angle obtus est le même que celui d'un angle aigu qui est son supplément; si ce qu'on cherche est exprimé par un sinus, il faudra tâcher de connoître (par le n° 190) si l'angle ou le côté cherché est plus petit ou plus grand que 90°. S'il s'agit d'un angle obtus, son co-sinus doit avoir le signe — aussi-bien que sa tangente & sa co-tangente; mais il il ne peut y avoir de cas douteux que lorsque M & P sont donnés, ou bien N & B. Supposons les plans de deux demi-cercles M N m, M R m (fig. 135.B) inclinés l'un à l'autre, & qui se coupent dans la ligne M m; si par le centre C de ces demi-cercles on fait passer le plan N C R perpendiculaire au demi-cercle M R m, l'on aura deux triangles sphériques-rectangles M N R, N m R, qui auront chacun un angle droit en R les angles M & m égaux; & le côté N R = P commun. Donc étant donnés M & P, on ne peut pas déterminer B ou H, c'est-à-dire, on ne peut pas savoir si ce qu'on cherche vaut plus ou moins de 90°. Mais les cas douteux n'ont guere lieu dans la pratique de l'astronomie, où l'on n'emploie dans le calcul des triangles rectangles que des arcs moindres que 90°, parce que quand on a des arcs plus grands, on prend leurs supplémens en les supposant prolongés jusqu'à la demi-circonférence. Comme si (dans la fig. 135.B) on avoit à calculer le triangle rectangle m N R, on calculeroit le triangle M N R par le moyen duquel ayant trouvé M N, *par exemple*, de 60°, on concluroit que N m, supplément de M N, est de 120°.

197. THÉOREME. *Si dans un triangle sphérique obliquangle* M T m (fig. 136 & 137) *on abaisse du point* T *le côté ou l'arc* T R *perpendiculaire au côté opposé* M m, *ce côté tombera dans l'angle* T = M T m, *si* M *&* m *sont tous les deux aigus ou tous les deux obtus; mais* T R *tombera hors de l'angle* T, *si l'un des deux angles* M, m *est aigu & l'autre obtus*. Considérons les trian-

gles rectangles TMR & TmR qui ont le côté TR = P commun, si M est supposé aigu, & m obtus (fig. 136), le côté P devroit être de même espece que M (190); & comme il doit aussi être de même espece que l'angle m qui lui est opposé dans le triangle TmR, il seroit à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle, ce qui étant impossible, on doit conclure que M & m sont de même espece lorsque P tombe dans l'angle T. Si P (fig. 137) tombe hors de l'angle T, & qu'on suppose M aigu aussi-bien que TmM, TmR sera obtus; & P devroit alors être à la fois plus petit & plus grand qu'un quart de cercle; car P doit être de même espece que M dans le triangle RTM, & de même espece que TmR dans le triangle TmR. De-là il suit que M & TmR sont de même espece; donc si M est aigu, TmM, supplément de TmR, sera obtus, & réciproquement. Donc P tombera hors de l'angle T, si M & m sont de différente espece; mais il tombera dans l'angle T, si M & m sont de même espece.

198 SCHOLIE. Lorsque P tombe dans l'angle T (fig. 136), le triangle obliquangle MTm résulte de l'addition des triangles rectangles MTR, mTR; au contraire dans le cas de la fig. 137 ce triangle est la différence des deux triangles rectangles dont on vient de parler. Si dans le triangle rectangle TRM (fig. 136 & 137) nous désignons les côtés, l'hypothénuse & les angles comme ci-dessus par H, B, P, M, N, & que dans l'autre triangle TmR qui a le côté TR, nous désignions les mêmes quantités par h, b, P, m, n (on met P & non pas p, parce que TR est le même pour les deux triangles); dans le premier cas dans lequel M & m sont tous les deux aigus, ou tous les deux obtus, T sera = N + n (fig. 138), & Mm = B + b. Mais si M & m sont de différente espece (fig. 139) l'on aura T = N − n, & Mm = B − b. Donc on aura toujours T = N ± n, & Mm = B ± b; les signes supérieurs ont lieu si M & m sont de même espece, mais on employera les signes inférieurs si M & m sont d'espece différente. Il est aisé de voir que N désigne l'angle formé par les arcs H & P.

199. PROBLEME. *Trouver des analogies par le moyen desquelles étant données dans un triangle sphérique obliquangle, trois de ces six choses, trois angles & trois côtés, on puisse trouver les autres.* Ayant mené le côté TR (fig. 138 & 139) perpendiculairement sur le côté opposé, prolongé s'il le faut

on appliquera à chacun des triangles rectangles rectangles MTR, *m* TR les analogies trouvées ci-dessus. Par l'analogie II l'on aura R : ſin. H :: ſin. M : ſin. P *, & R : ſin. *h* :: ſin. *m* : ſin. P. Donc 1° R · ſin. P = ſin. H · ſin. M = ſin. *h* · ſin. *m*; donc 2°.

I. ſin. H : ſin. *h* :: ſin. *m* : ſin. M.

Par l'analogie III l'on a R : ſin. B :: co-tang. P : co-tang. M, & R : ſin. *b* :: co-tang. P : co-tang. *m*; donc 1° R : co-tang. P :: ſin. B : co-tang. M :: ſin. *b* : co-tang. *m*; donc 2°.

II. ſin. B : ſin. *b* :: co-tang. M : co-tang. *m*.

Par l'analogie IV l'on a R : ſin. N :: co-ſin. P : co-ſin. M, & R : ſin. *n* :: co-ſin. P : co-ſin. *m*; donc R : co ſin. P :: ſin. N : co-ſin. M :: ſin. *n* : co-ſin. *m*, & par conſéquent

III. ſin. N : ſin. *n* :: co-ſin. M : co-ſin. *m*.

Donc *componendo*, (ſin. N + ſin. *n*) : (co-ſin. M + co-ſin. *m*) :: ſin. N : ſin. *n*, & *dividendo* (ſin. N — ſin. *n*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) : ſin. N : ſin. *n*; & partant (ſin. N + ſin. *n*) : (co-ſin. M + co-ſin. *m*) :: (ſin. N — ſin. *n*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*), ou (ſin. N + ſin. *n*) : (ſin. N — ſin. *n*) :: (co ſin. M + co-ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*). Mais (ſelon ce qu'on a dit ci-deſſus n°. 138) l'on a les proportions (ſin. N + ſin. *n*) : (ſin. N — ſin. *n*) :: tang. $\left(\frac{N+n}{2}\right)$ :: tang. $\left(\frac{N-n}{2}\right)$, (co-ſin. M + co-ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) :: co-tang. $\left(\frac{M+m}{2}\right)$: tang. $\left(\frac{M-m}{2}\right)$, ou en déſignant les complémens de M & de *m* par *c* M & *c m*, (co ſin. M + co-ſin. *m*) : (co-ſin. M — co-ſin. *m*) :: tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M + $\frac{1}{2}$ *c m*) : tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M — $\frac{1}{2}$ *c m*). L'on a donc l'analogie ſuivante

IV. tang. ($\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{2}$ *n*) : tang. ($\frac{1}{2}$ N — $\frac{1}{2}$ *n*) :: tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M + $\frac{1}{2}$ *c m*) : tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M — $\frac{1}{2}$ *c m*). Mais parce que *a*, *b*, *f*, *g*, étant des angles ou des arcs, on a tang. *b* : tang. *a* :: co-tang. *a* : co-tang. *b*, & tang. *f* : tang. *g* :: co-tang. *g* : co-tang. *f*, on aura, en ſubſtituant les co-tangentes aux tangentes dans la proportion précédente, co-tang. ($\frac{1}{2}$ N — $\frac{1}{2}$ *n*) : co-tang. ($\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{2}$ *n*) :: co-tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M — $\frac{1}{2}$ *c m*) : co-tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M + $\frac{1}{2}$ *c m*), ou co-tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M + $\frac{1}{2}$ *c m*) : co-tang. ($\frac{1}{2}$ *c* M — $\frac{1}{2}$ *c m*) :: co-tang. ($\frac{1}{2}$ N + $\frac{1}{2}$ *n*) : co-tang ($\frac{1}{2}$ N — $\frac{1}{2}$ *n*). Il eſt bon de retenir cette formule,

* Nous déſignons ici le ſinus total ou le rayon par R, au lieu que nous l'avons déſigné par *r* dans l'analogie II.

dont nous ferons usage dans la premiere table suivante. Si l'on connoît N + n, on connoîtra par les tables, co-tang. ($\frac{1}{2}$N + $\frac{1}{2}n$), & le quatriéme terme de la proportion, dont je suppose les trois premiers connus, fera trouver la demi-différence des angles N & n. Ajoutant cette demi-différence à leur demi-somme, l'on aura le plus grand angle que je suppose être N; retranchant la même demi-différence de la demi-somme; l'on aura le plus petit angle que je suppose = n. Si l'on connoissoit N — n, avec m & M, le troisiéme terme de la proportion seroit le terme cherché. L'ayant trouvé, on auroit facilement N & n.

D'un autre côté l'analogie V donne R : co-sin. P :: co-sin. B : co-sin. H, & R : co-sin. P :: co-sin. b : co-sin. h, & de là l'on tire aisément

V. co-sin. B : co sin. b :: co-sin. H : co-sin. h.

Puisque co-sin. B : co-sin. b :: co-sin. H : co-sin. h, l'on aura (co-sin. B + cosin. b) : (co-sin. B — co-sin. b) :: (co-sin H + co-sin. h) : (co-sin. H — co-sin. h). Mais (co-sin. B + co-sin. b) : (co-sin. B — co-sin. b) :: tang. ($\frac{1}{2}c$B + $\frac{1}{2}cb$) : tang. ($\frac{1}{2}$ c B — $\frac{1}{2}cb$), & (co-sin. H + co-sin. h) : (co-sin. H — co-sin. h) :: tang. ($\frac{1}{2}c$H + $\frac{1}{2}ch$) : tang. ($\frac{1}{2}c$H — $\frac{1}{2}ch$); ainsi l'on a l'analogie suivante.

VI. tang. ($\frac{1}{2}c$B + $\frac{1}{2}cb$) : tang. ($\frac{1}{2}c$B — $\frac{1}{2}cb$) :: tang. ($\frac{1}{2}c$H + $\frac{1}{2}ch$) : tang. ($\frac{1}{2}c$H — $\frac{1}{2}ch$), ou co-tang. ($\frac{1}{2}c$H + $\frac{1}{2}ch$) : co-tang. ($\frac{1}{2}c$H — $\frac{1}{2}ch$) :: co-tang. ($\frac{1}{2}c$B + $\frac{1}{2}cb$) : co-tang. ($\frac{1}{2}c$B — $\frac{1}{2}cb$).

Enfin, de l'analogie VII, on tire R : co-sin. N :: co-tang. P : co-tang. H, ou R : co-tang. P : co-sin. N : co-tang. H, & R : co-tang. P :: co-sin. n : co-tang. h; donc

VII. co-sin. N : co-sin. n :: co-tang. H : co-tang. h.

200. Ces sept analogies contiennent la solution du Problême proposé. Supposons que ce que l'on cherche, angle ou côté, est désigné par Q, ce qui est opposé à la chose cherchée côté ou angle par T, les choses adjacentes de part & d'autre de ce que l'on cherche, de maniere que ce que l'on cherche angle ou côté soit compris entr'elles par K & k, & les choses entre lesquelles est compris ce qui est opposé à ce l'on cherche par P & p, en mettant les lettres majuscules d'un côté, & les petites lettres de l'autre; de maniere que P & K soient contigus l'un à l'autre, aussi-bien que p & k, on aura cinq lettres K, P, k, p, T, dont trois marqueront dans chaque cas les trois choses données,

Q étant toujours ce que l'on cherche. Les lettres K, k & P, p peuvent être mises les unes pour les autres, sans représenter des cas réellement différens, *par exemple*, le cas K k P n'est pas réellement différent du cas représenté par K k p, parce qu'il importe peu de quel côté on écrive les lettres K, k & P, p, pourvu que l'on conserve le reste de l'ordre. Par la même raison la combinaison K p T est censée la même que k P T. Cela posé il est facile de voir que tous les cas possibles se réduisent aux six suivans. I. KkP ou kK p, II. KkT ou kKT, III. KPp ou KpP, IV. K P T ou kp T, V. Kp T ou k P T, VI. P p T ou p P T. Mais parce que la chose cherchée Q peut être un angle ou un côté, il y a en tout douze questions à résoudre.

Si on cherche un côté, & que T (chose opposée à ce qu'on cherche) soit connu, supposez que Q est h (dans les fig. 138 & 139), & que T est M. Mais si vous cherchez un angle, supposez que Q est M, & que T est h. Mais si T n'est pas donné, & qu'on cherche un côté, supposez que ce côté est représenté par B $\mp b$, & que l'angle cherché est $=$ N $\mp n$. Ayant ensuite marqué (dans les figures 138 & 139) les autres choses qui sont censées données, j'ai joint ici deux tables, par le moyen desquelles on peut répondre aux douze questions dont on a besoin dans la résolution des triangles sphériques oblique-angles. Si l'on cherche un côté, on fera usage de la premiere table, & de la seconde lorsqu'on cherchera un angle. Au reste dans ces tables nous avons désigné le sinus par sin, le cosinus par cos, la cotangente par cot: ainsi cot. M exprime la cotangente de l'angle M, cos. H le cosinus de l'arc H, &c.

ON CHERCHE UN CÔTÉ.

Cas.	Choses données.	on demande	Premiere Analogie.	Seconde Analogie.
K p T k P T	m, H, M.	h	*sin.* m : *sin.* M :: *sin.* H : *sin.* h.	
P p T p P T	H, B∓b, M.	h	*cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B.	*cos.*B : *cos.*b :: *cos.*H : *cos.*h
K P T k p T	N∓n, H, M.	h	*cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N.	*cos.*N : *cos.*n :: *cot.*H : *cot.*h.
K k T k K T	N∓n, m, M.	h	*cot.* ($\frac{1}{2}$cM + $\frac{1}{2}$cM) : *cot.* ($\frac{1}{2}$cM − $\frac{1}{2}$cM) :: *cot.* ($\frac{1}{2}$N + $\frac{1}{2}$n) : *cot.* ($\frac{1}{2}$N − $\frac{1}{2}$n)	r : *cot.* m :: *cot.* n :: *cos.* h.
K P p k p P	H, h, M.	B ∓ b	*cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B.	*cos.*H : *cos.*h :: *cos.*B : *cos.*b.
K k P k K p	H, m, M.	B ∓ b	*cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B.	*cot.*M : *cot.* :: *sin.* B : *sin.*b.

On cherche un Angle.

Cas.	choses données.	on demande	Premiere Analogie.	Seconde analogie.
K p T k P T	M, h, H.	m	*sin.* h : *sin.* H :: *sin.* M : *sin.* m.	
P p T p P T	M, N ∓ n, H.	m	*cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N	*sin.* N : *sin.* n :: *cos.* M : *cos.* m.
K p T k p T	B ∓ b, M, H.	m	*cos.* M : r :: *cot.* H : *cot.* B.	*sin.* B : *sin.* b :: *cot.* M : *cot.* m.
K k T k K T	B ∓ b, h, H	m	*cot.*($\frac{1}{2}$cH + $\frac{1}{2}$ch) : *cot.*($\frac{1}{2}$cH − $\frac{1}{2}$ch) :: *cot.*($\frac{1}{2}$cB + $\frac{1}{2}$cb) : *cot.*($\frac{1}{2}$cB − $\frac{1}{2}$cb)	*cot.* b : *cot.* h :: r : *cos.* m.
K k P k K P	H, h, M	N ∓ n	*cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N.	*cot.* H : *cot.* h :: *cos.* N : *cos.* n
K P p k p P	H, m, M	N ∓ n	*cot.* M : r :: *cos.* H : *cot.* N	*cos.* M : *cos.* m :: *sin.* N : *sin.* n

201. L'usage de ces tables est facile à comprendre. Supposons que dans un triangle M N m on connoisse les angles m, M, le côté opposé à l'angle m & qu'on demande le côté h opposé à l'angle M, la premiere analogie de la premiere table vous dit que le sinus de l'angle m est à celui de l'angle M, comme le sinus de l'arc H opposé à l'angle m est au sinus de l'arc ou du côté h cherché. Mais ce même sinus pouvant appartenir à un arc plus petit qu'un quart de cercle ou à son supplément, on ne peut s'assurer par cette regle si h est plus grand ou moindre qu'un quart de cercle. Ici K représente l'angle T m M l'angle m T M étant représenté par k, cet angle dans la fig. 139 est une des choses entre lesquelles est compris le côté ou l'arc h cherché. Mais M est compris entre le côté H & le côté B; ainsi p ou P est ici représenté par H. A l'égard de T ou de la chose opposée à ce qu'on cherche, il est visible que c'est l'angle M opposé au côté cherché h.

Supposons maintenant qu'étant donné le côté H, la base Mm = B $\mp$ b (selon que le côté NR tombe en dehors ou en dedans de l'angle MTm, ou selon que les angles M & m sont tous les deux de différente ou de même espece (197)) l'angle M, & qu'on cherche h c'est-à-dire, le côté opposé à l'angle M. Or l'angle M est compris entre H & Mm; ainsi H & B $\mp$ b représentent ici P & p. L'analogie co-sin. M : r :: co-tang. H : co-tang. B fera évidemment trouver la valeur de B; B étant connu, b le sera aussi, puisqu'on connoît B $\mp$ b (par supposition). C'est pourquoi par la seconde analogie (qui est à la droite de celle dont nous venons de parler) co-sin. B : co-sin. b :: co-sin. H : co-sin. h, on trouvera la valeur de h.

Au reste on peut se dispenser de faire attention à la premiere colonne de chaque table; supposons, *par exemple*, qu'étant donné le côté H adjacent à l'angle M avec les deux angles M & m qui comprennent le côté Mm auquel est opposé l'angle N $\mp$ n cherché. Les données H, m, M se trouvent au bas de la seconde colonne de la seconde table, & à côté dans la troisiéme colonne je trouve N $\mp$ n. L'analogie cot. M : r :: cos. H : cot. N me fait trouver N. L'analogie (qui est à côté) cos. M : cos. m :: sin. N : sin. n me fera connoître n, pourvu que je sache si n est un angle aigu ou obtus. Donc je trouverai facilement N $\mp$ n, le signe supé-

rieur aura lieu si M & m sont d'espece différente, & le signe inférieur, si M & m sont de même espece.

202. Cependant on ne peut pas toujours s'assurer par le moyen des regles précédentes si le côté ou l'angle cherché est plus grand ou moindre que 90°. Car supposons que le plan du demi-cercle A N B (fig. 40) est oblique à celui du demi-cercle A D B & que du centre C de la sphere avec le rayon C N, on décrive l'arc N R perpendiculaire au plan du demi-cercle A D B, qu'on décrive de même, en prenant R D = R E, les arcs N D, N E, il est visible que les triangles sphériques rectangles N R D, N R E ayant les côtés qui comprennent l'angle droit égaux, sont égaux *. Donc les angles N D R, N E R sont égaux entr'eux aussi-bien que leurs supplémens N D A, N E B. C'est pourquoi l'on peut former deux triangles sphériques obliquangles différens N D A, N E B dans lesquels les angles A & B soient égaux entr'eux aussi-bien que les côtés N D, N E qui leur sont opposés, & les angles N D A & N E B. De-là il suit 1°. qu'étant donnés deux angles A, A D N, & le côté N D adjacent à l'un de ces angles, le triangle n'est pas déterminé; puisque deux triangles différens peuvent avoir ces trois choses égales. 2° Deux côtés donnés N A, N D & l'angle A non compris entre ces côtés ne déterminent pas non plus un triangle sphérique NAD; puisque le triangle N A E a ces trois mêmes choses égales.

De-là il suit que toutes les fois que par le moyen de deux angles & d'un côté qui n'est pas compris entre ces angles, on cherche un côté ou un angle, on ne peut s'assurer si ce que l'on a trouvé vaut plus ou moins de 90°. De sorte qu'étant donnés M, m, & H, il y a de l'ambiguité, à moins qu'on ne sache d'ailleurs si le côté ou l'angle cherché est aigu ou obtus. Il y aura aussi la même ambiguité, lorsqu'on cherchera un angle ou un côté par le moyen des trois données H, h, M, c'est-à-dire, par le moyen de deux côtés & d'un angle qui ne sera pas compris entre ces côtés. Ainsi dans le premier cas de la seconde table on ne sait pas si l'angle

* Si dans deux triangles rectangles, dont les côtés qui comprennent l'angle droit sont supposés égaux, on conçoit les côtés qui comprennent l'angle droit de l'un appliqués sur ceux qui comprennent l'angle droit de l'autre, il est visible que ces côtés se confondront aussi-bien que les deux hypothénuses, & que ces triangles ne formeront qu'un seul & même triangle; de sorte qu'ils sont égaux en tout.

cherché m est aigu ou obtus; parce que le même sinus peut appartenir à deux angles différens, supplémens l'un de l'autre.

Dans le cinquiéme cas de la même table l'ambiguité consiste en ce qu'on n'a pas plus de raison pour prendre la somme, que la différence des angles N & n. Dans le cinquiéme cas de la premiere table on ne sait pas non plus si l'on doit prendre la somme ou la différence de B & de b.

Dans les cas différens de ceux dont on vient de parler, il ne sauroit y avoir aucun doute.

FIN DU TOME PREMIER.

TABLE DES MATIERES

Contenues dans le Tome premier.

CALCUL. Page 1

De l'Arithmétique. 3

De l'Addition. 4

De la Soustraction. 7

De la Multiplication. 10

De la Division. 15

Des Fractions. 21

Des Fractions Décimales. 29

De l'Evaluation des Fractions. 34

De la multiplication & division des Nombres complexes. ibid.

De l'Algebre. 39

Des Fractions algébriques. 53

Des Raisons & Proportions. 94

Des Progressions géométriques. 109

Des Proportions & Progressions arithmétiques. 117

Des Logarithmes. 121

Des Equations. 132

Des Problêmes indéterminés, semidéterminés, & plus que déterminés. 159

Des Equations à deux termes. 203

Des Equations de tous les degrés. 209

De la résolution des Equations par le moyen des diviseurs d'un ordre quelconque. 242

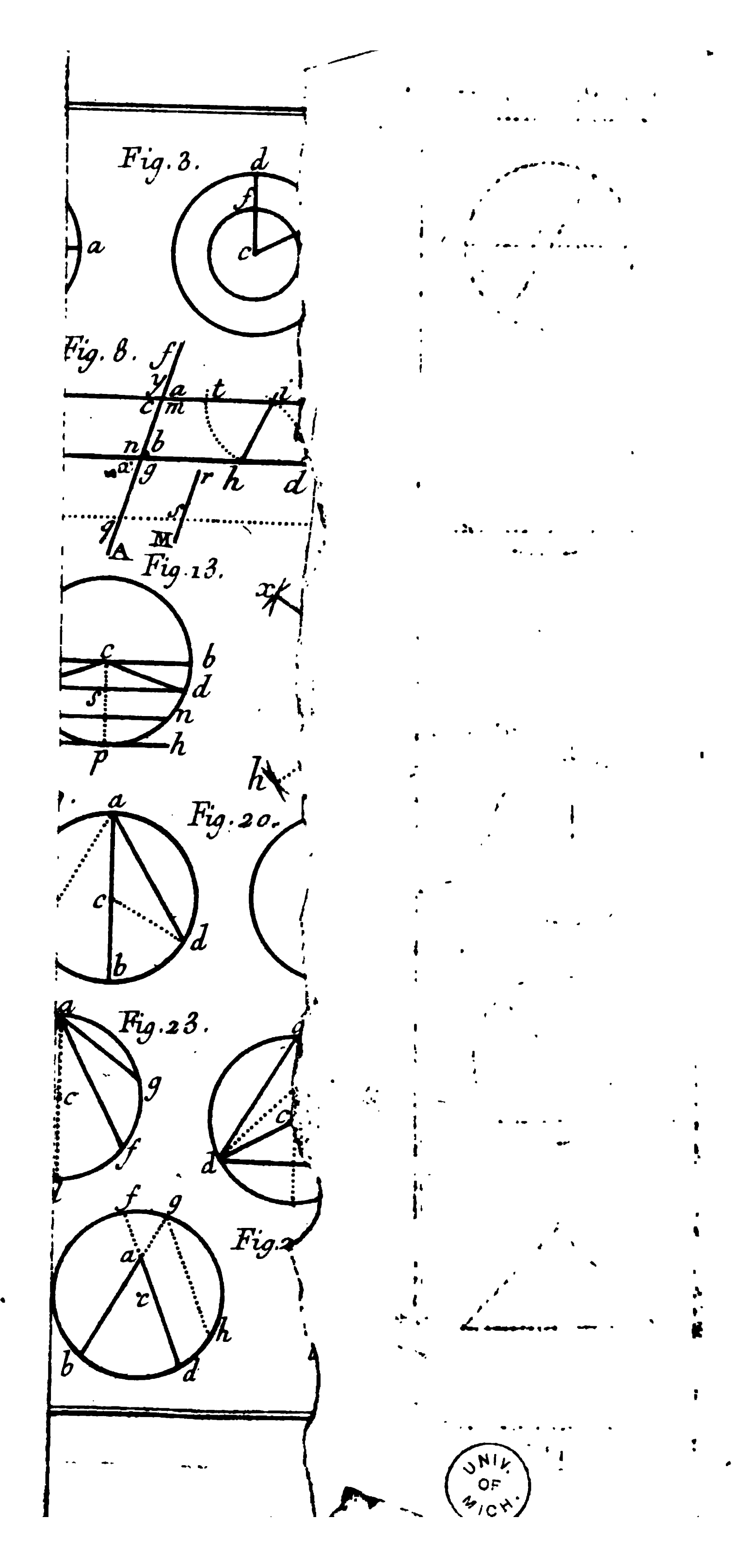
Des Equations des Degrés supérieurs. 283

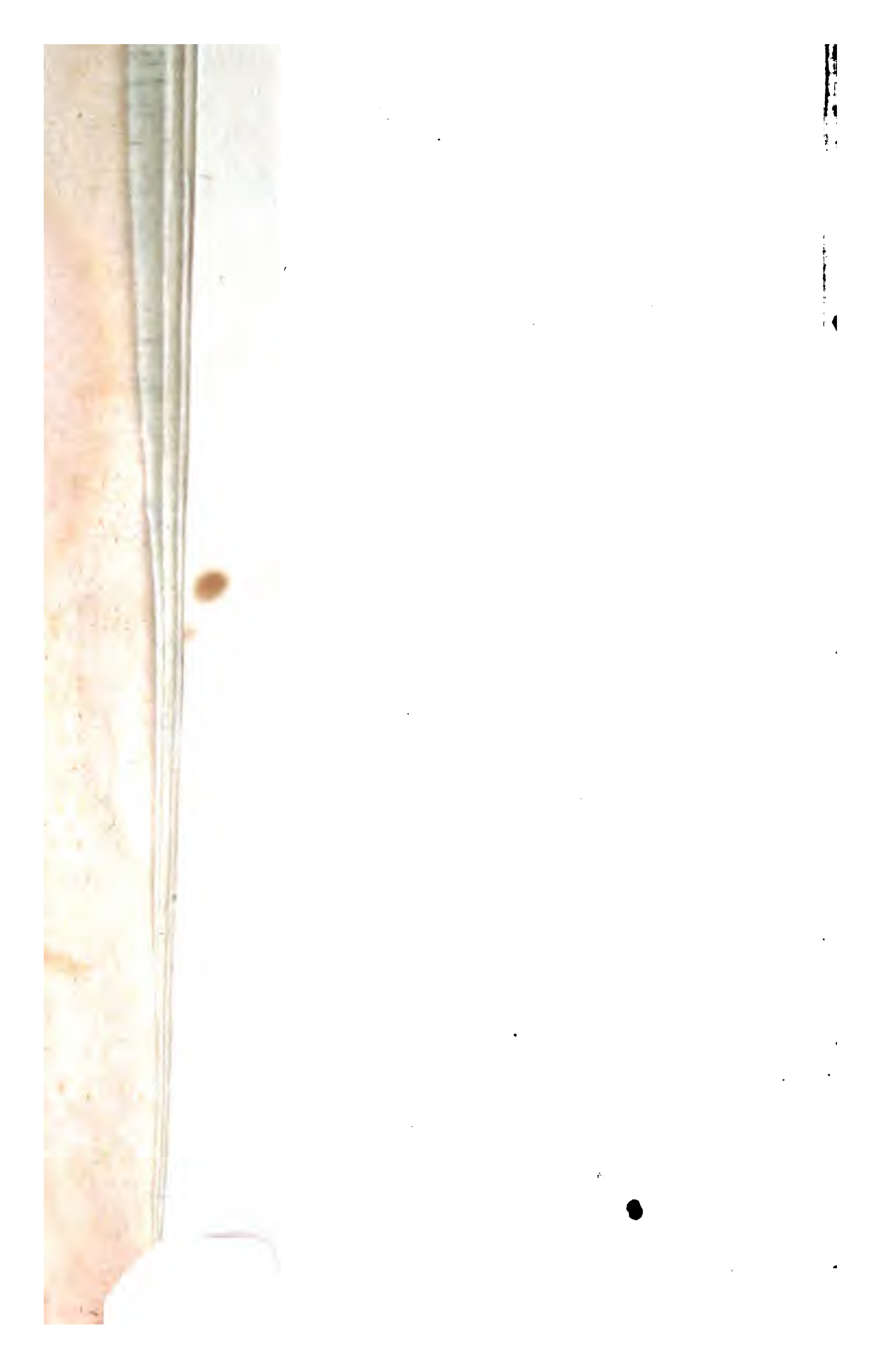
De l'Infini. 290
Des Séries ou Suites. 293
Usage des Séries récurrentes dans la recherche des Racines des Equations. 322
Des Fractions continues. 336

TABLE
DE LA
GÉOMÉTRIE.

DE LA GÉOMÉTRIE. Page 341
De la Mesure des Angles. 358
Des Polygones. 363
Des Lignes proportionnelles. 373
De la Mesure & du Rapport des Surfaces. 385
Des Plans. 402
Des Solides. 406
Du Rapport des Surfaces des Solides. 419
De la solidité des Solides & de leur Rapport. 422
De la Trigonométrie. 433
De la résolution des Triangles. 448
De la résolution des Triangles obliquangles. 452
Trigonométrie sphérique. 491

FIN de la Table du Tome premier.

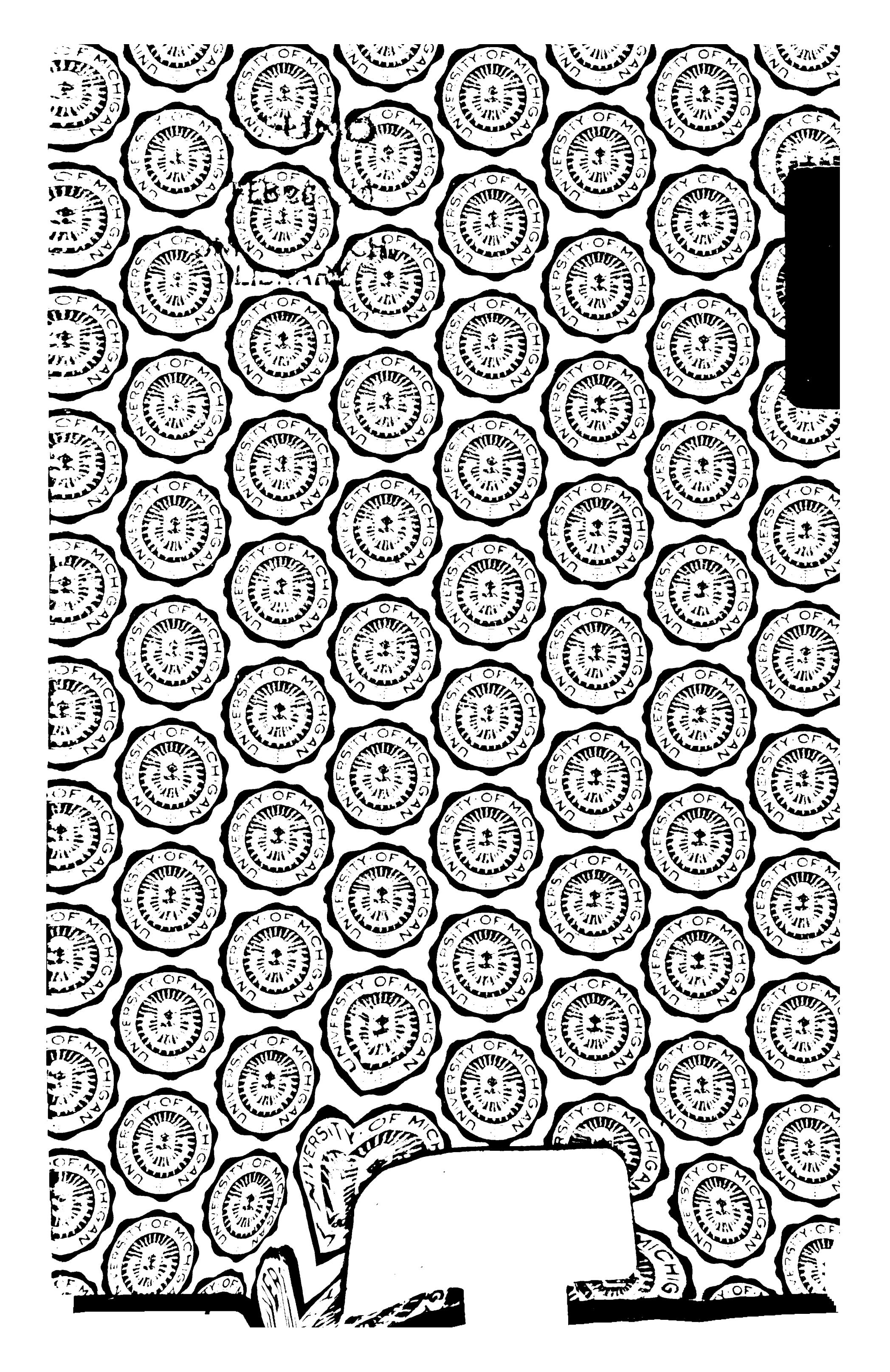

Fig. 3.
d
f
c
a
Fig. 8.
f
y
a
t
c
m
n
b
g
r
h
d
q
A
M
Fig. 13.
c
b
d
s
n
h
p
a
Fig. 20.
c
d
b
Fig. 23.
g
c
f
d
f
g
a
h
b
d








UNIVERSITY·OF·MICHIGAN


UNIVERSITY OF MICHIGAN

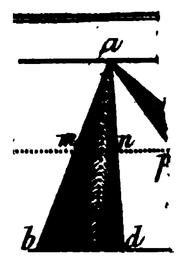
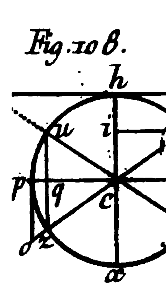


Fig. 108.





ig. 113.

